Wstęp do równań różniczkowych stochastycznych

Zad. 1. Niech W_t będzie ruchem Browna. Znajdź rozkład zmiennej losowej

1. $X = 4W_2 - W_4 + W_6$
2. $X = 3W_5 - W_3 - 2W_9$.

Zad. 2. Oblicz funkcję wartości oczekiwanej i wariancji procesów:

1. $X_t = at + W_t, \quad t \geq 0, \ a > 0$
2. $X_t = At + W_t, \quad t \geq 0, \ A$ - zmienna losowa niezależna od W_t o rozkładzie $N(m, s^2)$.

Zad. 3. Sprawdź, czy $2W_t - W_s$ i $W_t - 2W_s$ są niezależne od $W_s - W_r$, gdy $0 \leq r < s < t$.

Zad. 4. Pokaż, że $\mathbb{E}[W_s W_t] = \min\{s, t\}$.

Zad. 5. Oblicz $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2]$, gdy $0 \leq s < t$.

Zad. 6. Niech W_t będzie ruchem Browna. Pokaż, że podane procesy stochastyczne są również ruchami Browna.

1. $X_t = -W_t, \quad t \geq 0$
2. $X_t = W_{t+h} - W_h, \quad t \geq 0, \ h > 0$ – ustalone.
3. $X_t = aW_{t/a^2}, \quad t \geq 0, \ a > 0$ – ustalone.

Zad. 7. Niech W_t i B_t będą niezależnymi ruchami Browna. Pokaż, że

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_t + B_t \right), \quad t \geq 0$$

jest również ruchem Browna.

Zad. 8. Oblicz funkcję korelacji procesów:

1. $W_t, \quad t \geq 0$
2. $X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0$
3. $X_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}, \quad t \geq 0, \quad h > 0$ - ustalone
4. $X_t = W_t - tW_1, \quad t \in [0, 1]$
5. $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}, \quad t \geq 0.$ *Wskazówka*: Jeżeli $X \sim N(m, s^2)$, to $\mathbb{E}\left[e^X\right] = e^{m + \frac{s^2}{2}}$.

Zad. 9. Oblicz korelację procesów W_t i X_t z zadania 7.

Zad. 10. Pokaż, że podane procesy stochastyczne są martyngałami względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, gdzie $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$.

1. $W_t, \quad t \geq 0$
2. $W_t^2 - t, \quad t \geq 0$
3. $W_t^3 - 3tW_t, \quad t \geq 0$
4. $W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2, \quad t \geq 0$
5. $e^{\theta W_t - \frac{\theta^2}{2} t}, \quad \theta$ - ustalone.

Wskazówka: Jeżeli $X \sim N(0, \sigma^2)$, to $\mathbb{E}[X^p] = 0$, p-nieparzyste; $\mathbb{E}[X^p] = \sigma^p (p-1)!!$, p-parzyste.

Niech π_n: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Dla procesów prostych adaptowanych

$$X_t = \xi_0\, \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}\, \mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \qquad \xi_0 - \text{stała},\ \xi_i \text{ jest } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mierzalny},\ E[\xi_i^2] < \infty$$

całkę Itô definiujemy wzorem $\displaystyle\int_0^T X_t dW_t = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}\left[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right].$

Dla procesów X_t ciągłych, adaptowanych, spełniających $\displaystyle\int_0^T \mathbb{E}[X_t^2]dt < \infty$ określamy

$$\int_0^T X_t dW_t = \lim_{\pi_n} \sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}\left[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right].$$

Zad. 11. Oblicz całkę Itô procesu X_t, jej wartość oczekiwaną i wariancję dla

1. $X_t = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & 1 < t \le 2 \\ 2, & 2 < t \le 3 \end{cases}$

2. $X_t = \begin{cases} 3, & 0 \le t \le 2 \\ -1, & 2 < t \le 5 \\ 4, & 5 < t \le 6 \end{cases}$

Zad. 12. Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\displaystyle\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T.$

Wskazówka 1: Zdefiniuj

$$X_t = W_{t_0}\, \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}}\, \mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \quad t_i = \frac{iT}{n}.$$

Wykaż $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |W_t - X_t|^2\, dt\right] = 0.$

Wskazówka 2: $a(b-a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 - (b-a)^2]$, $a = W_{t_{i-1}}$, $b = W_{t_i}$.

