Niech $\pi_n$: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Dla procesów prostych adaptowanych

$$X_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1} \mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \qquad \xi_0 - \text{stała},\ \xi_i \text{ jest } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mierzalny},\ E[\xi_i^2] < \infty$$

**całkę Itô** definiujemy wzorem $\displaystyle\int_0^T X_t dW_t = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}\left[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right].$

Dla procesów $X_t$ ciągłych, adaptowanych, spełniających $\displaystyle\int_0^T \mathbb{E}[X_t^2]dt < \infty$ określamy

$$\int_0^T X_t dW_t = \lim_{\pi_n} \sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}\left[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right].$$

**Zad. 11.** Oblicz całkę Itô procesu $X_t$, jej wartość oczekiwaną i wariancję dla

1. $X_t = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & 1 < t \le 2 \\ 2, & 2 < t \le 3 \end{cases}$

2. $X_t = \begin{cases} 3, & 0 \le t \le 2 \\ -1, & 2 < t \le 5 \\ 4, & 5 < t \le 6 \end{cases}$

**Zad. 12.** Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\displaystyle\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T.$

Wskazówka 1: Zdefiniuj

$$X_t = W_{t_0} \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}} \mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \quad t_i = \frac{iT}{n}.$$

Wykaż $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |W_t - X_t|^2\, dt\right] = 0.$

Wskazówka 2: $a(b-a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 - (b-a)^2]$, $a = W_{t_{i-1}}$, $b = W_{t_i}$.

Wskazówka 3: Wariacja kwadratowa ruchu Browna $\displaystyle[W]_t := \lim_{\pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^2 = t.$

**Zad. 13.** Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\displaystyle\int_0^T t dW_t = TW_T - \int_0^T W_t dt.$

Wskazówka 1: Zdefiniuj

$$X_t = t_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} t_{i-1} \mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \quad t_i = \frac{iT}{n}.$$

Wykaż $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t - t|^2\, dt\right] = 0.$

Wskazówka 2: $c(b-a) = (db - ca) - b(d-c)$, $a = W_{t_{i-1}}$, $b = W_{t_i}$, $c = t_{i-1}$, $d = t_i$.

Wskazówka 3: $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^2 \le n\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2.$

Wskazówka 4: Nierówność Schwarza: $\displaystyle\left(\int_0^T X_t Y_t dt\right)^2 \le \int_0^T X_t^2 dt \int_0^T Y_t^2 dt.$

**Zad. 14.** Pokaż, że całka Itô nie ma własności monotoniczności.

Wskazówka: Dla $X_t = 0$, $Y_t = 1$ pokaż $\displaystyle P\left(\int_0^1 X_t dW_t < \int_0^1 Y_t dW_t\right) \neq 1.$