1. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ będzie ruchem Browna. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej

1. $X = 4W_2 - W_4 + W_6$
2. $X = 3W_5 - W_3 - 2W_9$.

2. Oblicz funkcję wartości oczekiwanej i wariancji procesu

1. $X_t = 6t + W_t, \quad t \in [0,T]$
2. $X_t = At + W_t, \quad t \in [0,T],\ \ A$ - zmienna losowa niezależna od $(W_t)_{t\in[0,T]}$ o rozkładzie $N(m, s^2)$.

3. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że podane procesy są również ruchami Browna.

1. $X_t = -W_t,\ t \in [0,T]$
2. $X_t = W_{t+h} - W_h,\ t \in [0,T],\ \ h > 0$ – ustalone
3. $X_t = aW_{t/a^2},\ t \in [0,T],\ \ a > 0$ – ustalone

4. Pokaż, że $\mathbb{E}[W_s W_t] = \min\{s,t\}$ dla $s,t \in [0,T]$.

5. Oblicz funkcję korelacji procesu

1. $X_t = W_t,\ \ t \in [0,T]$.
2. $X_t = \mu t + \sigma W_t,\ \ t \in [0,T]$.
3. $X_t = \dfrac{W_{t+h} - W_t}{h},\ \ t \in [0,T], \quad h > 0$ - ustalone.
4. $X_t = W_t - tW_1,\ \ t \in [0,1]$.

6. Niech $(W_t)_{t\in[0,T]}$ będzie ruchem Browna.

1. Definiujemy proces $X_t = W_t - 5$, $t \in [0,T]$. Oblicz $P(X_3 > 0)$.
2. Definiujemy proces $X_t = W_t + 1$, $t \in [0,T]$. Oblicz $P(X_2 > 2)$.

7. Pokaż, że procesy

1. $X_t = W_t^2 - t,\ \ t \in [0,T]$
2. $X_t = W_t^3 - 3tW_t, \quad t \in [0,T]$

są martyngałami względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, gdzie $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \le s \le t \le T)$.

Niech π_n: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Dla **nielosowych procesów prostych**

$$X_t = c_0\,\mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \qquad \text{gdzie } \ c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \text{ są stałymi}$$

całkę Itô definiujemy wzorem $\displaystyle\int_0^T X_t\,dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$.

Dla **procesów prostych adaptowanych**

$$X_t = \xi_0\,\mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\,\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \qquad \text{gdzie } \ \xi_i \text{ jest } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mierzalny, } \ E[\xi_i^2] < \infty$$

całkę Itô definiujemy wzorem $\displaystyle\int_0^T X_t\,dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$.

Dla procesów X_t **ciągłych, adaptowanych**, spełniających $\displaystyle\int_0^T \mathbb{E}[X_t^2]dt < \infty$ całkę Itô określamy

$$\int_0^T X_t\,dW_t = \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right). \tag{1}$$

8. Oblicz całkę Itô procesu

$$1.\ X_t = \begin{cases} 3, & 0 \le t \le 2 \\ 2, & 2 < t \le 3 \\ -4, & 3 < t \le 5 \end{cases} \qquad\qquad 2.\ Y_t = \begin{cases} 7, & 0 \le t \le 3 \\ 1, & 3 < t \le 8 \\ 2, & 8 < t \le 10 \end{cases}$$

9. Pokaż, że całka Itô nie ma własności monotoniczności.

Wskazówka: Dla $X_t = 0,\ Y_t = 1$ pokaż $P\left(\int_0^1 X_t\, dW_t < \int_0^1 Y_t\, dW_t\right) \neq 1.$

10. (*Granica sum całkowych Riemanna i Itô*) Wiemy, że granica sum Riemanna

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(t_{i+1} - t_i), \quad s_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

aproksymujących całkę funkcji $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ **nie zależy** od wyboru punktu s_i. Jednak granica sum Itô

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad s_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

aproksymujących całkę stochastyczną funkcji $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ **zależy** od wyboru punktu s_i. Aby się o tym przekonać, oblicz podane granice

$$1.\ \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

$$2.\ \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Wskazówka 1: Przekształć powyższe sumy według odpowiedniego wzoru

1. $a(b - a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 - (b - a)^2]$ dla $a = W_{t_i},\ b = W_{t_{i+1}}$.
2. $b(b - a) = \frac{1}{2}[b^2 - a^2 + (b - a)^2]$ dla $a = W_{t_i},\ b = W_{t_{i+1}}$.

