1. Pokaż, że wypłaty z opcji kupna i sprzedaży spełniają

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

2. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Wypisz wszystkie elementy $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

3. * Dane jest aktywo ryzykowne o cenie początkowej $S_0 = 3/2$. Jego cena w chwili $T = 1$ może wynieść $S_1(\omega_1) = 10$ lub $S_1(\omega_2) = 2$ z jednakowym prawdopodobieństwem. Cena aktywa bez ryzyka jest równa $B_0 = 1$ na początku i $B_1 = 2$ na końcu.

1. Oblicz wartość obecną opcji kupna dającej wypłatę końcową $C_1 = (S_1 - K)^+$, gdy $K = 5$.
2. Czy warto kupić opcję po tej cenie?
3. Czy przy takiej wycenie opcji na rynku pojawia się możliwość zysku bez ryzyka? Jeżeli tak, podaj przykład strategii.

4. Dany jest portfel $\varphi = (5, 2)$. Aktywo ryzykowne kosztuje początkowo $S_0 = 10$. W chwili końcowej $T = 1$ jego cena może wynieść 12 lub 9. Stopa bez ryzyka jest równa 1%.

1. Oblicz wartość początkową portfela.
2. Jakie wartości może mieć portfel w chwili końcowej?

5. Udowodnij, że dla każdej wypłaty X istnieje dokładnie jeden portfel replikujący i ma on postać

$$\alpha_0 = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d}, \qquad \beta_0 = \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(1+r)(S^u - S^d)}, \qquad \text{gdzie } \; X^u = X(\omega_1),\; X^d = X(\omega_2).$$

6. Udowodnij, że cena racjonalna wypłaty X dana jest wzorem

$$\frac{X^u((1+r)S_0 - S^d) + X^d(S^u - (1+r)S_0)}{(1+r)(S^u - S^d)}.$$

7. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Inwestor uważa, ze prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji wynosi $P(\{\omega_1\}) = 0.2$, a spadku $P(\{\omega_2\}) = 0.8$. Akcja kosztująca teraz $S_0 = 260$ za 3 miesiące będzie miała cenę

$$S_T(\omega) = \begin{cases} 340, & \text{gdy } \; \omega = \omega_1, \\ 220, & \text{gdy } \; \omega = \omega_2. \end{cases}$$

1. Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe ceny akcji w chwili T.
2. Niech stopa procentowa na depozyt 3-miesięczny wynosi $r = 1\%$. Wyceń europejską opcję kupna z ceną wykonania $K = 280$ i momentem wygaśnięcia za 3 miesiące.
3. Niech stopa procentowa na depozyt 3-miesięczny wynosi $r = 1\%$. Wyceń europejską opcję sprzedaży z ceną wykonania $K = 250$ i momentem wygaśnięcia za 3 miesiące.

8. Opisz postępowanie inwestora sprzedającego europejską opcję kupna i chcącego zabezpieczyć wypłatę z opcji. Co się dzieje, gdy opcja jest sprzedawana po cenie innej niż racjonalna?

Rozwiązanie:

(1) W chwili $t = 0$ inwestor postępuje następująco:

Działanie	Rozliczenie
Sprzedaje jedną opcję	C_0
Kupuje α sztuk akcji	$-\alpha S_0$
Tworzy depozyt bankowy (ew. bierze kredyt)	$-\beta_0$.

Na mocy definicji racjonalnej ceny mamy $C_0 - \alpha S_0 - \beta_0 = 0$. Zatem koszt początkowy takiego postępowania inwestora sprzedającego opcję jest równy zeru.

(2) W chwili $t = T$ inwestor postępuje następująco:

Działanie	Rozliczenie
Realizuje opcję	$-C_T$
Sprzedaje akcje	αS_T
Podejmuje pieniądze z banku (ew. zwraca dług)	$(1+r)\beta_0$.

Rozliczenie końcowe $-C_T + \alpha S_T + (1+r)\beta_0 = 0$, czyli do tej transakcji nikt nie dołożył. Cena racjonalna wypłaty jest do zaakceptowania dla obu stron.

(3) Gdyby opcja nie była sprzedawana po cenie C_0, a po cenie $C \neq C_0$, to:

i. Gdy $C_0 < C$, sprzedający ma pewny zysk $C - C_0 > 0$ w chwili 0, gdyż wystarczy wydać C_0, by zabezpieczyć wypłatę X dla kupującego, resztę sprzedający zachowuje dla siebie.

ii. Gdy $C_0 > C$ (koszt zabezpieczenia jest większy niż cena C), to kupujący ma pewny zysk $C_0 - C > 0$ w chwili 0, gdyż aby otrzymać wypłatę X musiałby wydać C_0, a kupił ja za C.

