

1. Niech $(W_t)_{t \in [0, T]}$ będzie ruchem Browna. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej
 1. $X = 4W_2 - W_4 + W_6$
 2. $X = 3W_5 - W_3 - 2W_9$.
2. Oblicz funkcję wartości oczekiwanej i wariancji procesu
 1. $X_t = 6t + W_t, \quad t \in [0, T]$
 2. $X_t = At + W_t, \quad t \in [0, T], \quad A$ - zmienna losowa niezależna od $(W_t)_{t \in [0, T]}$ o rozkładzie $N(m, s^2)$.
3. Niech $(W_t)_{t \in [0, T]}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że podane procesy są również ruchami Browna.
 1. $X_t = -W_t, \quad t \in [0, T]$
 2. $X_t = W_{t+h} - W_h, \quad t \in [0, T], \quad h > 0$ - ustalone
 3. $X_t = aW_{t/a^2}, \quad t \in [0, T], \quad a > 0$ - ustalone
4. Pokaż, że $\mathbb{E}[W_s W_t] = \min\{s, t\}$ dla $s, t \in [0, T]$.
5. Oblicz funkcję korelacji procesu
 1. $X_t = W_t, \quad t \in [0, T]$.
 2. $X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \in [0, T]$.
 3. $X_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}, \quad t \in [0, T], \quad h > 0$ - ustalone.
 4. $X_t = W_t - tW_1, \quad t \in [0, 1]$.
6. Niech $(W_t)_{t \in [0, T]}$ będzie ruchem Browna.
 1. Definiujemy proces $X_t = W_t - 5, \quad t \in [0, T]$. Oblicz $P(X_3 > 0)$.
 2. Definiujemy proces $X_t = W_t + 1, \quad t \in [0, T]$. Oblicz $P(X_2 > 2)$.
7. Pokaż, że procesy
 1. $X_t = W_t^2 - t, \quad t \in [0, T]$
 2. $X_t = W_t^3 - 3tW_t, \quad t \in [0, T]$
 są martyngałami względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, gdzie $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t \leq T)$.

Niech $\pi_n: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Dla **nielosowych procesów prostych**

$$X_t = c_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad \text{gdzie } c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \text{ są stałymi}$$

całkę Itô definiujemy wzorem $\int_0^T X_t dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$.

Dla **procesów prostych adaptowanych**

$$X_t = \xi_0 \mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad \text{gdzie } \xi_i \text{ jest } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mierzalny, } E[\xi_i^2] < \infty$$

całkę Itô definiujemy wzorem $\int_0^T X_t dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$.

Dla procesów X_t **ciągłych, adaptowanych**, spełniających $\int_0^T \mathbb{E}[X_t^2] dt < \infty$ całkę Itô określamy

$$\int_0^T X_t dW_t = \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}). \quad (1)$$

8. Oblicz całkę Itô procesu

$$1. X_t = \begin{cases} 3, & 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & 2 < t \leq 3 \\ -4, & 3 < t \leq 5 \end{cases} \quad 2. Y_t = \begin{cases} 7, & 0 \leq t \leq 3 \\ 1, & 3 < t \leq 8 \\ 2, & 8 < t \leq 10 \end{cases}$$

9. Pokaż, że całka Itô nie ma własności monotoniczności.

Wskazówka: Dla $X_t = 0, Y_t = 1$ pokaż $P\left(\int_0^1 X_t dW_t < \int_0^1 Y_t dW_t\right) \neq 1$.

10. (*Granica sum całkowych Riemanna i Itô*) Wiemy, że granica sum Riemanna

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(t_{i+1} - t_i), \quad s_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

aproxymujących całkę funkcji $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ **nie zależy** od wyboru punktu s_i . Jednak granica sum Itô

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad s_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

aproxymujących całkę stochastyczną funkcji $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ **zależy** od wyboru punktu s_i . Aby się o tym przekonać, oblicz podane granice

$$1. \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

$$2. \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Wskazówka 1: Przekształć powyższe sumy według odpowiedniego wzoru

$$1. a(b-a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 - (b-a)^2] \quad \text{dla } a = W_{t_i}, b = W_{t_{i+1}}.$$

$$2. b(b-a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 + (b-a)^2] \quad \text{dla } a = W_{t_i}, b = W_{t_{i+1}}.$$

Wskazówka 2: Skorzystaj z faktu, że wariancja kwadratowa ruchu Browna na odcinku $[0, t]$ jest równa

$$[W]_t := \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = t.$$

Która suma jest stosowana w aproxymacji całki Itô?

11. Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\int_0^T t dW_t = TW_T - \int_0^T W_t dt$.

Wskazówki:

1. Zdefiniuj $X_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} t_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$, $t_i = \frac{iT}{n}$ oraz zastosuj (1).

2. Skorzystaj z równości $c(b-a) = (db-ca) - b(d-c)$ dla $a = W_{t_i}, b = W_{t_{i+1}}, c = t_i, d = t_{i+1}$.

3. Skorzystaj z zadania 10, by określić granicę sum Riemanna: $\lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}(t_{i+1} - t_i)$.