Wskazówka 2: Skorzystaj z faktu, że wariacja kwadratowa ruchu Browna na odcinku $[0, t]$ jest równa

$$[W]_t := \lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} \left|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right|^2 = t.$$

Która suma jest stosowana w aproksymacji całki Itô?

11. Korzystając z definicji całki Itô, pokaż $\int_0^T t\, dW_t = TW_T - \int_0^T W_t\, dt.$

Wskazówki:

1. Zdefiniuj $X_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} t_i\, \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t), \quad t_i = \frac{iT}{n}$ oraz zastosuj (1).

2. Skorzystaj z równości $c(b - a) = (db - ca) - b(d - c)$ dla $a = W_{t_i},\ b = W_{t_{i+1}},\ c = t_i,\ d = t_{i+1}$.

3. Skorzystaj z zadania 10, by określić granicę sum Riemanna: $\lim_{\pi_n} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_{i+1}}(t_{i+1} - t_i)$.

1. Lemat Itô dla funkcji $f(W_t)$

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds,$$
$$df(W_t) = f'(W_t)\, dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t)\, dt$$

2. Lemat Itô dla funkcji $f(t, W_t)$

$$f(t, W_t) = f(0,0) + \int_0^t \left(f_s(s, W_s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, W_s) \right) ds + \int_0^t f_x(s, W_s)\, dW_s,$$
$$df(t, W_t) = \left(f_t(t, W_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) \right) dt + f_x(t, W_t)\, dW_t.$$

12. Zastosuj Lemat Itô do procesów

1. $f(W_t) = W_t^2$
2. $f(W_t) = e^{W_t}$
3. $f(W_t) = \operatorname{arctg}(W_t)$
4. $f(W_t) = \sinh(W_t)$
5. $f(W_t) = \dfrac{1}{1 + W_t^2}$
6. $f(W_t) = \dfrac{W_t}{1 + W_t^2}$

13. Korzystając z Lematu Itô, oblicz całki

1. $\int_0^t e^{W_s}\, dW_s$
2. $\int_0^t W_s^k\, dW_s$
3. $\int_0^t \sin(W_s)\, dW_s$

14. Zastosuj Lemat Itô do funkcji

1. $f(t, W_t) = 2 + t + e^{W_t}$
2. $f(t, W_t) = W_t^2 - t$
3. $f(t, W_t) = \sin(t + W_t)$
4. $f(t, W_t) = t\cos(W_t)$
5. $f(t, W_t) = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$
6. $f(t, W_t) = e^{\frac{1}{2}t}\sin(W_t)$

15. Stosując Lemat Itô, oblicz różniczkę stochastyczną procesów

1. $Y_t = (W_t^{(1)})^2 + (W_t^{(2)})^2$, gdzie $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ jest dwuwymiarowym ruchem Browna.
2. $Y_t = \left(W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + W_t^{(3)},\ (W_t^{(2)})^3 - 5W_t^{(3)} \right)$, gdzie $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ jest trójwymiarowym ruchem Browna.

Proces dyfuzji Itô ma postać (i różniczkę stochastyczną)

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s\,ds + \int_0^t b_s\,dW_s,$$
$$dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t,$$

dla $t \in [0,T]$ i gdzie X_0 jest $\mathcal{F}_0$ −mierzalne, procesy a_t, b_t są $\mathcal{F}_t$ −adaptowane; a_t jest całkowalny, b_t jest całkowalny z kwadratem. Procesy a_t, b_t mogą zależeć również od W_t, X_t.

16. Podany proces Itô przedstaw w postaci różniczkowej

1. $X_t = t + 5W_t$
2. $X_t = t^3 + \displaystyle\int_0^t \frac{1}{1-s}\,dW_s$
3. $X_t = \displaystyle\int_0^t W_s\,ds + \int_0^t \sin(X_s)\,dW_s$

17. Podaj postać procesu Itô X_t i jego różniczkę, gdy

1. $a_t = 0$, $b_t = 1$,
2. $a_t = t$, $b_t = W_t$,
3. $a_t = cX_t$, $b_t = \sigma X_t$.