W obu przypadkach, gdy $C \neq C_0$ (tj. cena rożni się od ceny racjonalnej), znajdujemy portfel dający zysk bez żadnego ryzyka i zajmując odpowiednią pozycję mamy dodatni dochód.

9. Znajdź przykład rynku i wypłaty $X > 0$, której cena racjonalna jest ujemna, tj. $\Pi_0(X) < 0$.

Rozwiązanie:

1. Skorzystamy ze wzoru z Zadania 6.
2. Wiemy, że $X^u > 0$, $X^d > 0$, $r \geq 0$, $S^u > S^d$.
3. Aby $\Pi_0(X) < 0$, to musi być $(1+r)S_0 < S^d$ lub $S^u < S_0(1+r)$.
4. Niech zatem $S_0 = 10$, $r = 0,1$, $S^d = 12$, $S^u = 13$, $X^d = 5$, $X^u = 15$. Wtedy $\Pi_0(X) = -\frac{50}{11}$.
5. Na tym rynku możemy osiągnąć zysk bez ryzyka pożyczając 10 jednostek z banku i kupując za tę kwotę akcję. Wtedy w chwili T sprzedając akcję otrzymujemy co najmniej 12, a do banku musimy zwrócić 11. W tej sytuacji można by osiągnąć zysk bez ryzyka za pomocą odpowiedniej strategii.

10. Cena początkowa akcji wynosi 20 zł a oprocentowanie depozytu (kredytu) po 6 miesiącach wynosi $r = 5\%$. Wiemy, że akcja po 6 miesiącach może kosztować 25 zł z prawdopodobieństwem 1/3 i 18 zł z prawdopodobieństwem 2/3. Oblicz racjonalną ceną europejskiej opcji sprzedaży z momentem wygaśnięcia 6 miesięcy i ceną wykonania 22 zł, znajdując strategię zabezpieczającą. Opisz, jakie działania na początku i na końcu okresu musi podjąć wystawca opcji sprzedaży, aby zabezpieczyć wypłatę.

11. Cena początkowa akcji wynosi 170 zł a oprocentowanie depozytu (kredytu) po 4 miesiącach wynosi $r = 2\%$. Wiemy, że akcja po 4 miesiącach może kosztować 220 zł z prawdopodobieństwem 1/2 i 160 zł z prawdopodobieństwem 1/2. Oblicz racjonalną ceną europejskiej opcji kupna z momentem wygaśnięcia 4 miesiące i ceną wykonania 180 zł, znajdując strategię zabezpieczającą.

12. Cena początkowa akcji wynosi 70 zł a oprocentowanie depozytu (kredytu) po 3 miesiącach wynosi $r = 3\%$. Wiemy, że akcja po 3 miesiącach może kosztować 65 zł z prawdopodobieństwem 1/5 i 76 zł z prawdopodobieństwem 4/5. Oblicz racjonalną ceną europejskiej opcji kupna i europejskiej opcji sprzedaży z momentem wygaśnięcia 3 miesiące i ceną wykonania 73 zł, znajdując strategię zabezpieczającą.

13. Udowodnij, że na rynku bez możliwości arbitrażu cena racjonalna wypłaty nieujemnej jest nieujemna, czyli $\Pi_0(X) \geq 0$, gdy $X \geq 0$. Gdy ponadto $X \neq 0$, to $\Pi_0(X) > 0$.

14. Niech na rynku $\mathcal{M} = (B, S, \Phi)$ bez możliwości arbitrażu, H będzie procesem ceny arbitrażowej wypłaty X, czyli $H_0 = \Pi_0(X)$, $H_T = X$. Niech Φ_H oznacza klasę portfeli składających się z jednostek rachunku bankowego, akcji i jednostek instrumentu pochodnego o cenie H. Udowodnij, że rynek $\widetilde{\mathcal{M}} = (B, S, H, \Phi_H)$, czyli rynek $\mathcal{M}$ rozszerzony o instrument pochodny, jest rynkiem bez możliwości arbitrażu.