1. Lemat Itô dla funkcji $f(W_t)$

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds,$$

$$df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt$$

2. Lemat Itô dla funkcji $f(t, W_t)$

$$f(t, W_t) = f(0, 0) + \int_0^t \left(f_s(s, W_s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, W_s) \right) ds + \int_0^t f_x(s, W_s) dW_s,$$

$$df(t, W_t) = \left(f_t(t, W_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) \right) dt + f_x(t, W_t) dW_t.$$

12. Zastosuj Lemat Itô do procesów

1. $f(W_t) = W_t^2$
2. $f(W_t) = e^{W_t}$
3. $f(W_t) = \arctg(W_t)$
4. $f(W_t) = \sinh(W_t)$
5. $f(W_t) = \frac{1}{1 + W_t^2}$
6. $f(W_t) = \frac{W_t}{1 + W_t^2}$

13. Korzystając z Lematu Itô, oblicz całki

1. $\int_0^t e^{W_s} dW_s$
2. $\int_0^t W_s^k dW_s$
3. $\int_0^t \sin(W_s) dW_s$

14. Zastosuj Lemat Itô do funkcji

1. $f(t, W_t) = 2 + t + e^{W_t}$
2. $f(t, W_t) = W_t^2 - t$
3. $f(t, W_t) = \sin(t + W_t)$
4. $f(t, W_t) = t \cos(W_t)$
5. $f(t, W_t) = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$
6. $f(t, W_t) = e^{\frac{1}{2}t} \sin(W_t)$

15. Stosując Lemat Itô, oblicz różniczkę stochastyczną procesów

1. $Y_t = (W_t^{(1)})^2 + (W_t^{(2)})^2$, gdzie $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ jest dwuwymiarowym ruchem Browna.
2. $Y_t = (W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + W_t^{(3)}, (W_t^{(2)})^3 - 5W_t^{(3)})$, gdzie $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ jest trójwymiarowym ruchem Browna.

Proces dyfuzji Itô ma postać (i różniczkę stochastyczną)

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s,$$

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t,$$

dla $t \in [0, T]$ i gdzie X_0 jest \mathcal{F}_0 -mierzalne, procesy a_t, b_t są \mathcal{F}_t -adaptowane; a_t jest całkowalny, b_t jest całkowalny z kwadratem. Procesy a_t, b_t mogą zależeć również od W_t, X_t .

16. Podany proces Itô przedstaw w postaci różniczkowej

1. $X_t = t + 5W_t$
2. $X_t = t^3 + \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$
3. $X_t = \int_0^t W_s ds + \int_0^t \sin(X_s) dW_s$

17. Podaj postać procesu Itô X_t i jego różniczkę, gdy

1. $a_t = 0, b_t = 1,$
2. $a_t = t, b_t = W_t,$
3. $a_t = cX_t, b_t = \sigma X_t.$

Jeżeli X_t, Y_t są procesami Itô oraz jeden z nich ma wahanie skończone na $[0, t]$, to $[X, Y]_t = 0$.

Przykład: $X_t = \exp(t), Y_t = W_t$, wtedy $[X, Y]_t = [\exp, W]_t = 0$.

Wariacja kwadratowa ruchu Browna na $[0, t]$ jest równa $[W, W]_t := \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = t$.

Rachunek różniczek. Wprowadzamy formalny zapis: $d[X, Y]_t = dX_t dY_t, d[X, X]_t = (dX_t)^2$. Wtedy

$$(dt)^2 = dt dt = 0, \quad dW_t dt = 0, \quad (dW_t)^2 = dW_t dW_t = dt.$$

PRZYKŁAD. Obliczmy $[e^W, W]_t$.

Zaczynamy od różniczki

$$d[e^W, W]_t = d(e^{W_t})dW_t = \left(e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt \right) dW_t = e^{W_t} dW_t dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt dW_t = e^{W_t} dt,$$

gdzie skorzystaliśmy z lematu Itô i rachunku różniczek. Przechodzimy na całki

$$d[e^W, W]_t = e^{W_t} dt$$

$$\int_0^t d[e^W, W]_s = \int_0^t e^{W_s} ds$$

$$[e^W, W]_t - [e^W, W]_0 = \int_0^t e^{W_s} ds$$

$$[e^W, W]_t = \int_0^t e^{W_s} ds.$$

18. Oblicz

1. $[W^2, W]_t$
2. $[X, X]_t$ dla $X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$
3. $[X, Y]_t$ dla $X_t = \sin(W_t), Y_t = W_t^2$

3. Lemat Itô dla funkcji $f(X_t)$, gdzie X_t jest procesem Itô

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d[X, X]_s,$$

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d[X, X]_t.$$

4. Lemat Itô dla funkcji $f(t, X_t)$, gdzie X_t jest procesem Itô

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s) ds + \int_0^t f_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s) d[X, X]_s,$$

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) d[X, X]_t.$$

5. Lemat Itô dla funkcji $f(X_t, Y_t)$, gdzie X_t, Y_t są procesami Itô

$$df(X_t, Y_t) = f_x(X_t, Y_t) dX_t + f_y(X_t, Y_t) dY_t + \frac{1}{2} f_{xx}(X_t, Y_t) d[X, X]_t + \frac{1}{2} f_{yy}(X_t, Y_t) d[Y, Y]_t + f_{xy}(X_t, Y_t) d[X, Y]_t.$$

19. Pokaż, że jeżeli $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$, to wzory Itô 3. i 4. przyjmują postać

1. $df(X_t) = \left(a_t f'(X_t) + \frac{1}{2} b_t^2 f''(X_t) \right) dt + b_t f'(X_t) dW_t$
2. $df(t, X_t) = \left(f_t(t, X_t) + a_t f_x(t, X_t) + \frac{1}{2} b_t^2 f_{xx}(t, X_t) \right) dt + b_t f_x(t, X_t) dW_t.$

20. Zastosuj Lemat Itô do funkcji

1. $f(X_t) = X_t^3$ dla $X_t = 2t + W_t$
2. $f(X_t) = e^{X_t}$ dla $X_t = t + 3 \int_0^t s dW_s$

21. Zastosuj Lemat Itô do funkcji

1. $f(t, X_t) = X_t^2 - t$ dla $X_t = 5t + W_t$
2. $f(t, X_t) = tX_t^2$ dla $X_t = \int_0^t s dW_s$