Jeżeli X_t, Y_t są procesami Itô oraz jeden z nich ma wahanie skończone na $[0,t]$, to $[X,Y]_t = 0$.
Przykład: $X_t = \exp(t)$, $Y_t = W_t$, wtedy $[X,Y]_t = [\exp, W]_t = 0$.

Wariacja kwadratowa ruchu Browna na $[0,t]$ jest równa $[W,W]_t := \lim\limits_{\pi_n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right|^2 = t$.

Rachunek różniczek. Wprowadzamy formalny zapis: $d[X,Y]_t = dX_t\,dY_t$, $d[X,X]_t = (dX_t)^2$. Wtedy

$$(dt)^2 = dt\,dt = 0, \quad dW_t\,dt = 0, \quad (dW_t)^2 = dW_t\,dW_t = dt.$$

Przykład. Obliczymy $\left[e^W, W\right]_t$.

Zaczynamy od różniczki

$$d[e^W, W]_t = d(e^{W_t})dW_t = \left(e^{W_t}dW_t + \frac{1}{2}e^{W_t}dt\right)dW_t = e^{W_t}dW_t dW_t + \frac{1}{2}e^{W_t}dtdW_t = e^{W_t}dt,$$

gdzie skorzystaliśmy z lematu Itô i rachunku różniczek. Przechodzimy na całki

$$\begin{aligned} d[e^W, W]_t &= e^{W_t}dt \\ \int_0^t d[e^W, W]_s &= \int_0^t e^{W_s}ds \\ [e^W, W]_t - [e^W, W]_0 &= \int_0^t e^{W_s}ds \\ [e^W, W]_t &= \int_0^t e^{W_s}ds. \end{aligned}$$

18. Oblicz

1. $\left[W^2, W\right]_t$
2. $[X,X]_t$ dla $X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$
3. $[X,Y]_t$ dla $X_t = \sin(W_t)$, $Y_t = W_t^2$

3. Lemat Itô dla funkcji $f(X_t)$, gdzie X_t jest procesem Itô

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d[X,X]_s,$$
$$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, d[X,X]_t.$$

4. Lemat Itô dla funkcji $f(t, X_t)$, gdzie X_t jest procesem Itô

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f_s(s,X_s) ds + \int_0^t f_x(s,X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s,X_s)\, d[X,X]_s,$$
$$df(t,X_t) = f_t(t,X_t) dt + f_x(t,X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t,X_t)\, d[X,X]_t.$$

5. Lemat Itô dla funkcji $f(X_t, Y_t)$, gdzie X_t, Y_t są procesami Itô

$$df(X_t,Y_t) = f_x(X_t,Y_t)\, dX_t + f_y(X_t,Y_t)\, dY_t + \frac{1}{2} f_{xx}(X_t,Y_t)\, d[X,X]_t + \frac{1}{2} f_{yy}(X_t,Y_t)\, d[Y,Y]_t + f_{xy}(X_t,Y_t)\, d[X,Y]_t.$$

19. Pokaż, że jeżeli $dX_t = a_t\, dt + b_t\, dW_t$, to wzory Itô 3. i 4. przyjmują postać

1. $df(X_t) = \Big(a_t f'(X_t) + \frac{1}{2} b_t^2 f''(X_t)\Big) dt + b_t f'(X_t)\, dW_t$
2. $df(t,X_t) = \Big(f_t(t,X_t) + a_t f_x(t,X_t) + \frac{1}{2} b_t^2 f_{xx}(t,X_t)\Big) dt + b_t f_x(t,X_t)\, dW_t.$

20. Zastosuj Lemat Itô do funkcji

1. $f(X_t) = X_t^3$ dla $X_t = 2t + W_t$
2. $f(X_t) = e^{X_t}$ dla $X_t = t + 3\int_0^t s dW_s$

21. Zastosuj Lemat Itô do funkcji

1. $f(t,X_t) = X_t^2 - t$ dla $X_t = 5t + W_t$
2. $f(t,X_t) = tX_t^2$ dla $X_t = \int_0^t s dW_s$