Wskazówki:

1. Załóż nie wprost, że na rynku rozszerzonym $\widetilde{\mathcal{M}}$ występuje arbitraż, czyli istnieje portfel $\widetilde{\varphi} \in \Phi_H$, $\widetilde{\varphi} = (\beta, \alpha, \gamma)$, taki że
$$1.\ V_0(\widetilde{\varphi}) = 0, \qquad 2.\ \underset{\omega\in\Omega}{\forall}\ V_T(\widetilde{\varphi})(\omega) \geq 0, \qquad 3.\ \underset{\omega\in\Omega}{\exists}\ V_T(\widetilde{\varphi})(\omega) > 0.$$
2. Ponieważ $H_T = X$ oraz $H_0 = \Pi_0(X)$, to istnieje portfel $\varphi \in \Phi$, $\varphi = (\beta_0, \alpha_0)$, taki że
$$1.\ V_0(\varphi) = \Pi_0(X) = H_0, \quad 2.\ V_T(\varphi) = X = H_T.$$

3. Ze wskazówek 1.1 i 2.1 otrzymujemy portfel $\varphi_1 = (\beta + \gamma\beta_0, \alpha + \gamma\lambda_0) \in \Phi$ i pokazujemy, że jest on możliwością arbitrażu na rynku $\mathcal{M}$, co daje sprzeczność z założeniem.

15. Załóżmy, ze akcja kosztująca 200 będzie za trzy miesiące miała cenę 150 lub 300, a stopa procentowa na depozyt trzymiesięczny jest równa 10%. Oblicz cenę europejskiej opcji sprzedaży z ceną wykonania 270 i terminem wykonania za trzy miesiące na dwa sposoby:

1. za pomocą portfela replikującego wypłatę P_T,
2. za pomocą miary martyngałowej: $P_0 = \mathbb{E}_{P^*}\left[\dfrac{P_T}{1+r}\right]$.

16. Udowodnij, że jeżeli istnieje portfel φ, taki że $V_0(\varphi) < 0$ oraz $V_T(\varphi) \geq 0$, to na rynku istnieje arbitraż.

Wskazówka: Pokaż, że portfel $\psi = (\beta - V_0(\varphi), \alpha)$ jest tym arbitrażem.

17. (*Prawo jednej ceny*) Udowodnij, ze na rynku jednookresowym dwustanowym bez możliwości arbitrażu dwa portfele mające tę samą wartość w chwili T muszą mieć tę samą wartość w chwili 0.

18. Udowodnij parytet kupna-sprzedaży $C_0 - P_0 = S_0 - \dfrac{K}{1+r}$, korzystając z

a) argumentów arbitrażowych,
b) prawa jednej ceny.

Rozwiązanie:

a) Załóżmy nie wprost, że $C_0 - P_0 > S_0 - \dfrac{K}{1+r}$. Wtedy strategia polegająca na kupnie akcji i opcji sprzedaży z ceną wykonania K i sprzedaniu opcji kupna z ceną wykonania K jest strategią arbitrażową. Wartość tej operacji (równej $C_0 - P_0 - S_0$) rozliczamy w banku (gdy jest ona dodatnia, to wkładamy tę sumę do banku, gdy ujemna, to pożyczamy ją z banku). W chwili T zawsze mamy zysk równy
$$K + (1+r)(C_0 - P_0 - S_0) > 0.$$
b) Portfel φ składający się z jednej akcji i pożyczki w wysokości $\dfrac{K}{1+r}$ i portfel ψ powstały w wyniku zakupu opcji kupna i sprzedaży opcji sprzedaży o tej samej cenie wykonania K mają w chwili T tę samą wartość $S_T - K$, więc muszą mieć tę samą wartość w chwili zero, co daje parytet.

19. Znajdź na rynku jednookresowym dwustanowym wzory ogólne na ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży przy założeniu $S^d \leq K \leq S^u$.

Wskazówka: Skorzystaj z Zadania 6.

20. Uzasadnij następujące ograniczenia na ceny opcji na rynku bez możliwości arbitrażu:

$$a)\quad \left(S_0 - \frac{K}{1+r}\right)^+ \leq C_0 \leq S_0,$$
$$b)\quad \left(\frac{K}{1+r} - S_0\right)^+ \leq P_0 \leq \frac{K}{1+r}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z parytetu kupna-sprzedaży i twierdzenia o monotoniczności ceny.

Rynki skończone

21. Na podstawie tabeli przedstawiającej możliwe ceny akcji po kolejnych okresach inwestycyjnych podaj filtrację $(\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, \ldots, T\})$.

ω_j	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
ω_1	$S_0=2$	$S_1=5$	$S_2=8$	$S_3=9$
ω_2	$S_0=2$	$S_1=5$	$S_2=7$	$S_3=8$
ω_3	$S_0=2$	$S_1=1$	$S_2=3$	$S_3=5$
ω_4	$S_0=2$	$S_1=1$	$S_2=6$	$S_3=5$
ω_5	$S_0=2$	$S_1=1$	$S_2=3$	$S_3=7$

22. Sprawdź, czy zmienne losowe X i Y są $\mathcal{F}$-mierzalne, jeżeli

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_8\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7\}\},$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 10, & \omega = \omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_8, \\ 20, & \omega = \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7, \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_8, \\ 5, & \omega = \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \end{cases}$$

Zmienna losowa X jest **$\mathcal{F}$-mierzalna**, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) = x\}$ jest elementem σ-ciała $\mathcal{F}$.