22. Niech X_t będzie procesem Itô. Zastosuj wzór Itô do X_t^2 , a następnie wyznacz stąd wariację kwadratową $[X, X]_t$.

23. Pokaż, że jeżeli

$$dX_t = a_t^X dt + b_t^X dW_t,$$

$$dY_t = a_t^Y dt + b_t^Y dW_t,$$

to wzór Itô 5 przyjmuje postać

$$df(X_t, Y_t) = f_x(X_t, Y_t) dX_t + f_y(X_t, Y_t) dY_t + \frac{1}{2} f_{xx}(X_t, Y_t) (b_t^X)^2 dt + \frac{1}{2} f_{yy}(X_t, Y_t) (b_t^Y)^2 dt + f_{xy}(X_t, Y_t) b_t^X b_t^Y dt.$$

24. Zastosuj Lemat Itô do funkcji

1. $f(X_t, Y_t) = X_t Y_t$ dla $X_t = t^2 + W_t, Y_t = 1 + W_t$.
2. $f(X_t, Y_t) = X_t^2 + Y_t^2 - 2X_t$ dla $X_t = 1 - t, Y_t = 4W_t$.

25. Niech $\beta_k(t) = \mathbb{E}[W_t^k]$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Korzystając ze wzoru Itô, udowodnij

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t \beta_{k-2}(s) ds, \quad k \geq 2.$$

Oblicz $\mathbb{E}[W_t^3]$ i $\mathbb{E}[W_t^6]$.

Wynik możesz sprawdzić, korzystając z poniższego faktu.

Jeżeli $X \sim N(0, s^2)$, to $\mathbb{E}[X^p] = 0$, p -nieparzyste; $\mathbb{E}[X^p] = s^p(p-1)!!$, p -parzyste.

Wzór na całkowanie przez części. $d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d[X, Y]_t$.

26. Niech $X_t = t^2 + W_t$, $Y_t = t - \int_0^t (s + 5) dW_s$. Pokaż, że

$$d(X_t Y_t) = (X_t + 2tY_t - t - 5) dt - ((t + 5)X_t - Y_t) dW_t.$$

27. Niech $X_t = 1 - t$ oraz $Y_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$. Oblicz $d(X_t Y_t)$.

28. Niech $X_t = tW_t$ oraz $Y_t = e^{W_t}$. Oblicz $d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)$.

29. Wyprowadź wzór na całkowanie przez części, stosując Lemat Itô do funkcji $f(X_t, Y_t) = X_t Y_t$.

Stochastyczny eksponent. Jedynym rozwiązaniem równania

$$dX_t = X_t dY_t \tag{2}$$

jest

$$X_t = X_0 e^{Y_t - Y_0 - \frac{1}{2}[Y, Y]_t}. \tag{3}$$

Trochę finansów. W chwili $t = 0$ wpłacamy na rachunek bankowy 1 zł. Niech funkcja $x(t)$ oznacza wartość 1 zł w chwili $t > 0$. Jeżeli przez r oznaczymy stopę procentową, to funkcja $x(t)$ spełnia deterministyczne równanie różniczkowe

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = r dt \quad \text{lub równoważnie} \quad \frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 1$. Za pomocą rozdzielania zmiennych otrzymujemy rozwiązanie $x(t) = e^{rt}$. Załóżmy teraz, że stopa jest obciążona ryzykiem (np. 1 zł inwestujemy w akcje), co możemy zapisać $r + \xi_t$, gdzie ξ jest białym szumem, formalnie: $\xi_t = \frac{dW_t}{dt}$. Wtedy proces X spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$\frac{dX_t}{dt} = (r + \sigma \xi_t) X_t \quad \text{co oznacza} \quad dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{4}$$

z warunkiem początkowym $X_0 = 1$. Rozwiązaniem (4) jest geometryczny ruch Browna

$$X_t = e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}. \tag{5}$$

30. Sprawdź poprawność rozwiązania (4). W tym celu

1. zastosuj Lemat Itô do $\ln X_t$, przy założeniu $X_t > 0$;
2. podstaw (4) pod dX_t ;
3. pokaż, że $d[X, X]_t = \sigma^2 X_t^2 dt$;
4. przejdź na postać całkową.

W wyniku powyższych kroków otrzymujemy $\ln X_t - \ln X_0 = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W_t - W_0)$, skąd widać wynik.

31. Pokaż, że rozwiązaniem (4) jest (5), korzystając bezpośrednio z (3).

32. Rozwiąż równania

1. $dX_t = (1 + X_t^2)dt$, $X_0 = 1$.
2. $dX_t = 7X_t dW_t$, $X_0 = 2$.
3. $dX_t = 3X_t dt + 5X_t dW_t$, $X_0 = 1$.

Czynnik całkujący 1. Rozważmy równanie stochastyczne postaci

$$dX_t = X_t dt + dW_t, \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

Ponieważ (6) nie można sprowadzić do postaci (2), przenosimy niewiadome na lewą stronę równania (6) i mnożymy obustronnie przez czynnik całkujący e^{-t} :

$$\begin{aligned} dX_t - X_t dt &= dW_t, \\ e^{-t} dX_t - e^{-t} X_t dt &= e^{-t} dW_t. \end{aligned} \quad (7)$$

Zauważmy, że lewa strona (7) jest równa $d(e^{-t} X_t)$. Zatem (7) zapisujemy równoważnie

$$\begin{aligned} d(e^{-t} X_t) &= e^{-t} dW_t \\ \int_0^t d(e^{-s} X_s) &= \int_0^t e^{-s} dW_s \\ e^{-t} X_t - e^0 X_0 &= \int_0^t e^{-s} dW_s \\ X_t &= X_0 e^t + \int_0^t e^{t-s} dW_s. \end{aligned}$$