Wskazówka 3: Wariacja kwadratowa ruchu Browna $\displaystyle[W]_t := \lim_{\pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^2 = t.$

Zad. 13. Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\displaystyle\int_0^T t dW_t = TW_T - \int_0^T W_t dt.$

Wskazówka 1: Zdefiniuj

$$X_t = t_0\, \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}\, \mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \quad t_i = \frac{iT}{n}.$$

Wykaż $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t - t|^2\, dt\right] = 0.$

Wskazówka 2: $c(b-a) = (db - ca) - b(d-c)$, $a = W_{t_{i-1}}$, $b = W_{t_i}$, $c = t_{i-1}$, $d = t_i$.

Wskazówka 3: $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^2 \le n \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2.$

Wskazówka 4: Nierówność Schwarza: $\displaystyle\left(\int_0^T X_t Y_t dt\right)^2 \le \int_0^T X_t^2 dt \int_0^T Y_t^2 dt.$

Zad. 14. Pokaż, że całka Itô nie ma własności monotoniczności.

Wskazówka: Dla $X_t = 0$, $Y_t = 1$ pokaż $\displaystyle P\left(\int_0^1 X_t dW_t < \int_0^1 Y_t dW_t\right) \ne 1.$

Zad. 15. Oblicz pierwszy i drugi moment procesów

1. $\int_0^1 t dW_t$
2. $\int_0^1 W_t dW_t$
3. $\int_0^1 e^{W_t} dW_t$.

Zad. 16. Niech X_t, Y_t - procesy adaptowane, takie że $\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2 dt\right] < \infty$, $\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_t^2 dt\right] < \infty$. Wykaż

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t dW_t \int_0^T Y_t dW_t\right] = \int_0^T \mathbb{E}[X_t Y_t] dt.$$

Zad. 17. Stosując Lemat Itô, oblicz różniczkę stochastyczną procesów:

1. $Y_t = W_t^2$
2. $Y_t = \frac{1}{3} W_t^3$
3. $Y_t = e^{W_t}$
4. $Y_t = \cos(W_t)$
5. $Y_t = \operatorname{arctg}(W_t)$
6. $Y_t = \frac{1}{1+W_t^2}$
7. $Y_t = \frac{W_t}{1+W_t^2}$

Zad. 18. Stosując Lemat Itô, oblicz różniczkę stochastyczną procesów:

1. $Y_t = X_t^3$ dla $X_t = 2t + W_t$
2. $Y_t = e^{X_t}$ dla $X_t = t + 3\int_0^t s dW_s$

Zad. 19. Niech X_t będzie procesem Itô. Zastosuj wzór Itô do X_t^2 a następnie wyznacz stąd wariację kwadratową.

Zad. 20. Zastosuj Lemat Itô do funkcji:

1. $f(t, W_t) = 2 + t + e^{W_t}$
2. $f(t, W_t) = W_t^2 - t$
3. $f(t, W_t) = tW_t$
4. $f(t, W_t) = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$
5. $f(t, W_t) = e^{\frac{1}{2}t} \sin(W_t)$

Zad. 21. Zastosuj Lemat Itô do funkcji:

1. $f(t, X_t) = X_t^2 - t$ dla $X_t = 5t + W_t$
2. $f(t, X_t) = tX_t^2$ dla $X_t = \int_0^t s dW_s$

Zad. 22. Oblicz:

1. $\left[e^W, W\right]_t$
2. $\left[W^2, W\right]_t$
3. $[X, X]_t$ dla $X_t = tW_t$.
4. $[X, X]_t$ dla $X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$.

Zad. 23. Niech $X_t = 1 - t$ oraz $Y_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$. Oblicz $d(X_t Y_t)$.

Zad. 24. Niech $X_t = tW_t$ oraz $Y_t = e^{W_t}$. Oblicz $d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)$.

Zad. 25. Oblicz różniczkę stochastyczną procesów

1. $Y_t = (W_t^{(1)})^2 + (W_t^{(2)})^2$, gdzie $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ jest dwuwymiarowym ruchem Browna.
2. $Y_t = \left(W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + W_t^{(3)}, (W_t^{(2)})^2 - W_t^{(1)} W_t^{(3)}\right)$, gdzie $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ jest trójwymiarowym ruchem Browna.