23. Udowodnij, że portfel stały jest strategią samofinansującą się.

24. Udowodnij

$$\varphi - \text{ samofinansujący się} \quad \iff \quad V_{t+1}(\varphi) - V_t(\varphi) = \varphi_{t+1}(S_{t+1} - S_t) \;\text{ dla każdego } t.$$

25. Udowodnij, że strategia φ polegająca na kupieniu za własne pieniądze i-tej akcji w chwili 0, sprzedaniu jej w ustalonej chwili czasu τ, $\tau < T$ i włożeniu uzyskanych pieniędzy do banku jest samofinansująca się.

26. Udowodnij, że na rynku istnieje możliwość arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje portfel samofinansujący się φ spełniający

$$P\left(V_T^*(\varphi) \geq V_0(\varphi)\right) = 1, \qquad P\left(V_T^*(\varphi) > V_0(\varphi)\right) > 0.$$

27. Udowodnij, że gdy istnieje strategia dominująca, tj. strategia φ spełniająca

$$V_0(\varphi) < 0, \qquad V_T(\varphi)(\omega) \geq 0 \;\text{ dla każdego } \omega,$$

to istnieje arbitraż.

Wskazówka: Zdefiniuj $\psi = (V_0(\varphi), 0, \ldots, 0)$ i pokaż, że $\xi = \varphi - \psi$ jest strategią arbitrażową.

28. *(Prawo jednej ceny)* Udowodnij, że na rynku bez możliwości arbitrażu portfele mające tę samą wartość w chwili T muszą mieć tę samą wartość w chwili 0 (czyli muszą mieć tę samą cenę).

Wskazówka: Załóż nie wprost, że $V_0(\varphi) < V_0(\psi)$ i pokaż, że $\xi = \varphi - \psi$ jest strategią dominującą.

29. Udowodnij, że gdy na rynku (S, Φ) bez możliwości arbitrażu S^0, S^1 są aktywami bez ryzyka (tzn. $S_t^0 = (1+r)^t$ oraz $S_t^1 = (1+r_1)^t$), to $S^0 = S^1$.

Wskazówka: Załóż nie wprost, że $r < r_1$ i pokaż, że istnieje arbitraż, np. $\varphi = (-1, 1, 0, \ldots, 0)$; podobnie dla $r > r_1$.

30. Rozpatrzmy rynek jednookresowy ($T = 1$) dwustanowy ze stopą procentową bez ryzyka 0% i z dwoma typami akcji o cenach

$$\begin{array}{lll} S_0^1 = 4, & S_1^1(\omega_1) = 5, & S_1^1(\omega_2) = 3, \\ S_0^2 = 6, & S_1^2(\omega_1) = 7, & S_1^2(\omega_2) = 5. \end{array}$$

1. Zbadaj, czy na tym rynku istnieje arbitraż.
2. Niech dane będą dwie strategie $\varphi = (5, 5, 0)$ i $\psi = (1, 3, 2)$. Sprawdź, czy strategie te mają tę samą wartość w chwili końcowej T. Czy strategie są samofinansujące się?

31. Rozpatrzmy rynek jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi. Inwestor uważa, że są one jednakowo prawdopodobne. Na rynku stopa procentowa bez ryzyka wynosi 20% i jest jedna akcja mająca proces cen

$$S_0 = 25, \quad S_1(\omega_1) = 20, \quad S_1(\omega_2) = 40, \quad S_1(\omega_3) = 35.$$

Czy wszystkie wypłaty są na tym rynku osiągalne?

32. Rozpatrzmy rynek jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi. Inwestor uważa, że są one jednakowo prawdopodobne. Na rynku stopa procentowa bez ryzyka wynosi 0% i są dwie akcje mające procesy cen

$$\begin{array}{llll} S_0^1 = 4, & S_1^1(\omega_1) = 8, & S_1^1(\omega_2) = 6, & S_1^1(\omega_3) = 3, \\ S_0^2 = 7, & S_1^2(\omega_1) = 10, & S_1^2(\omega_2) = 8, & S_1^2(\omega_3) = 4. \end{array}$$

Pokaż, że $\varphi = (10, 5, -5)$ jest strategią dominującą.

33. Rozpatrzmy rynek jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi. Na rynku stopa procentowa bez ryzyka wynosi 20% i jest jedna akcja mająca proces cen:

$$S_0^1 = 30, \quad S_1^1(\omega_1) = 20, \quad S_1^1(\omega_2) = 40, \quad S_1^1(\omega_3) = 35.$$

Zbadaj, czy na tym rynku istnieje arbitraż.