33. Pokaż, że $d(e^{-t} X_t) = e^{-t} dX_t - e^{-t} X_t dt$.

34. Rozwiąż równanie $dX_t = 5X_t dt + 2dW_t$, $X_0 = 1$, korzystając z czynnika całkującego.

Czynnik całkujący 2. Rozważmy równanie stochastyczne postaci

$$dX_t = dt + \alpha X_t dW_t, \quad t \in [0, T], \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Ponieważ (8) nie można sprowadzić do postaci (2), mnożymy (8) przez czynnik całkujący $F_t = e^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}$

$$\begin{aligned} F_t dX_t &= F_t dt + \alpha F_t X_t dW_t, \\ F_t dX_t - \alpha F_t X_t dW_t &= F_t dt. \end{aligned} \quad (9)$$

35. Pokaż, że $d(F_t X_t) = F_t dX_t - \alpha F_t X_t dW_t$ i dokończ (9).

36. Rozwiąż równanie $dX_t = dt - 4X_t dW_t$, $X_0 = 3$, korzystając z czynnika całkującego.

Rozważmy ogólne równanie liniowe

$$dX_t = (\alpha_t + \beta_t X_t) dt + (\gamma_t + \delta_t X_t) dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są danymi ciągłymi procesami adaptowanymi. Pokażemy, że rozwiązaniem tego równania jest

$$\begin{aligned} X_t &= U_t \left(X_0 + \int_0^t \frac{\alpha_s - \delta_s \gamma_s}{U_s} ds + \int_0^t \frac{\gamma_s}{U_s} dW_s \right), \\ U_t &= \exp \left(\int_0^t (\beta_s - \frac{1}{2} \delta_s^2) ds + \int_0^t \delta_s dW_s \right). \end{aligned} \quad (11)$$

37. Udowodnij wzór na rozwiązanie ogólnego równania liniowego stochastycznego. W tym celu

1. Najpierw rozważ przypadek $\alpha_t = 0, \gamma_t = 0$. Wtedy (10) przyjmuje postać $dU_t = \beta_t U_t dt + \delta_t U_t dW_t$. Podaj rozwiązanie tego równania.
2. W przypadku ogólnym rozwiązania szukamy w postaci $X_t = U_t V_t$, gdzie

$$dU_t = \beta_t U_t dt + \delta_t U_t dW_t, \quad (12)$$

$$dV_t = a_t dt + b_t dW_t. \quad (13)$$

Należy znaleźć procesy a_t, b_t . Przyjmij $V_0 = X_0$. Zastosuj całkowanie przez części do $d(U_t V_t)$, podstaw (12), (13), uporządkuj i porównaj z (10).

38. Korzystając z rozwiązania równania ogólnego (10), podaj rozwiązanie

1. równania typu Langevina: $dX_t = a_t X_t dt + dW_t$, gdzie a_t jest ciągłym procesem adaptowanym;
2. równania mostu Browna: $dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} dt + dW_t$, $t \in [0, T]$, $X_0 = a$, $X_T = b$.

PRZYKŁAD. (Stochastyczny logarytm)

Proces $e^{W_t - \frac{1}{2}t}$ jest stochastycznym *eksponentem* ruchu Browna W_t .

Ruch Browna W_t jest stochastycznym *logarytmem* procesu $e^{W_t - \frac{1}{2}t}$.

Obliczmy stochastyczny logarytm procesu $U_t = e^{W_t}$.

I sposób.

Przypomnijmy, że eksponent stochastyczny U procesu X spełnia $dU_t = U_t dX_t$, $U_0 = 1$.

Z definicji stochastyczny logarytm X procesu $U \neq 0$ spełnia $dX_t = \frac{dU_t}{U_t}$, $X_0 = 0$.

Zatem korzystając z lematu Itô

$$dX_t = \frac{dU_t}{U_t} = \frac{d(e^{W_t})}{e^{W_t}} = \frac{e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2}e^{W_t} dt}{e^{W_t}} = dW_t + \frac{1}{2} dt.$$

Stąd stochastyczny logarytm X procesu $U_t = e^{W_t}$ dany jest wzorem $X_t = W_t + \frac{1}{2}t$.

II sposób.

Zastosujemy wzór

$$X_t = \ln \left(\frac{U_t}{U_0} \right) + \int_0^t \frac{d[U, U]_s}{2U_s^2}. \tag{14}$$

Z lematu Itô i rachunku różniczek

$$d[U, U]_t = d[e^W, e^W]_t = (d(e^{W_t}))^2 = \left(e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2}e^{W_t} dt \right)^2 = e^{2W_t} dt.$$

Podstawiamy do wzoru (14)

$$X_t = \ln \left(\frac{e^{W_t}}{1} \right) + \int_0^t \frac{d[e^W, e^W]_s}{2e^{2W_s}} = W_t + \int_0^t \frac{e^{2W_s}}{2e^{2W_s}} ds = W_t + \frac{1}{2}t.$$

39. Oblicz stochastyczny logarytm procesu $U_t = W_t^2 + 1$ dwoma sposobami przedstawionymi w przykładzie.

40. Niech X_t będzie procesem Itô takim, że $a_t = X_t + 3$, $b_t^2 = 4X_t$. Przy założeniu, że $X_t \geq 0$ znajdź stochastyczne równanie różniczkowe spełnione przez proces $Y_t = \sqrt{X_t}$.

41. Znajdź stochastyczne równanie różniczkowe, które spełnia proces

1. $X_t = X_0 e^{at+bx}$, *Wskazówka:* Zastosuj lemat Itô do e^{at+bx}
2. $X_t = \sin(aW_t + \arcsin X_0)$, *Wskazówka:* Zastosuj lemat Itô do $\sin(ax + b)$
3. $X_t = \sinh(t + W_t + C)$, gdzie $C = \operatorname{arcsinh} X_0$, *Wskazówka:* Zastosuj lemat Itô do $\sinh(t + x)$

Odpowiedzi:

1. $dX_t = \left(a + \frac{b^2}{2} \right) X_t dt + bX_t dW_t$
2. $dX_t = -\frac{1}{2}a^2 X_t dt + a\sqrt{1 - X_t^2} dW_t$
3. $dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}X_t \right) dt + \left(\sqrt{1 + X_t^2} \right) dW_t$

PRZYKŁAD. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie nieliniowego równania różniczkowego

$$\begin{aligned} dX_t &= \ln(1 + X_t^2) dt + \mathbf{1}_{\{X_t > 0\}} X_t dW_t, \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że zagadnienie

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \\ X_0 &= Z, \end{aligned}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie, jeżeli spełnione są warunki

1. $|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ dla pewnej stałej $C > 0$,
2. $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y|$ dla pewnej stałej $L > 0$,
3. Z jest zmienną losową niezależną od ruchu Browna oraz $\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$.

