

Ubezpieczenia majątkowe

Zad. 1. Dany jest rozkład zmiennej losowej X

$X = x_i$	-1	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	1/8	1/4	c

1. Wyznacz wartość stałej c .
2. Oblicz $P(X \in (0, 2])$.
3. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X .
4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X .

Zad. 2. Oblicz medianę zmiennej losowej X o dystrybuancie

$$1. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 0.1 & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 0.2 & \text{dla } x \in [1, 2), \\ 0.6 & \text{dla } x \in [2, 3), \\ 1 & \text{dla } x \geq 3. \end{cases} \quad 2. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 0.1 & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 0.2 & \text{dla } x \in [1, 2), \\ 0.5 & \text{dla } x \in [2, 3), \\ 1 & \text{dla } x \geq 3. \end{cases}$$

Niech $p \in (0, 1)$. Kwantyl rzędu p zmiennej losowej X o dystrybuancie F to dowolna liczba q_p , taka że $F(x) \leq p$ dla $x < q_p$ oraz $F(x) \geq p$ dla $x \geq q_p$.

Zad. 3. Dana jest gęstość zmiennej losowej X

$$f(x) = \begin{cases} c(x+2), & x \in (1, 5) \\ 0, & x \notin (1, 5) \end{cases}$$

1. Wyznacz wartość stałej c .
2. Oblicz i zaznacz na wykresie gęstości $P(X \in (2, 4))$.
3. Wyznacz dystrybuantę F .
4. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X .

Zad. 4. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{16}(x-1)^2, & 1 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Oblicz i zaznacz na wykresie dystrybuanty $P(X \in (2, 4))$.

Zad. 5. Niech zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Oblicz kwantyl rzędu 0.375.

Zad. 6. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej $X = IB$, jeśli prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi 0.1, a zmienna losowa wysokości szkody B przyjmuje wartość 5 z prawdopodobieństwem 1.

Zad. 7. Zmienna losowa wysokości szkody B ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 20]$, $X = IB$. Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi 0.02.

1. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej B .
2. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej I .
3. Wyznacz wartość oczekiwaną wysokości wypłaty X .
4. Wyznacz odchylenie standardowe i współczynnik zmienności wysokości wypłaty.

Zad. 8. Dwa niezależne ryzyka mają rozmiary szkód podane w tabeli

i	2	3	5
$P(X_1 = i)$	3/8	3/8	2/8

i	0	1
$P(X_2 = i)$	2/5	3/5

Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + X_2$.

Zad. 9. Trzy niezależne ryzyka mają rozmiary szkód podane w tabeli

i	0	1	2	3
$P(X_1 = i)$	0.3	0.2	0.4	0.1
$P(X_2 = i)$	0.6	0.1	0.3	0
$P(X_3 = i)$	0.4	0.2	0	0.4

Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + X_2 + X_3$.

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{S_2}(s)$	0.18	0.15	0.35	0.16	0.13	0.03	–	–	–
$f_S(s)$	0.072	0.096	0.170	0.206	0.144	0.178	0.070	0.052	0.012

Zad. 10. Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + X_2 + X_3$, jeżeli niezależne ryzyka mają rozmiary szkód podane w tabeli.

s	0	1	2	3	4	5
$f_1(s)$	0.4	0.3	0.2	0.1	0	0
$f_2(s)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.1	0
$f_3(s)$	0.6	0	0.1	0.1	0.1	0.1

s	$f_1(s)$	$f_2(s)$	$f_3(s)$	$f^{(2)}(s)$	$f^{(3)}(s)$	$F_1(s)$	$F^{(2)}(s)$	$F^{(2)}(s)$
0	0.4	0.5	0.6	0.20	0.120	0.4	0.20	0.120
1	0.3	0.2	0.0	0.23	0.138	0.7	0.43	0.258
2	0.2	0.1	0.1	0.20	0.140	0.9	0.63	0.398
3	0.1	0.1	0.1	0.16	0.139	1.0	0.79	0.537
4		0.1	0.1	0.11	0.129	1.0	0.90	0.666
5			0.1	0.06	0.115	1.0	0.96	0.781
6				0.03	0.088	1.0	0.99	0.869
7				0.01	0.059	1.0	1.00	0.928
8					0.036	1.0	1.00	0.964
9					0.021	1.0	1.00	0.985
10					0.010	1.0	1.00	0.995
11					0.004	1.0	1.00	0.999
12					0.001	1.0	1.00	1.000

Zad. 11. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $S = X + Y$, gdzie X, Y - niezależne zmienne losowe o rozkładach jednostajnych: $X \sim U([0, 3]), Y \sim U([0, 4])$.

Zad. 12. Wyznacz gęstość zmiennej losowej $S = X_1 + X_2 + X_3$, gdzie X_1, X_2, X_3 - niezależne zmienne losowe o rozkładach wykładniczych: $X_1 \sim E(1), X_2 \sim E(2), X_3 \sim E(3)$.

$f_S(x) = 3e^{-x} - 6e^{-2x} + 3e^{-3x}, x > 0.$

Zad. 13. Pokaż, że suma dwóch niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ ma rozkład $N(0, 2)$.

$Wskazówka: y^2 - by + c = (y - \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c.$

Zad. 14. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $S = X + Y$, gdzie X, Y - niezależne zmienne losowe o dystrybuantach

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 0.6 + 0.2x & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases} \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 0.5 + 0.3x & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

Zad. 15. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $S = X_1 + X_2 + X_3$, gdzie X_1, X_2, X_3 - niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{Odp.: } F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s < 0, \\ \frac{1}{6}s^3 & \text{dla } s \in [0, 1), \\ \frac{1}{6}(s^3 - 3(s-1)^3) & \text{dla } s \in [1, 2), \\ \frac{1}{6}(s^3 - 3(s-1)^3 + 3(s-2)^3) & \text{dla } s \in [2, 3), \\ 1 & \text{dla } s \geq 3. \end{cases}$$

Zad. 16. Wyznacz gęstość sumy niezależnych zmiennych losowych X i Y o gęstościach

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases} \quad f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

$$\text{Odp.: } f_S(s) = \begin{cases} e^{-2s}(e^{2\min\{s,1\}} - 1) & \text{dla } s \geq 0, \\ 0 & \text{dla } s < 0. \end{cases}$$