Zad. 25. Oblicz różniczkę stochastyczną procesów

1. $Y_t = (W_t^{(1)})^2 + (W_t^{(2)})^2$, gdzie $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ jest dwuwymiarowym ruchem Browna.
2. $Y_t = \left(W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + W_t^{(3)}, (W_t^{(2)})^2 - W_t^{(1)} W_t^{(3)}\right)$, gdzie $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ jest trójwymiarowym ruchem Browna.

Zad. 26. Niech c, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą stałymi, $W_t = (W_t^{(1)}, \ldots W_t^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ - wielowymiarowym ruchem Browna. Definiujemy

$$X_t = \exp\left(ct + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j W_t^{(j)}\right).$$

Pokaż, że

$$dX_t = \left(c + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right) X_t dt + X_t \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j dW_t^{(j)}\right).$$

Zad. 27. Niech $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ spełnia

$$\begin{aligned} dX_t^{(1)} &= \mu_t^{(1)} dt + \sigma_t^{(1,1)} dW_t^{(1)} \\ dX_t^{(2)} &= \mu_t^{(2)} dt + \sigma_t^{(2,1)} dW_t^{(1)} + \sigma_t^{(2,2)} dW_t^{(2)}. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru Itô, oblicz $d(X_t^{(1)} X_t^{(2)})$.

Zad. 28. Wyprowadź wzór na całkowanie przez części

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X, Y]_t$$

1. z definicji kwadratowej kowariacji
2. ze wzoru Itô dla funkcji $f(x, y) = xy$.

Zad. 29. Niech

$$\beta_k(t) = \mathbb{E}[W_t^k], \quad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

Korzystając ze wzoru Itô, udowodnij:

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t \beta_{k-2}(s) ds, \quad k \geq 2.$$

Oblicz $\mathbb{E}[W_t^4]$ i $\mathbb{E}[W_t^6]$.

Zad. 30. Oblicz stochastyczny eksponent ruchu Browna.

Zad. 31. Rozwiąż równania

1. $dX_t = (1 + X_t^2) dt, \quad X_0 = 0$
2. $dX_t = (aX_t + b) dt, \quad X_0 = c$
3. $dX_t = X_t dW_t, \quad X_0 = 2$
4. $dX_t = 7X_t dW_t, \quad X_0 = 1$
5. $dX_t = X_t dt + 2X_t dW_t, \quad X_0 = 3$
6. $dX_t = -3X_t dt + \frac{1}{3} X_t dW_t, \quad X_0 = 2$
7. $dX_t = X_t dY_t, \quad Y_t = t + 2W_t, \quad X_0 = 1$