Rozwiązanie.

Niech $\mu(t, x) = \ln(1 + x^2)$, $\sigma(t, x) = x \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$.

Ad. 1. Mamy

$$\begin{aligned} |\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| &= |\ln(1 + x^2)| + |x \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}}| \\ &\leq \ln(1 + |x|^2) + |x| \\ &= 2 \ln(1 + |x|) + |x| \\ &\leq 3|x| \quad (\ln(1 + u) \leq u \text{ dla } u \geq 0) \\ &\leq 3(1 + |x|). \end{aligned}$$

Ad. 2. Chcemy oszacować

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| = |\ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2)| + |x \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}} - y \cdot \mathbf{1}_{\{y > 0\}}|.$$

Funkcja $f(u) = \ln(1 + u^2)$ jest różniczkowalna. Zatem z twierdzenia o wartości średniej dla $x < y$ istnieje $\xi \in (x, y)$ takie, że

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

Mamy

$$f'(\xi) = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad |f'(\xi)| = \left| \frac{2\xi}{1 + \xi^2} \right| \leq 1, \quad \text{bo } 2\xi \leq 1 + \xi^2, \quad \text{a to wynika z } (1 - \xi)^2 \geq 0.$$

Zatem $|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y - x| \leq |y - x|$.

Teraz pokażemy

$$|x \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}} - y \cdot \mathbf{1}_{\{y > 0\}}| \leq |x - y|.$$

Dla $x > 0, y > 0$: $|x \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}} - y \cdot \mathbf{1}_{\{y > 0\}}| = |x - y|$.

Dla $x > 0, y < 0$: $|x \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}} - y \cdot \mathbf{1}_{\{y > 0\}}| = |x| \leq |x + (-y)|$.

Dla $x < 0, y > 0$: $|x \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}} - y \cdot \mathbf{1}_{\{y > 0\}}| = |-y| = |y| \leq |y + (-x)|$.

Dla $x < 0, y < 0$: $|x \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}} - y \cdot \mathbf{1}_{\{y > 0\}}| = 0 \leq |x - y|$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| = |\ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2)| + |x \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}} - y \cdot \mathbf{1}_{\{y > 0\}}| \leq 2|x - y|.$$

Ad. 3. Zmienna losowa $Z = x_0$ jest funkcją stałą, a więc niezależną od ruchu Browna i $\mathbb{E}[|x_0|^2] = x_0^2 < \infty$.

42. Wykaż, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie nieliniowego równania różniczkowego

$$\begin{aligned} dX_t &= \arctg(X_t) dt + \sin(X_t) dW_t, \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

PRZYKŁAD. (*Generator dyfuzji*)

Generator procesu dyfuzji, czyli procesu spełniającego równanie różniczkowe stochastyczne

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad (15)$$

dany jest wzorem

$$L_t f(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + \mu(t, x)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x), \quad (16)$$

gdzie f jest dowolną funkcją klasy $C^{1,2}$. Generator dyfuzji jest więc operatorem różniczkowym drugiego rzędu stowarzyszonym z równaniem (15).

Wyznamy generator ruchu Browna. Mamy $X_t = W_t$, zatem $dX_t = dW_t$ i porównując z (20), otrzymujemy $\mu(t, X_t) = 0$, $\sigma(t, X_t) = 1$. Wstawiamy do (16)

$$L_t f(t, x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x).$$

43. Wyznacz generator procesu

1. $X_t = at + bW_t$, $a, b \in \mathbb{R}$
2. $X_t = e^{(a-\frac{1}{2}b^2)t+bW_t}$, $a, b \in \mathbb{R}$

PRZYKŁAD. (*Martyngały*)

Co należy dodać do X_t^2 , aby otrzymać martyngał? Podamy wzór ogólny dla procesu dyfuzji, a następnie dla $X_t = W_t$. Skorzystamy z następującego twierdzenia.

Niech X_t będzie rozwiązaniem (15), gdzie μ i σ spełniają warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną ze stałą niezależną od czasu, niech $|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ oraz niech X posiada funkcję tworzącą momenty. Wtedy martyngałem jest proces

$$M_{f,t} = f(t, X_t) - \int_0^t \left(L_s f(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) \right) ds. \quad (17)$$

Mamy

$$f(t, x) = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.$$

Wstawiamy do (16)

$$L_t f(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x) \cdot 2 + \mu(t, x) \cdot 2x = \sigma^2(t, x) + 2x\mu(t, x).$$

Zatem

$$M_{f,t} = X_t^2 - \int_0^t (\sigma^2(s, X_s) + 2X_s\mu(s, X_s) + 0) ds.$$

Aby otrzymać martyngał, do X_t^2 należy dodać $-\int_0^t (\sigma^2(s, X_s) + 2X_s\mu(s, X_s)) ds$.

Niech teraz $X_t = W_t$.

Wtedy do W_t^2 należy dodać: $-\int_0^t (\sigma^2(s, X_s) + 2X_s\mu(s, X_s)) ds = -\int_0^t (1 + 2W_s \cdot 0) ds = -t$.

44. Niech X_t będzie procesem Itô. Co należy dodać do $\arctg X_t$, aby otrzymać martyngał? Podaj wzór ogólny dla dowolnego procesu Itô, a następnie dla

1. $X_t = W_t$,
2. X_t o różniczce $dX_t = 3X_t dt + t dW_t$.

