

**Zad. 15.** Oblicz pierwszy i drugi moment procesów

1.  $\int_0^1 t dW_t$                       2.  $\int_0^1 W_t dW_t$                       3.  $\int_0^1 e^{W_t} dW_t$ .

**Zad. 16.** Niech  $X_t, Y_t$  - procesy adaptowane, takie że  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T X_t^2 dt \right] < \infty$ ,  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T Y_t^2 dt \right] < \infty$ .

Wykaż

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T X_t dW_t \int_0^T Y_t dW_t \right] = \int_0^T \mathbb{E}[X_t Y_t] dt.$$

**Zad. 17.** Stosując Lemat Itô, oblicz różniczkę stochastyczną procesów:

1.  $Y_t = W_t^2$     5.  $Y_t = \arctg(W_t)$   
2.  $Y_t = \frac{1}{3} W_t^3$     6.  $Y_t = \frac{1}{1+W_t^2}$   
3.  $Y_t = e^{W_t}$     7.  $Y_t = \frac{W_t}{1+W_t^2}$   
4.  $Y_t = \cos(W_t)$

**Zad. 18.** Stosując Lemat Itô, oblicz różniczkę stochastyczną procesów:

1.  $Y_t = X_t^3$  dla  $X_t = 2t + W_t$   
2.  $Y_t = e^{X_t}$  dla  $X_t = t + 3 \int_0^t s dW_s$

**Zad. 19.** Niech  $X_t$  będzie procesem Itô. Zastosuj wzór Itô do  $X_t^2$  a następnie wyznacz stąd wariację kwadratową.

**Zad. 20.** Zastosuj Lemat Itô do funkcji:

1.  $f(t, W_t) = 2 + t + e^{W_t}$     4.  $f(t, W_t) = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$   
2.  $f(t, W_t) = W_t^2 - t$   
3.  $f(t, W_t) = tW_t$     5.  $f(t, W_t) = e^{\frac{1}{2}t} \sin(W_t)$

**Zad. 21.** Zastosuj Lemat Itô do funkcji:

1.  $f(t, X_t) = X_t^2 - t$  dla  $X_t = 5t + W_t$   
2.  $f(t, X_t) = tX_t^2$  dla  $X_t = \int_0^t s dW_s$

**Zad. 22.** Oblicz:

1.  $[e^W, W]_t$     3.  $[X, X]_t$  dla  $X_t = tW_t$ .  
2.  $[W^2, W]_t$     4.  $[X, X]_t$  dla  $X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$ .

**Zad. 23.** Niech  $X_t = 1 - t$  oraz  $Y_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$ . Oblicz  $d(X_t Y_t)$ .

**Zad. 24.** Niech  $X_t = tW_t$  oraz  $Y_t = e^{W_t}$ . Oblicz  $d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)$ .