Zad. 26. Niech c, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą stałymi, $W_t = (W_t^{(1)}, \ldots W_t^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ - wielowymiarowym ruchem Browna. Definiujemy

$$X_t = \exp\left(ct + \sum_{j=1}^n \alpha_j W_t^{(j)}\right).$$

Pokaż, że

$$dX_t = \left(c + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\right) X_t dt + X_t \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j dW_t^{(j)}\right).$$

Zad. 27. Niech $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$ spełnia

$$\begin{aligned} dX_t^{(1)} &= \mu_t^{(1)} dt + \sigma_t^{(1,1)} dW_t^{(1)} \\ dX_t^{(2)} &= \mu_t^{(2)} dt + \sigma_t^{(2,1)} dW_t^{(1)} + \sigma_t^{(2,2)} dW_t^{(2)}. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru Itô, oblicz $d(X_t^{(1)} X_t^{(2)})$.

Zad. 28. Wyprowadź wzór na całkowanie przez części

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X, Y]_t$$

1. z definicji kwadratowej kowariacji
2. ze wzoru Itô dla funkcji $f(x, y) = xy$.

Zad. 29. Niech

$$\beta_k(t) = \mathbb{E}[W_t^k], \quad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

Korzystając ze wzoru Itô, udowodnij:

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t \beta_{k-2}(s) ds, \quad k \geq 2.$$

Oblicz $\mathbb{E}[W_t^4]$ i $\mathbb{E}[W_t^6]$.

Zad. 30. Oblicz stochastyczny eksponent ruchu Browna.

Zad. 31. Rozwiąż równania

1. $dX_t = (1 + X_t^2) dt, \quad X_0 = 0$
2. $dX_t = (aX_t + b) dt, \quad X_0 = c$
3. $dX_t = X_t dW_t, \quad X_0 = 2$
4. $dX_t = 7X_t dW_t, \quad X_0 = 1$
5. $dX_t = X_t dt + 2X_t dW_t, \quad X_0 = 3$
6. $dX_t = -3X_t dt + \frac{1}{3} X_t dW_t, \quad X_0 = 2$
7. $dX_t = X_t dY_t, \quad Y_t = t + 2W_t, \quad X_0 = 1$

Zad. 32. Rozwiąż równanie

$$dX_t = X_t dt + dW_t.$$

Wskazówka: Pomnóż obie strony równania przez czynnik całkujący e^{-t} i porównaj z $d\left(e^{-t}X_t\right)$.

Zad. 33. Rozwiąż równanie

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

Zad. 34. Rozwiąż równanie

$$dX_t = r dt + \alpha X_t dW_t, \quad r, \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Wskazówka: Pomnóż obie strony równania przez czynnik całkujący $F_t = \exp\left(-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right)$.

Zad. 35. Pokaż, że rozwiązaniem ogólnego równania liniowego

$$dX_t = \left(\alpha_t + \beta_t X_t\right) dt + \left(\gamma_t + \delta_t X_t\right) dW_t$$

jest

$$\begin{aligned} X_t &= U_t \left(X_0 + \int_0^t \frac{\alpha_s - \delta_s \gamma_s}{U_s} ds + \int_0^t \frac{\gamma_s}{U_s} dW_s \right), \\ U_t &= U_0 \exp\left(\int_0^t (\beta_s - \frac{1}{2}\delta_s^2) ds + \int_0^t \delta_s dW_s \right). \end{aligned}$$

Wskazówka:

1. Najpierw znajdź rozwiązanie równania w przypadku, gdy $\alpha_t = 0$ i $\gamma_t = 0$.
2. W przypadku ogólnym rozwiązania szukamy w postaci: $X_t = U_t V_t$, gdzie

$$\begin{aligned} dU_t &= \beta_t U_t dt + \delta_t U_t dW_t, \quad U_0 = 1 \\ dV_t &= a_t dt + b_t dW_t, \quad V_0 = X_0. \end{aligned}$$

Zad. 36. Korzystając z poprzedniego zadania, rozwiąż równania

1. $dX_t = (8 - X_t)dt + 3dW_t, \quad X_0 = -5$
2. $dX_t = (2X_t - 5)dt - dW_t \quad X_0 = 1$

Zad. 37. Oblicz stochastyczny logarytm procesu

1. $U_t = e^{W_t}$
2. $U_t = W_t^2 + 1$

Zad. 38. Pokaż, że istnieje jednoznacznie wyznaczone rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} dX_t &= \ln(1 + X_t^2)dt + \mathbf{1}_{\{X_t > 0\}} X_t dW_t, \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zad. 39. Niech X_t będzie jednoznacznie wyznaczonym rozwiązaniem równania

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X_0 &= Z, \end{aligned}$$

gdzie

1. $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1 + |x|)$ dla pewnej stałej $C > 0$,
2. $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x - y|$ dla pewnej stałej $L > 0$,
3. Z jest zmienną losową niezależną od ruchu Browna oraz $\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$.