PRZYKŁAD. (Wzór Dynkina)

Za pomocą funkcji tworzącej momenty i wzoru Dynkina wykażemy, że $\int_0^1 s dW_s$ ma rozkład $N(0, \frac{1}{3})$.

Wprowadźmy oznaczenie: $X_t = \int_0^t s dW_s$ dla $t \leq 1$.

Aby wykazać, że X_t ma rozkład normalny, obliczymy funkcje tworzące momenty $M_{X_t}(u) = \mathbb{E}[e^{uX_t}]$ zmiennych losowych X_t dla $t \leq 1$. W tym celu skorzystamy ze wzoru Dynkina.

Wzór Dynkina. Niech X_t będzie rozwiązaniem RRS: $dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$ przy odpowiednich założeniach. Wtedy dla każdego $t \in [0, T]$ zachodzi

$$\mathbb{E}[f(t, X_t)] = f(0, X_0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(L_s f(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)\right) ds\right].$$

Przyjmujemy więc $f(t, x) = f(x) = e^{ux}$ i obliczamy generator

$$L_t f(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)f''(x) + \mu(t, x)f'(x) = \frac{1}{2}t^2u^2 e^{ux},$$

ponieważ $dX_t = t dW_t$, a stąd $\mu(t, X_t) = 0$, $\sigma(t, X_t) = t$. Ponadto $X_0 = 0$ oraz $f(X_0) = f(0) = 1$. Podstawiamy do wzoru Dynkina

$$\mathbb{E}[f(X_t)] = \mathbb{E}[e^{uX_t}] = 1 + \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{1}{2}s^2u^2 e^{uX_s} ds\right] = 1 + \frac{1}{2}u^2 \int_0^t s^2 \mathbb{E}[e^{uX_s}] ds.$$

Wprowadzając oznaczenie $h(t) = \mathbb{E}[e^{uX_t}]$, mamy

$$h(t) = 1 + \frac{1}{2}u^2 \int_0^t s^2 h(s) ds.$$

Różniczkujemy

$$h'(t) = \frac{1}{2}u^2 t^2 h(t), \quad h(0) = 1.$$

Rozwiązujemy, rozdzielając zmienne

$$\begin{aligned} \frac{dh}{h} &= \frac{1}{2}u^2 t^2 dt \\ \ln|h(t)| - \ln|h(0)| &= \frac{1}{2}u^2 \int_0^t s^2 ds \\ h(t) &= e^{\frac{1}{2}u^2 \cdot \frac{1}{3}t^3}. \end{aligned}$$

Zatem

$$M_{X_t}(u) = \mathbb{E}[e^{uX_t}] = e^{\frac{1}{2}u^2 \cdot \frac{1}{3}t^3}. \quad (18)$$

Przypomnijmy, że funkcja tworząca momenty zmiennej losowej Y o rozkładzie normalnym $N(m, s^2)$ dana jest wzorem

$$M_Y(u) = \mathbb{E}[e^{uY}] = e^{um + \frac{1}{2}u^2 s^2} \quad (19)$$

Porównując (18) i (19), stwierdzamy, że dla $t \leq 1$ zmienna X_t ma rozkład normalny ze średnią $m = 0$ i wariancją $s^2 = \frac{1}{3}t^3$. Zatem dla $t = 1$: $X_1 \sim N(0, \frac{1}{3})$.

45. Za pomocą funkcji generującej momenty i wzoru Dynkina wykaż, że $\int_0^1 W_s ds$ ma rozkład $N(0, \frac{1}{3})$.

Wskazówka: Najpierw przekształć $\int_0^1 W_s ds$ na całkę stochastyczną, tj. $\int_0^1 (1-s) dW_s$. W tym celu możesz użyć wzoru na całkowanie przez części.

PRZYKŁAD. (Wzór Feynmana-Kaca)

Korzystając ze wzoru Feynmana-Kaca, podamy probabilistyczną reprezentację rozwiązania $f(t, x)$ równania

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = rf, \quad f(T, x) = x^2, \quad \sigma > 0, \mu > 0, r > 0. \quad (20)$$

Wzór Feynmana-Kaca. Niech $r(t, x)$, $g(x)$ będą funkcjami ciągłymi, ograniczonymi oraz

$$C(t, x) := \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r(s, X_s) ds} g(X_T) \mid X_t = x \right].$$

Załóżmy, że istnieje rozwiązanie RRCz: $L_t f(t, x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = r(t, x)f(t, x)$ z warunkiem $f(T, x) = g(x)$.

Wtedy rozwiązanie $f(t, x)$ zagadnienia jest jedyne oraz $f(t, x) = C(t, x)$.

Zauważmy, że dwa pierwsze składniki lewej strony równania (20) tworzą generator pewnego procesu X_t , takiego że $\tilde{\mu}(t, x) = \mu x$, $\tilde{\sigma}(t, x) = \sigma x$. Stąd równanie

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

którego rozwiązaniem jest $X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$. Dodatkowo zauważmy, że $\tilde{r}(t, x) = r$. Korzystamy ze wzoru Feynmana-Kaca

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r(s, X_s) ds} g(X_T) \mid X_t = x \right] = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r ds} X_T^2 \mid X_t = x \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} X_T^2 \mid X_t = x \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[X_T^2 \mid X_t = x \right]. \end{aligned}$$

Metodą "dodać-odjąć" przekształcamy X_T

$$\begin{aligned} X_T &= X_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} \left[e^{-(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t - \sigma W_t} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \right] \\ &= \left(X_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \right) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} e^{-(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t - \sigma W_t} \\ &= X_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_T^2 \mid X_t = x \right] &= \mathbb{E} \left[X_t^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + 2\sigma(W_T - W_t)} \mid X_t = x \right] \\ &= \mathbb{E} \left[x^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + 2\sigma(W_T - W_t)} \right] \\ &= x^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E} \left[e^{2\sigma(W_T - W_t)} \right]. \end{aligned}$$