Wskazówka: Zbadaj, czy istnieje miara martyngałowa Q, tzn. q_1, q_2, q_3, takie że

$$\mathbb{E}_Q[S_1] = S_0(1 + r), \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1, \quad q_i > 0, \ i = 1, 2, 3.$$

34. Do rynku z poprzedniego zadania dodajemy jeszcze jedną akcję

$$S_0^2 = 30, \quad S_1^2(\omega_1) = 25, \quad S_1^2(\omega_2) = 50, \quad S_1^2(\omega_3) = 35.$$

Zbadaj, czy taki rynek jest bez arbitrażu.

35. Znajdź wszystkie miary martyngałowe i wypłaty osiągalne ewentualnie strategie arbitrażowe, gdy rynek jest jednookresowy z trzema możliwymi zdarzeniami losowymi i z aktywami opisanymi w następujący sposób:

1. Stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10% i na rynku jest jedna akcja opisana przez
$$S_0 = 20, \quad S_1(\omega_1) = 25, \quad S_1(\omega_2) = 40, \quad S_1(\omega_3) = 22.$$
2. Stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10% i na rynku są dwie akcje przyjmujące wartości:
$$\begin{array}{llll} S_0^1 = 2, & S_1^1(\omega_1) = 1, & S_1^1(\omega_2) = 3, & S_1^1(\omega_3) = 2, \\ S_0^2 = 5, & S_1^2(\omega_1) = 3, & S_1^2(\omega_2) = 6, & S_1^2(\omega_3) = 8. \end{array}$$

36. Załóżmy, ze rynek jednookresowy jest bezarbitrażowy. Udowodnij, że rynek jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba stanów Ω (czyli scenariuszy) jest równa liczbie liniowo niezależnych wektorów wśród wektorów $B_1, S_1^1, \dots, S_1^k$.

Wskazówka: Rozpatrz macierz

$$A = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1^1(\omega_1) & \dots & S_1^k(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^k(\omega_2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_1(\omega_d) & S_1^1(\omega_d) & \dots & S_1^k(\omega_d) \end{bmatrix}$$

oraz rozwiązania równania $A\varphi = x$ dla dowolnego x.

37. Zbadaj zupełność rynku z zadań 33 i 35.2, korzystając z zadania 36.

38. Tabela przedstawia możliwe ceny akcji po kolejnych okresach inwestycyjnych

ω_j	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
ω_1	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 9$
ω_2	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 6$
ω_3	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 6$
ω_4	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 3$

Załóżmy, że scenariusze są jednakowo prawdopodobne a stopa procentowa bez ryzyka jest równa 10%. Oblicz

1. $P(S_2 = 9|S_1 = 8)$,
2. $P(S_2 = 6|S_1 = 8)$,
3. $\mathbb{E}[S_2|S_1 = 8]$,
4. $\mathbb{E}[S_2|S_1 = 4]$,
5. $\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1]$.

Znajdź miarę martyngałową i oblicz ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży, gdy $K = 7$, $r = 10\%$.

Odp. 1. 0.5, 2. 0.5, 3. 7.5, 4. 4.5, 6. $P(\{\omega_1\}) = 0.35$, $P(\{\omega_2\}) = 0.025$, $P(\{\omega_3\}) = 0.292$, $P(\{\omega_4\}) = 0.333$, $C_0 = 0.58$, $P_0 = 1.36$.

39. Na rynku dwuokresowym ($T = 2$) o czterech możliwych scenariuszach stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10% i jest jedna akcja, której ceny są opisane przez proces S:

$$S_0 = 100, \quad S_1(\omega_1) = S_1(\omega_2) = 120, \quad S_1(\omega_3) = S_1(\omega_4) = 80,$$
$$S_2(\omega_1) = 140, \quad S_2(\omega_2) = S_2(\omega_3) = 100, \quad S_2(\omega_4) = 60.$$

Znajdź ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży z ceną wykonania $K = 105$.

Odp. $P(\{\omega_1\}) = 0.6$, $P(\{\omega_2\}) = 0.15$, $P(\{\omega_3\}) = 0.175$, $P(\{\omega_4\}) = 0.075$, $C_0 = 17.36$, $P_0 = 4.13$.

Model Coxa-Rossa-Rubinsteina

40. Niech w modelu CRR: $S_0 = 100$, $S_1 = 80$, $S_1 = 130$, $T = 2$, $r = 0.1$.
Wyceń europejskie opcje kupna i sprzedaży z ceną wykonania 90.

