Zad. 48. Pokaż, że dla dowolnego u

$$f(t,x) = e^{ux-\frac{1}{2}u^2 t}$$

spełnia równanie wsteczne

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,x) + L_s u(s,x) = 0$$

dla ruchu Browna. Oblicz pierwszą, drugą, trzecią i czwartą pochodną f względem u. Następnie przyjmując $u = 0$ pokaż, że funkcje

$$x, \quad x^2 - t, \quad x^3 - 3tx, \quad x^4 - 6tx^2 + 3t^2$$

również spełniają równanie wsteczne. Wywnioskuj stąd, że procesy

$$W_t^2 - t, \quad W_t^3 - 3tW_t, \quad W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2$$

są martyngałami.

Zad. 49. Niech X_t będzie procesem dyfuzji o współczynnikach $\mu(x) = cx$, $\sigma(x) = 1$. Wyznacz generator i pokaż, że $X_t^2 - 2c\int_0^t X_s^2 ds - t$ jest martyngałem.

Zad. 50. Niech X_t będzie procesem dyfuzji o współczynnikach $\mu(x) = 2x$, $\sigma^2(x) = 4x$. Wyznacz generator L. Rozwiąż równanie $Lf = 0$ i podaj martyngał. Znajdź równanie różniczkowe dla procesu $Y_t = \sqrt{X_t}$ i podaj jego generator.

Zad. 51. Znajdź funkcję $f(x)$ taką, aby proces $f(W_t + t)$ był martyngałem.

Zad. 52. Za pomocą funkcji generującej momenty i wzoru Dynkina wykaż, że

$$1. \int_0^1 s dW_s \qquad\qquad 2. \int_0^1 W_s ds$$

mają rozkład $N(0, \frac{1}{3})$.

Zad. 53. Korzystając ze wzoru Feynmana-Kaca, podaj probabilistyczną reprezentację rozwiązania $f(t,x)$ równania

1. $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad f(T,x) = x^2$
2. $\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = rf, \quad f(T,x) = x^2, \quad \sigma,\ \mu,\ r > 0.$

Zad. 54. Korzystając z definicji

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}\left[f(X_t)|X_0 = x\right] - f(x)}{t},$$

znajdź generator dla ruchu Browna, gdy

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = e^x$

Zad. 55. Dla geometrycznego ruchu Browna

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x > 0$$

znajdź generator, gdy $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, α - stała.

Zad. 56. Niech $f(t,x)$ spełnia

$$L_t f(t,x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 0, \qquad f(T,x) = g(x).$$

Wykaż, że przy odpowiednich założeniach:

$$f(t,x) = \mathbb{E}\left[g(X_T)|X_t = x\right].$$