Zad. 37. Oblicz stochastyczny logarytm procesu

1. $U_t = e^{W_t}$
2. $U_t = W_t^2 + 1$

Zad. 38. Pokaż, że istnieje jednoznacznie wyznaczone rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} dX_t &= \ln(1 + X_t^2)dt + \mathbf{1}_{\{X_t > 0\}} X_t dW_t, \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zad. 39. Niech X_t będzie jednoznacznie wyznaczonym rozwiązaniem równania

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X_0 &= Z, \end{aligned}$$

gdzie

1. $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|)$ dla pewnej stałej $C > 0$,
2. $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x-y|$ dla pewnej stałej $L > 0$,
3. Z jest zmienną losową niezależną od ruchu Browna oraz $\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$.

Pokaż, że dla $t \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}\left[|X_t^2|\right] \leq K_1 e^{K_2 t}, \quad K_1 = 3\,\mathbb{E}\left[|Z^2|\right] + 6C^2 T(T+1), \quad K_2 = 6C^2(T+1).$$

Wskazówka 1: $(p+q)^2 \leq 2p^2 + 2q^2, \quad (p+q+r)^2 \leq 3p^2 + 3q^2 + 3r^2, \quad a^2 + b^2 \leq (|a| + |b|)^2.$
Wskazówka 2: (*Nierówność Gronwalla*)
Niech funkcje $f = f(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$ będą nieujemne oraz dla każdego $t \in [0,T]$

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t h(s)f(s)ds.$$

Wtedy

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t h(s)g(s)e^{\int_s^t h(u)du}ds.$$

Zad. 40. Pokaż, że równanie Tanaki

$$dX_t = \operatorname{sign}(X_t)dW_t, \quad X_0 = 0, \quad \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ma słabe rozwiązanie (jest nim ruch Browna).

Zad. 41. Pokaż, że ruch Browna ma własność Markowa.
Wskazówka: Wystarczy pokazać: $\mathbb{E}\left[e^{uW_{t+s}}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[e^{uW_{t+s}}|W_t\right]$.

Zad. 42. Niech X_t będzie rozwiązaniem równania

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned}$$

gdzie $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$. Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa przejścia procesu X_t.