Odp: $C_0 = 29.06$, $P_0 = 3.44$.

41. Znajdź wzór na cenę arbitrażową europejskiej opcji sprzedaży w modelu CRR.

42. Niech w modelu CRR: $S_0 = 100$, $S_1 = 120$, $S_1 = 90$, $T = 3$, $r = 0.05$.
Wyceń opcję europejską o wypłacie $X = 100(R_T - 0.1)^+$, gdzie $R_T = \frac{S_T - S_0}{S_0}$ jest stopą zwrotu z akcji w czasie od 0 do T.

Odp: $\Pi_0(X) = 13.13$.

43. Udowodnij, że portfel replikujący wypłatę postaci $X = h(S_T)$ w chwili t ma postać

$$\varphi_t^1 = \frac{f(t, S_{t-1}(1+b)) - f(t, S_{t-1}(1+a))}{S_{t-1}(b-a)},$$
$$\varphi_t^0 = \frac{(1+b)f(t, S_{t-1}(1+a)) - (1+a)f(t, S_{t-1}(1+b))}{(b-a)(1+r)^t}.$$

Wskazówki:

1. W chwili t musi zachodzić $(1+r)^{t-T}\,\mathbb{E}[h(S_T)|\mathcal{F}_t] = V_t(\varphi) = \varphi_t^0(1+r)^t + \varphi_t^1 S_t$.
2. $S_T = S_t Z_t$, $Z_t = \Pi_{j=t+1}^T U_j$, a zatem $V_t(\varphi) = (1+r)^{t-T}\,\mathbb{E}[h(xZ_t)]\big|_{x=S_t} = f(t, S_t)$.
3. Z 1. i 2. mamy: $\varphi_t^1 S_{t-1} U_t = f(t, S_{t-1}U_t) - (1+r)^t \varphi_t^0$ oraz U_t przyjmuje wartości $1+a$ i $1+b$. Stąd wyznaczamy φ_t^1 i φ_t^0.

44. Niech w modelu CRR: $S_0 = 100$, $u = 1+b = 1.2$, $d = 1+a = 0.7$, $T = 2$.

1. Dla jakich wartości stopy procentowej r model jest wolny od arbitrażu? Wyznacz dla tych wartości miarę martyngałową.
2. Niech $r = 10\%$. Znajdź cenę arbitrażową europejskich wypłat:

$$X = (\min(S_1, S_2) - 90)^+, \qquad Y = (S_2 - S_1 - 10)^+.$$

Odp: 1. $r \in (0, 0.2)$, $p = 2r + 0.6$ 2. $p = 0.8$, $\Pi_0(X) = 15.87$, $\Pi_0(Y) = 7.93$.

45. Niech w modelu CRR: $S_0 = 80$, $u = 1.3$, $T = 3$, $r = 0.2$.

1. Dla jakich d model jest wolny od arbitrażu?
2. Niech $d = 1.1\%$. Znajdź cenę arbitrażową opcji europejskiej o wypłacie $X = \left(\frac{S_0+S_1+S_2}{3} - 85\right)^+$. Znajdź strategię replikującą.

Odp: 1. $d \in (0, 1.2)$ 2. $p = 0.5$, $\Pi_0(X) = 8.38$.

46. Udowodnij, że w modelu CRR cena wypłaty postaci $X = g(S_T)$, gdzie $g \in C^2$, $g(0) = 0$ jest równa

$$\Pi_0(X) = S_0 g^{'}(0) + \int_0^{\infty} C_0(y) g^{''}(y) dy,$$

gdzie $C_0(y)$ jest ceną arbitrażową w chwili 0 europejskiej opcji kupna akcji o cenie S z terminem wykonania T i z ceną wykonania y.

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru Taylora z resztą w postaci całkowej:

$$g(x) = g(0) + g^{'}(0)x + \int_0^{\infty} (x-y)^+ g^{''}(y) dy.$$

Opcje amerykańskie

47. Tabela przedstawia ceny akcji po kolejnych okresach inwestycyjnych (patrz Zadanie 38)

ω_j	$t=0$	$t=1$	$t=2$
ω_1	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 9$
ω_2	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 6$
ω_3	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 6$
ω_4	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 3$

Niech $Y_t = (S_t - 5)^+$, $r = 0$. Wtedy $P^* = (1/6, 1/12, 1/4, 1/2)$.