Pokaż, że dla $t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E}\left[|X_t^2|\right] \leq K_1 e^{K_2 t}, \quad K_1 = 3\,\mathbb{E}\left[|Z^2|\right] + 6C^2 T(T+1), \quad K_2 = 6C^2(T+1).$$

Wskazówka 1: $(p+q)^2 \leq 2p^2 + 2q^2$, $\quad (p+q+r)^2 \leq 3p^2 + 3q^2 + 3r^2$, $\quad a^2 + b^2 \leq (|a| + |b|)^2$.
Wskazówka 2: (*Nierówność Gronwalla*)
Niech funkcje $f = f(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$ będą nieujemne oraz dla każdego $t \in [0, T]$

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t h(s) f(s) ds.$$

Wtedy

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t h(s) g(s) e^{\int_s^t h(u)du} ds.$$

Zad. 40. Pokaż, że równanie Tanaki

$$dX_t = \operatorname{sign}(X_t) dW_t, \quad X_0 = 0, \quad \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ma słabe rozwiązanie (jest nim ruch Browna).

Zad. 41. Pokaż, że ruch Browna ma własność Markowa.
Wskazówka: Wystarczy pokazać: $\mathbb{E}\left[e^{uW_{t+s}} | \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[e^{uW_{t+s}} | W_t\right]$.

Zad. 42. Niech X_t będzie rozwiązaniem równania

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned}$$

gdzie $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$. Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa przejścia procesu X_t.

Zad. 43. Wykaż, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia dla ruchu Browna

$$p(t,y,s,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-(y-x)^2}{2(t-s)}\right)$$

spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa

$$p(t,y,s,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,y,\tau,z)p(\tau,z,s,x)dz.$$

Wskazówka 1:

$$-\frac{(z-x)^2}{2(\tau-s)} - \frac{(y-z)^2}{2(t-\tau)} = -\left(\frac{1}{2(\tau-s)} + \frac{1}{2(t-\tau)}\right)(z-x)^2 + \frac{y-x}{t-\tau}(z-x) - \frac{(y-x)^2}{2(t-\tau)}.$$

Wskazówka 2:

$$ax^2 - bx + c = \left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Wskazówka 3:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Zad. 44. Wykaż, że dla ruchu Browna funkcja

$$P(t,y,s,x) = P(X_t \leq y \mid X_s = x), \qquad P(t,y,s,x) = \int_{-\infty}^{y} p(t,\eta,s,x)d\eta$$

spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa:

$$P(t,y,s,x) = \int_{\mathbb{R}} P(t,y,\tau,z)P(\tau,dz,s,x).$$

Wskazówka:

$$\int_{\mathbb{R}} P(t,dy,s,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,y,s,x)dy.$$

Zad. 45. Wykaż, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa przejścia dla ruchu Browna spełnia równanie

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s,x) + L_s f(s,x) = 0,$$

gdzie L_s jest generatorem ruchu Browna.

$$L_s f(s,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,x) + \mu(s,x)\frac{\partial f}{\partial x}(s,x), \qquad dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t.$$

Zad. 46. Co trzeba dodać do

1. X_t^2,
2. $\operatorname{arctg} X_t$,
3. $e^{\lambda X_t}$,

aby otrzymać martyngał? Podaj wzór ogólny dla dowolnego procesu dyfuzji X_t, a następnie dla

1. $X_t = W_t$,
2. $dX_t = 3X_t dt + t dW_t$.

Wskazówka: Martyngałem jest proces

$$M_{f,t} = f(t,X_t) - \int_0^t \left(L_s f(s,X_s) + \frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s)\right)ds.$$

Zad. 47. Sprawdź tożsamość

$$\int_{\mathbb{R}} f(t,y)P(t,dy,s,x) - f(s,x) = \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + L_\tau\right) f(\tau,y)P(\tau,dy,s,x)d\tau,$$

gdzie P jest dystrybuantą warunkową ruchu Browna, L - generatorem ruchu Browna oraz

1. $f(t,x) = x$,
2. $f(t,x) = e^{t+x}$.