Dla ustalonego $t \in [0, T]$ zmienna losowa $W_T - W_t$ ma rozkład $N(0, T-t)$, a jej funkcja generująca momenty dana jest wzorem $\mathbb{E} \left[e^{a(W_T - W_t)} \right] = e^{\frac{1}{2}a^2(T-t)}$. Przyjmujemy $a = 2\sigma$ i otrzymujemy

$$\mathbb{E} \left[e^{2\sigma(W_T - W_t)} \right] = e^{\frac{1}{2} \cdot 4\sigma^2(T-t)} = e^{2\sigma^2(T-t)}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_T^2 \mid X_t = x \right] &= x^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathbb{E} \left[e^{2\sigma(W_T - W_t)} \right] \\ &= x^2 e^{(2\mu - \sigma^2)(T-t)} e^{2\sigma^2(T-t)} = x^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(T-t)} \end{aligned}$$

oraz

$$f(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[X_T^2 \mid X_t = x \right] = e^{-r(T-t)} x^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(T-t)} = x^2 e^{(2\mu + \sigma^2 - r)(T-t)}.$$

46. Korzystając ze wzoru Feynmana-Kaca, podaj probabilistyczną reprezentację rozwiązania $f(t, x)$ równania

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad f(T, x) = x^2.$$

PRZYKŁAD. (*Dyfuzja jednorodna w czasie*) Niech X_t będzie procesem dyfuzji o współczynnikach $\mu(x) = cx$, $\sigma(x) = 1$, gdzie c jest pewną liczbą. Wyznamy generator L dla X_t i pokażemy, że proces

$$X_t^2 - 2c \int_0^t X_s^2 ds - t \tag{21}$$

jest martyngałem.

Proces dyfuzji X_t o współczynnikach $\mu(x) = cx$, $\sigma(x) = 1$ spełnia $dX_t = cX_t dt + dW_t$. Generator tego procesu dany jest wzorem

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) + \mu(x)f'(x) = \frac{1}{2}f''(x) + cx f'(x).$$

Dla dyfuzji jednorodnej (przy odpowiednich założeniach) martyngałem jest proces postaci

$$M_{f,t} = f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s) ds. \tag{22}$$

Porównując (21) i (22) zauważamy, że należy przyjąć $f(x) = x^2$. Wtedy generator przyjmuje postać $Lf(x) = 1 + 2cx^2$ oraz proces

$$M_{f,t} = X_t^2 - \int_0^t (1 + 2cX_s^2) ds = X_t^2 - t - 2c \int_0^t X_s^2 ds$$

jest martyngałem, co należało wykazać.

PRZYKŁAD. (*Dyfuzja jednorodna w czasie*) Znajdziemy funkcję $f(x)$ taką, aby proces $f(W_t + t)$ był martyngałem.

Oznaczmy $X_t = W_t + t$. Wtedy $dX_t = dW_t + dt$ oraz $\mu(x) = 1$, $\sigma(x) = 1$.

Szukamy takiej funkcji f , aby $Lf(X_s) = 0$, ponieważ wtedy (22) przyjmie postać $M_{f,t} = f(X_t)$, a to będzie oznaczać, że f jest martyngałem. Mamy zatem

$$\begin{aligned} Lf(x) &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x) &= 0, \\ \frac{1}{2} f''(x) + f'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Jest to równanie jednorodne II-rzędu. Piszemy dla niego równanie charakterystyczne $\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda = 0$, skąd otrzymujemy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. A zatem rozwiązaniem jest rodzina funkcji

$$f(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-2 \cdot x} = C_1 + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 - \text{stałe.}$$

Martyngałem jest proces $C_1 + C_2 e^{-2(W_t+t)}$ dla dowolnych stałych C_1, C_2 .

47. Niech X_t będzie procesem dyfuzji o współczynnikach $\mu(x) = 2x$, $\sigma^2(x) = 4x$. Wyznacz generator L dla X_t . Rozwiąż równanie $Lf = 0$ i podaj martyngał $M_{f,t}$.

PRZYKŁAD. (Dyfuzja jednorodna w czasie) Korzystając z

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x] - f(x)}{t}, \quad (23)$$

znajdziemy generator ruchu Browna, gdy $f(x) = x$.

Mamy $X_t = W_t$ oraz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x] &= \mathbb{E}[f(W_t) | W_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[W_t | W_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_0) + W_0 | W_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_0) | W_0 = x] + \mathbb{E}[W_0 | W_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_0] + x \\ &= x, \end{aligned}$$

gdzie równość

$$\mathbb{E}[(W_t - W_0) | W_0 = x] = \mathbb{E}[W_t - W_0]$$

wynika z niezależności przyrostu $W_t - W_0$ od przeszłości. Wtedy

$$Lf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x] - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x - x}{t} = 0.$$

Sprawdzenie. Wiemy, że generator ruchu Browna jest postaci $Lf(x) = \frac{1}{2}f''(x)$. Dla funkcji $f(x) = x$ jest on rzeczywiście równy 0.

48. Korzystając z (23), znajdź generator dla ruchu Browna, gdy $f(x) = e^x$.

49. Korzystając z (23), znajdź generator dla geometrycznego ruchu Browna

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x > 0,$$

gdy

1. $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$,
2. $f(x) = \ln x$.

PRZYKŁAD. (Czas wyjścia z przedziału) Obliczymy $P_x(T_b < T_a)$ dla ruchu Browna, $a = -2, b = 3$, $T_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}, T_b = \inf\{t > 0 : X_t = b\}$.