1. Oblicz cenę amerykańskiej opcji kupna dla $t = 0, 1, 2$: U_0, U_1, U_2.
2. Znajdź optymalny moment wykonania opcji.

48. Niech stopa procentowa bez ryzyka wynosi 10%, a ceny akcji są opisane przez proces S (patrz Zadanie 39):

$$S_0 = 100, \quad S_1(\omega_1) = S_1(\omega_2) = 120, \quad S_1(\omega_3) = S_1(\omega_4) = 80,$$
$$S_2(\omega_1) = 140, \quad S_2(\omega_2) = S_2(\omega_3) = 100, \quad S_2(\omega_4) = 60.$$

1. Znajdź ceny amerykańskich opcji kupna i sprzedaży z ceną wykonania $K = 105$.
2. Znajdź optymalny moment wykonania opcji.

49. Bank ma amerykańska opcję sprzedaży akcji z ceną realizacji 60 i datą wygaśnięcia za 3/4 roku. Akcja warta jest teraz 6, a stopa procentowa bez ryzyka (kapitalizacja ciągła) wynosi 18% w skali roku. Czy warto opcję zrealizować teraz, czy w chwili wygaśnięcia?

50. Mówimy, że opcja amerykańska $(Z_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest zawsze realizowalna, gdy dla dowolnego momentu stopu τ o wartościach mniejszych lub równych T istnieje strategia $\varphi \in \Phi$ taka, że $V_\tau(\varphi) = Z_\tau$. Udowodnij, że na rynku zupełnym każda opcja amerykańska jest zawsze realizowalna.

51. Niech w modelu CRR: $S_0 = 100$, $S_1^d = 80$, $S_1^u = 130$, $T = 3$, $r = 0.1$. Znajdź cenę w chwili 0 opcji amerykańskiej o wypłacie $Z_t = \max_{0\le j\le t} S_j$ (tzw. opcja rosyjska). Znajdź moment wykonania opcji.

Model Blacka-Scholesa

52. Udowodnij, że proces $S_t = S_0 \exp(at + \sigma W_t)$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, spełnia

1. $\forall_{t\ge 0}\ S_t > 0$, S_0 - stała,
2. $\forall_{t,h\ge 0}\ \dfrac{S_{t+h}}{S_t}$ jest niezależne od $\sigma(S_u:\ u \le t)$,
3. $\forall_{t,h\ge 0}\ \dfrac{S_{t+h}}{S_t} \sim \dfrac{S_h}{S_0}$,
4. S_t ma ciągłe trajektorie.

Niech
$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

53. Pokaż, że proces S_t spełnia
$$\lim_{u\to t^-} \frac{1}{t-u}\mathbb{E}\left[\frac{S_t - S_u}{S_u}\right] = \mu, \qquad \lim_{u\to t^-} \frac{1}{t-u}\mathrm{Var}\left[\frac{S_t - S_u}{S_u}\right] = \sigma^2.$$

Wskazówka: Jeżeli $X \sim N(m, s^2)$, $Y = e^X$, to $\mathbb{E}[Y] = e^{m+\frac{1}{2}s^2}$, $\mathrm{Var}[Y] = e^{2m+s^2}(e^{s^2} - 1)$.

54. Pokaż, że średnia wartość ceny rośnie ze stopą równą μ, czyli $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{t\mu}$. Stąd wynika, że gdy średnia stopa zwrotu z akcji ma być taka sama jak dla papierów bez ryzyka, to $\mu = r$.

55. Pokaż, że
$$\mathbb{E}[\ln S_t] = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \qquad \mathrm{Var}[\ln S_t] = \sigma^2 t.$$

56. Rozważmy akcję z ceną początkową 40, oczekiwanym zwrotem 16% rocznie, współczynnikiem zmienności 20% rocznie. Znajdź

1. 95% przedział ufności dla ceny akcji za trzy miesiące. *Odp:* (33.78, 50.4)
2. średnią cenę akcji za trzy miesiące. *Odp:* 41.63

Wskazówka: 95% przedział ufności dla zmiennej o rozkładzie $N(m, s^2)$ ma postać $(m - 2s,\ m + 2s)$.

57. Pokaż, że jedynym rozwiązaniem

1. $dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1$ jest $B_t = e^{rt}$,
2. $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ jest $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$.

Wskazówka: Rozwiązaniem równania $dX_t = X_t dY_t$ jest $X_t = X_0 e^{Y_t - Y_0 - \frac{1}{2}[Y,Y]_t}$.

58. Udowodnij, że strategia "kup i trzymaj aktywo" (*buy-and-hold*), czyli
$$\varphi_t^0 \equiv 0, \quad \varphi_t^1 \equiv a > 0$$
jest strategią samofinansującą się.

59. Udowodnij, że strategia
$$\varphi_t^0 = \frac{S_t}{B_t}, \quad \varphi_t^1 \equiv 0$$
ma portfel bogactwa równy $V_t(\varphi) = S_t$ (taki sam jak strategia "kup i trzymaj" dla $a = 1$), ale nie jest strategią samofinansującą się.

