Zad. 43. Wykaż, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia dla ruchu Browna

$$p(t,y,s,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-(y-x)^2}{2(t-s)}\right)$$

spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa

$$p(t,y,s,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,y,\tau,z)p(\tau,z,s,x)dz.$$

Wskazówka 1:

$$-\frac{(z-x)^2}{2(\tau-s)} - \frac{(y-z)^2}{2(t-\tau)} = -\left(\frac{1}{2(\tau-s)} + \frac{1}{2(t-\tau)}\right)(z-x)^2 + \frac{y-x}{t-\tau}(z-x) - \frac{(y-x)^2}{2(t-\tau)}.$$

Wskazówka 2:

$$ax^2 - bx + c = \left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Wskazówka 3:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Zad. 44. Wykaż, że dla ruchu Browna funkcja

$$P(t,y,s,x) = P(X_t \le y \mid X_s = x), \qquad P(t,y,s,x) = \int_{-\infty}^{y} p(t,\eta,s,x)d\eta$$

spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa:

$$P(t,y,s,x) = \int_{\mathbb{R}} P(t,y,\tau,z)P(\tau,dz,s,x).$$

Wskazówka :

$$\int_{\mathbb{R}} P(t,dy,s,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,y,s,x)dy.$$

Zad. 45. Wykaż, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia dla ruchu Browna spełnia równanie

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,x) + L_s u(s,x) = 0,$$

gdzie L_s jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu

$$L_s u(s,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,x) + \mu(s,x)\frac{\partial u}{\partial x}(s,x), \qquad dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t.$$

Zad. 46. Co trzeba dodać do

1. X_t^2,
2. $\operatorname{arctg} X_t$,
3. $e^{\lambda X_t}$,

aby otrzymać martyngał? Podaj wzór ogólny dla dowolnego procesu dyfuzji X_t, a następnie dla

1. $X_t = W_t$,
2. $dX_t = 3X_t dt + t dW_t$.

Wskazówka: Martyngałem jest proces

$$M_t = f(t,X_t) - \int_0^t \left(L_s f(s,X_s) + \frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s)\right)ds.$$

Zad. 47. Sprawdź tożsamość

$$\int_{\mathbb{R}} f(t,y)P(t,dy,s,x) - f(s,x) = \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + L_\tau\right) f(\tau,y)P(\tau,dy,s,x)d\tau,$$

gdzie P jest dystrybuantą warunkową ruchu Browna oraz

1. $f(t,x) = x$,
2. $f(t,x) = e^{t+x}$.