

Zadanie 21. W przestrzeni $W_1([0, 1]) \subset L^2([0, 1])$ znajdź element najbliższy do

$$a) f(t) = t^2, \quad b) f(t) = t^3.$$

Ile wynosi ta odległość?

Zadanie 22. W przestrzeni $W_2([0, 1]) \subset L^2([0, 1])$ znajdź element najbliższy do $f(t) = t^2$.
Ile wynosi ta odległość?

Zadanie 23. W przestrzeni funkcji stałych znajdź element najbliższy do

$$a) f(t) = t, \quad b) f(t) = t^2, \quad c) f(t) = t^3, \quad d) f(t) = e^t.$$

Rozważ przestrzenie

$$i) C([0, 1]), \quad ii) L([0, 1]), \quad iii) L^2([0, 1]).$$

Ile wynosi ta odległość?

Zadanie 24. W podprzestrzeni $V = \text{span} \{1, \sin t, \cos t\} \subset L^2(I)$ znajdź element najbliższy do $f(t) = t$, gdy

$$a) I = [0, \pi], \quad b) I = [0, 2\pi], \quad c) I = [0, \frac{\pi}{2}], \quad d) I = [-\pi, \pi].$$

Zadanie 25. W przestrzeni $L_p^2([0, 1]) = \{f : \sqrt{p}f \in L^2([0, 1])\}$ z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 p(t)f(t)g(t)dt$$

znajdź element najbliższy do $f(t) = t^2$, gdy $p(t) = t$.

Zadanie 26. W przestrzeni $W_2([-1, 1]) \subset L^2([0, 1])$ znajdź element $w(t)$ najbliższy do

$$a) f(t) = t^2, \quad b) f(t) = t^3$$

o własności

$$\int_{-1}^1 w(t)dt = 0.$$

Zadanie 27. W przestrzeni $W_2([-1, 1]) \subset L^2([0, 1])$ znajdź element $w(t)$ najbliższy do $f(t) = t$ o własności

$$\int_{-1}^1 w(t)dt = 1.$$

Zadanie 28. W podprzestrzeni $V = \text{span} \left\{ \frac{1}{3^n}, \frac{1}{4^n} \right\} \subset l^2$, gdzie

$$l^2 = \left\{ \{a_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\} \text{ z iloczynem skalarnym } \langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

znajdź element najbliższy do $\frac{1}{2^n}$.

Uwaga: Wszystkie zadania rozwiąż dwoma sposobami (układ normalny, ortonormalizacja Grama-Schmidta).