60. Czy na klasycznym rynku Blacka-Scholesa cena opcji kupna równa 40 i opcji sprzedaży równa 30 o terminie zapadalności 1 rok z ceną wykonania 38 przy obecnej cenie waloru 45 i stopie procentowej bez ryzyka 10% stwarzają możliwość arbitrażu?

Wskazówka: Sprawdź, czy zachodzi parytet kupna-sprzedaży.

61. Zbadaj zachowanie ceny europejskiej opcji kupna, gdy $\sigma \to 0$.

62. Udowodnij *Wniosek 43*, dający cenę europejskiej opcji sprzedaży.

63. Udowodnij, że cena europejskiej opcji

1. kupna,
2. sprzedaży

jest funkcją wypukłą i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja początkowej ceny akcji S_0.

Wskazówka (call-wypukłość): Pokaż, że druga pochodna jest dodatnia:

1. $S_0 N'(d_1(T, S_0)) - Ke^{-rT} N'(d_2(T, S_0)) = 0$.
2. $\dfrac{\partial C_0}{\partial S_0} = N(d_1(T, S_0))$.
3. $\dfrac{\partial^2 C_0}{\partial S_0^2} = N'(d_1(T, S_0)) \dfrac{1}{S_0 \sigma \sqrt{T}} > 0$.

Wskazówka (Lipschitz): Skorzystaj z Twierdzenia o wartości średniej.

64. Udowodnij, że wypłata europejskiej opcji kupna $f(x) = (S_T - x)^+$ jest funkcją wypukłą i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja ceny wykonania K.

Wskazówka (wypukłość):

Funkcja mierzalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ spełniająca $\forall_{x,y \in (a,b)}\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$ jest wypukła.

Pokaż, że

1. $\forall_{K>0} \forall_{\sigma>0}\ \ C_0(K) < \frac{C_0(K - \sigma) + C_0(K + \sigma)}{2}$.
2. W tym celu załóż przeciwnie: $\Pi_0 := C_0(K - \sigma) + C_0(K + \sigma) - 2C_0(K) \leq 0$.
3. Wykaż, że $\Pi_T = (S_T - (K - \sigma))^+ + (S_T - (K + \sigma))^+ - 2(S_T - K)^+ \geq 0$, co daje arbitraż, sprzeczność.

65. Udowodnij, że cena europejskiej opcji sprzedaży jest funkcją wypukłą i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja ceny wykonania K.

Równanie Blacka-Scholesa

66. Udowodnij, że w modelu Blacka-Scholesa funkcja C zadająca proces ceny opcji kupna $C_t = C(t, S_t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego (*równania Blacka-Scholesa*)

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x) + rx\frac{\partial C}{\partial x}(t, x) - rC(t, x) = 0, \quad x > 0,\ t \in (0, T)$$

z warunkiem końcowym $C(T, x) = (x - K)^+$ dla $x \geq 0$
i warunkiem brzegowym $C(t, 0) = 0$ dla $t \in [0, T]$, bo wypłata zerowa nic nie kosztuje.

Wskazówka:

1. Rozważmy portfel złożony z jednej opcji kupna *call* (długa pozycja) i α akcji (krótka pozycja). Wtedy portfel ma wartość $\Pi = C - \alpha S$. Oblicz $d\Pi$.
2. Przyjmij $\alpha = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S)$, aby wyeliminować ryzyko z portfela.
3. Rynek Blacka-Scholesa jest bez arbitrażu. Zatem jeżeli portfel jest deterministyczny, to jego wartość musi rosnąć w czasie zgodnie ze stopą procentową bez ryzyka r: $d\Pi = r\Pi dt$.

67. Sprawdź, że cena europejskiej opcji kupna spełnia równanie Blacka-Scholesa.

68. Pokaż, że funkcja może być ceną instrumentu pochodnego na rynku Blacka-Scholesa.

1. S
2. S^{-2r/σ^2}
3. $e^{(r+\sigma^2)(T-t)}S^2$

Analiza wrażliwości

69. Udowodnij, że cena opcji kupna C_0 w chwili $t = 0$ jest

1. rosnąca jako funkcja zmiennej S_0 - bieżącej ceny akcji.
2. malejąca jako funkcja zmiennej K - ceny wykonania.
3. rosnąca jako funkcja czasu pozostałego do realizacji opcji.
4. rosnąca jako funkcja zmiennej σ - współczynnika zmienności.
5. rosnąca jako funkcja zmiennej r - stopy procentowej bez ryzyka.