Wstęp do równań różniczkowych stochastycznych

Zad. 1. Niech W_t będzie ruchem Browna. Znajdź rozkład zmiennej losowej

1. $X = 4W_2 - W_4 + W_6$
2. $X = 3W_5 - W_3 - 2W_9$.

Zad. 2. Oblicz funkcję wartości oczekiwanej i wariancji procesów:

1. $X_t = at + W_t, \quad t \geq 0, \ \ a > 0$
2. $X_t = At + W_t, \quad t \geq 0, \ \ A$ - zmienna losowa niezależna od W_t o rozkładzie $N(m, s^2)$.

Zad. 3. Sprawdź, czy $2W_t - W_s$ i $W_t - 2W_s$ są niezależne od $W_s - W_r$, gdy $0 \leq r < s < t$.

Zad. 4. Pokaż, że $\mathbb{E}[W_s W_t] = \min\{s, t\}$.

Zad. 5. Oblicz $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2]$, gdy $0 \leq s < t$.

Zad. 6. Niech W_t będzie ruchem Browna. Pokaż, że podane procesy stochastyczne są również ruchami Browna.

1. $X_t = -W_t, \quad t \geq 0$
2. $X_t = W_{t+h} - W_h, \quad t \geq 0, \ h > 0$ – ustalone.
3. $X_t = aW_{t/a^2}, \quad t \geq 0, \ a > 0$ – ustalone.

Zad. 7. Niech W_t i B_t będą niezależnymi ruchami Browna. Pokaż, że

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_t + B_t \right), \quad t \geq 0$$

jest również ruchem Browna.

Zad. 8. Oblicz funkcję korelacji procesów:

1. $W_t, \quad t \geq 0$
2. $X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0$
3. $X_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}, \quad t \geq 0, \quad h > 0$ - ustalone
4. $X_t = W_t - tW_1, \quad t \in [0, 1]$
5. $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}, \quad t \geq 0.$ *Wskazówka*: Jeżeli $X \sim N(m, s^2)$, to $\mathbb{E}\left[e^X\right] = e^{m + \frac{s^2}{2}}$.

Zad. 9. Oblicz korelację procesów W_t i X_t z zadania 7.

Zad. 10. Pokaż, że podane procesy stochastyczne są martyngałami względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, gdzie $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$.

1. $W_t, \quad t \geq 0$
2. $W_t^2 - t, \quad t \geq 0$
3. $W_t^3 - 3tW_t, \quad t \geq 0$
4. $W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2, \quad t \geq 0$
5. $e^{\theta W_t - \frac{\theta^2}{2} t}, \quad \theta$ - ustalone.

Wskazówka: Jeżeli $X \sim N(0, \sigma^2)$, to $\mathbb{E}[X^p] = 0$, p-nieparzyste; $\mathbb{E}[X^p] = \sigma^p (p-1)!!$, p-parzyste.