Zad. 48. Pokaż, że dla dowolnego u

$$f(t,x) = e^{ux - \frac{1}{2}u^2 t}$$

spełnia równanie wsteczne

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s,x) + L_s f(s,x) = 0$$

dla ruchu Browna. Oblicz pierwszą, drugą, trzecią i czwartą pochodną f względem u. Następnie przyjmując $u = 0$ pokaż, że funkcje

$$x, \quad x^2 - t, \quad x^3 - 3tx, \quad x^4 - 6tx^2 + 3t^2$$

również spełniają równanie wsteczne. Wywnioskuj stąd, że procesy

$$W_t^2 - t, \quad W_t^3 - 3tW_t, \quad W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2$$

są martyngałami.

Zad. 49. Niech X_t będzie procesem dyfuzji o współczynnikach $\mu(x) = cx$, $\sigma(x) = 1$.
Wyznacz generator dla X_t i pokaż, że $X_t^2 - 2c\int_0^t X_s^2 ds - t$ jest martyngałem.

Zad. 50. Niech X_t będzie procesem dyfuzji o współczynnikach $\mu(x) = 2x$, $\sigma^2(x) = 4x$. Wyznacz generator L dla X_t. Rozwiąż równanie $Lf = 0$ i podaj martyngał M_f. Znajdź równanie różniczkowe dla procesu $Y_t = \sqrt{X_t}$ i podaj generator dla Y_t.

Zad. 51. Znajdź funkcję $f(x)$ taką, aby proces $f(W_t + t)$ był martyngałem.

Zad. 52. Za pomocą funkcji generującej momenty i wzoru Dynkina wykaż, że

$$1. \int_0^1 s dW_s \qquad\qquad 2. \int_0^1 W_s ds$$

mają rozkład $N(0, \frac{1}{3})$.

Zad. 53. Korzystając ze wzoru Feynmana-Kaca, podaj probabilistyczną reprezentację rozwiązania $f(t,x)$ równania

1. $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad f(T,x) = x^2$
2. $\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = rf, \quad f(T,x) = x^2, \quad \sigma,\ \mu,\ r > 0.$

Zad. 54. Korzystając z definicji

$$Lf(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}\left[f(X_t) \,|\, X_0 = x\right] - f(x)}{t},$$

znajdź generator dla ruchu Browna, gdy

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = e^x$

Zad. 55. Dla geometrycznego ruchu Browna

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x > 0$$

znajdź generator, gdy $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, α - stała.

Zad. 56. Niech $f(t,x)$ spełnia

$$L_t f(t,x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 0, \qquad f(T,x) = g(x).$$

Wykaż, że przy odpowiednich założeniach:

$$f(t,x) = \mathbb{E}\left[g(X_T) \,|\, X_t = x\right].$$

Zad. 57. Niech $f(t,x)$ spełnia

$$L_t f(t,x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\phi(x), \qquad f(T,x) = g(x).$$

Wykaż, że przy odpowiednich założeniach:

$$f(t,x) = \mathbb{E}\left[g(X_T) + \int_t^T \phi(X_s)ds \,\middle|\, X_t = x \right].$$

Zad. 58. Wyraź całkę Stratonowicza w terminach całki Itô

1. $\int_0^t W_t \partial W_t$
2. $\int_0^t W_t \partial X_t, \quad X_t = t^2 + \int_0^t s dW_s$

Zad. 59. Oblicz różniczkę stochastyczną w sensie Stratonowicza procesu

1. W_t^2
2. e^{W_t}

Zad. 60. Wykaż wzór na całkowanie przez części w rachunku Stratonowicza:

$$\partial (X_t Y_t) = X_t \partial Y_t + Y_t \partial X_t.$$

Zad. 61. Niech X_t spełnia równanie różniczkowe w sensie Stratonowicza

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)\partial W_t$$

oraz σ będzie klasy C^2. Wykaż, że X_t spełnia równanie różniczkowe w sensie Itô

$$dX_t = \left(\mu(X_t) + \frac{1}{2}\sigma'(X_t)\sigma(X_t) \right) dt + \sigma(X_t)dW_t.$$

Zad. 62. Przekształć równania różniczkowe w sensie Stratonowicza na równoważne równania w sensie Itô

1. $dX_t = (X_t - X_t^2)dt + X_t^3 \partial W_t$
2. $dX_t = X_t dt + 2e^{3X_t}\partial W_t$