

Zad. 32. Rozwiąż równanie

$$dX_t = X_t dt + dW_t.$$

Wskazówka: Pomnóż obie strony równania przez czynnik całkujący e^{-t} i porównaj z $d(e^{-t}X_t)$.

Zad. 33. Rozwiąż równanie

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Zad. 34. Rozwiąż równanie

$$dX_t = r dt + \alpha X_t dW_t, \quad r, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Wskazówka: Pomnóż obie strony równania przez czynnik całkujący $F_t = \exp(-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t)$.

Zad. 35. Pokaż, że rozwiązaniem ogólnego równania liniowego

$$dX_t = (\alpha_t + \beta_t X_t) dt + (\gamma_t + \delta_t X_t) dW_t$$

jest

$$\begin{aligned} X_t &= U_t \left(X_0 + \int_0^t \frac{\alpha_s - \delta_s \gamma_s}{U_s} ds + \int_0^t \frac{\gamma_s}{U_s} dW_s \right), \\ U_t &= U_0 \exp \left(\int_0^t (\beta_s - \frac{1}{2} \delta_s^2) ds + \int_0^t \delta_s dW_s \right). \end{aligned}$$

Wskazówka:

1. Najpierw znajdź rozwiązanie równania w przypadku, gdy $\alpha_t = 0$ i $\gamma_t = 0$.
2. W przypadku ogólnym rozwiązania szukamy w postaci: $X_t = U_t V_t$, gdzie

$$\begin{aligned} dU_t &= \beta_t U_t dt + \delta_t U_t dW_t, \quad U_0 = 1 \\ dV_t &= a_t dt + b_t dW_t, \quad V_0 = X_0. \end{aligned}$$

Zad. 36. Korzystając z poprzedniego zadania, rozwiąż równania

1. $dX_t = (8 - X_t)dt + 3dW_t, \quad X_0 = -5$
2. $dX_t = (2X_t - 5)dt - dW_t \quad X_0 = 1$