Przypomnijmy następujące twierdzenie. Niech (X_t) będzie procesem dyfuzji $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, gdzie $\sigma(x) > 0$ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ oraz $X_0 = x \in (a, b)$. Wtedy

$$P_x(T_b < T_a) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}, \quad S(x) = \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^{\xi} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds} d\xi.$$

Skorzystamy z wniosku z tego twierdzenia. Jeżeli (X_t) jest procesem dyfuzji bez dryfu, tzn. $dX_t = \sigma(X_t)dW_t$, to

$$P_x(T_b < T_a) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Mamy $X_t = W_t, \mu(s) = 0, \sigma(s) = 1, X_0 = W_0 = 0 \in (-2, 3)$. Wtedy $P_0(T_3 < T_{-2}) = \frac{2}{5}$.

Jest to prawdopodobieństwo wyjścia procesu przez górny brzeg $b = 3$ przed osiągnięciem dolnego brzegu $a = -2$, startując z punktu $x = 0$.

50. Oblicz $P_x(T_b < T_a)$ dla ruchu Browna z dryfem, gdy $\tilde{\mu}(x) = \mu, \tilde{\sigma}^2(x) = \sigma^2$. Następnie podaj odpowiedź, przyjmując $a = 1, b = 4, \mu = 2, \sigma = 0.5$.

PRZYKŁAD. (*Równania z wybuchem*) Pokażemy, że rozwiązanie równania różniczkowego

$$dX_t = 3X_t^2 dt + dW_t$$

wybucha w skończonym czasie.

Przypomnijmy następujące twierdzenie. Niech (X_t) będzie procesem dyfuzji $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, gdzie funkcje $\mu(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ są lokalnie ograniczone, funkcja $\sigma(\cdot)$ jest ciągła i dodatnia. Proces dyfuzji wybucha wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje x_0 , dla którego spełniony jest jeden z warunków

$$\int_{-\infty}^{x_0} \left[e^{-\int_{x_0}^x \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds} \left(\int_x^{x_0} \frac{1}{\sigma^2(y)} e^{\int_{x_0}^y \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds} dy \right) \right] dx < \infty$$

lub

$$\int_{x_0}^{\infty} \left[e^{-\int_{x_0}^x \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds} \left(\int_{x_0}^x \frac{1}{\sigma^2(y)} e^{\int_{x_0}^y \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds} dy \right) \right] dx < \infty$$

Mamy $\mu(s) = 3s^2$, $\sigma(s) = 1$ oraz

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\int_{x_0}^x e^{2y^3} dy}{e^{2x^3}} dx$$

Oznaczmy $h(x) = \frac{\int_{x_0}^x e^{2y^3} dy}{e^{2x^3}}$ i korzystając z reguły de l'Hospitala obliczmy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x e^{2y^3} dy}{e^{2x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{6x^2} = 0.$$

Zatem

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\int_{x_0}^x e^{2y^3} dy}{e^{2x^3}} dx \approx \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{6x^2} dx = \frac{1}{6x_0} < \infty.$$

51. Zbadaj, czy rozwiązanie równania różniczkowego

$$dX_t = X_t^2 dt + X_t dW_t$$

wybucha w skończonym czasie.

PRZYKŁAD. Wyrazimy całkę Stratonowicza $\int_0^t W_s \circ dW_s$ w terminach całki Itô, korzystając ze wzoru

$$\text{w postaci całkowej: } \int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2}[X, Y]_t,$$

$$\text{w postaci różniczkowej: } Y_t \circ dX_t = Y_t dX_t + \frac{1}{2}d[X, Y]_t.$$

Mamy

$$\int_0^t W_s \circ dW_s = \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2}[W, W]_t = \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2}t,$$

$$W_t \circ dW_t = W_t dW_t + \frac{1}{2}dt.$$

52. Wyraż całkę Stratonowicza $\int_0^t W_t \circ dX_t$ dla $X_t = t^2 + \int_0^t s dW_s$ w terminach całki Itô.

53. Pokaż, że

$$\int_0^T h(W_t) \circ dW_t = H(W_T) - H(W_0), \quad \text{gdzie } H'(x) = h(x).$$

Wskazówka: zastosuj wzór Itô do $Y_t = H(W_t)$.

Obliczymy różniczkę stochastyczną w sensie Stratonowicza procesu W_t^5 , korzystając ze wzoru

$$d(f(X_t)) = f'(X_t) \circ dX_t.$$

Mamy $d(W_t^5) = 5W_t^4 \circ dW_t$.

54. Oblicz różniczkę stochastyczną w sensie Stratonowicza procesu $\frac{1}{1+X_t^2}$.

PRZYKŁAD. Rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego Stratonowicza

$$dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) \circ dW_t$$

spełniają stochastyczne równanie różniczkowe Itô

$$dX_t = \left(a(X_t) + \frac{1}{2}b(X_t)b'(X_t) \right) dt + b(X_t) dW_t.$$

W drugą stronę: rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego Itô

$$dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dW_t$$

spełniają stochastyczne równanie różniczkowe Stratonowicza

$$dX_t = \left(a(X_t) - \frac{1}{2}b(X_t)b'(X_t) \right) dt + b(X_t) \circ dW_t.$$

Równanie Stratonowicza $dX_t = X_t dt + X_t^3 \circ dW_t$ jest równoważne równaniu Itô postaci $dX_t = \left(X_t + \frac{3}{2}X_t^5 \right) dt + X_t^3 dW_t$.

55. Wykonaj polecenia.

1. Przekształć równanie różniczkowe Stratonowicza $dX_t = X_t dt + 2e^{3X_t} \circ dW_t$ na równoważne równanie Itô.
2. Równanie Langevina z szumem addytywnym ma postać $dX_t = -aX_t dt + b dW_t$. Pokaż, że równoważne równanie Stratonowicza ma identyczną postać.
3. Pokaż, że równania $dX_t = 2X_t \circ dW_t$ i $dX_t = 2X_t dt + 2X_t dW_t$ mają to samo rozwiązanie.