22. Niech X_t będzie procesem Itô. Zastosuj wzór Itô do X_t^2, a następnie wyznacz stąd wariację kwadratową $[X,X]_t$.

23. Pokaż, że jeżeli
$$dX_t = a_t^X dt + b_t^X dW_t,$$
$$dY_t = a_t^Y dt + b_t^Y dW_t,$$
to wzór Itô 5 przyjmuje postać
$$df(X_t,Y_t) = f_x(X_t,Y_t)\, dX_t + f_y(X_t,Y_t)\, dY_t + \frac{1}{2} f_{xx}(X_t,Y_t)(b_t^X)^2 dt + \frac{1}{2} f_{yy}(X_t,Y_t)(b_t^Y)^2\, dt + f_{xy}(X_t,Y_t) b_t^X b_t^Y\, dt.$$

24. Zastosuj Lemat Itô do funkcji

1. $f(X_t,Y_t) = X_t Y_t$ dla $X_t = t^2 + W_t$, $Y_t = 1 + W_t$.
2. $f(X_t,Y_t) = X_t^2 + Y_t^2 - 2X_t$ dla $X_t = 1 - t$, $Y_t = 4W_t$.

25. Niech $\beta_k(t) = \mathbb{E}[W_t^k]$ dla $k = 0, 1, 2 \ldots$ Korzystając ze wzoru Itô, udowodnij
$$\beta_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t \beta_{k-2}(s) ds, \quad k \geq 2.$$
Oblicz $\mathbb{E}[W_t^4]$ i $\mathbb{E}[W_t^6]$.

Wynik możesz sprawdzić, korzystając z poniższego faktu.
Jeżeli $X \sim N(0, s^2)$, to $\mathbb{E}[X^p] = 0$, p–nieparzyste; $\mathbb{E}[X^p] = s^p(p-1)!!$, p–parzyste.

Wzór na całkowanie przez części. $d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d[X,Y]_t$.

26. Niech $X_t = t^2 + W_t$, $Y_t = t - \int_0^t (s+5)dW_s$. Pokaż, że

$$d(X_tY_t) = \Big(X_t + 2tY_t - t - 5\Big)dt - \Big((t+5)X_t - Y_t\Big)dW_t.$$

27. Niech $X_t = 1 - t$ oraz $Y_t = \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$. Oblicz $d(X_tY_t)$.

28. Niech $X_t = tW_t$ oraz $Y_t = e^{W_t}$. Oblicz $d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)$.

29. Wyprowadź wzór na całkowanie przez części, stosując Lemat Itô do funkcji $f(X_t, Y_t) = X_tY_t$.

Stochastyczny eksponent. Jedynym rozwiązaniem zagadnienia

$$dX_t = X_t dY_t, \quad X_0 = 1 \tag{2}$$

jest

$$X_t = \mathrm{e}^{Y_t - Y_0 - \frac{1}{2}[Y,Y]_t}. \tag{3}$$

Trochę finansów. W chwili $t = 0$ wpłacamy na rachunek bankowy 1 zł. Niech funkcja $x(t)$ oznacza wartość 1 zł w chwili $t > 0$. Jeżeli przez r oznaczymy stopę procentową, to funkcja $x(t)$ spełnia deterministyczne równanie różniczkowe

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = rdt \qquad \text{lub równoważnie} \qquad \frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 1$. Za pomocą rozdzielania zmiennych otrzymujemy rozwiązanie $x(t) = e^{rt}$. Załóżmy teraz, że stopa jest obarczona ryzykiem (np. 1 zł inwestujemy w akcje), co możemy zapisać $r + \xi_t$, gdzie ξ jest białym szumem, formalnie: $\xi_t = \frac{dW_t}{dt}$. Wtedy proces X spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$\frac{dX_t}{dt} = (r + \sigma\xi_t)X_t \qquad \text{co oznacza} \qquad dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{4}$$

z warunkiem początkowym $X_0 = 1$. Rozwiązaniem (4) jest geometryczny ruch Browna

$$X_t = \mathrm{e}^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}. \tag{5}$$

30. Sprawdź poprawność rozwiązania (4). W tym celu

1. zastosuj Lemat Itô do $\ln X_t$, przy założeniu $X_t > 0$;
2. podstaw (4) pod dX_t;
3. pokaż, że $d[X,X]_t = \sigma^2 X_t^2 dt$;
4. przejdź na postać całkową.

W wyniku powyższych kroków otrzymujemy $\ln X_t - \ln X_0 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(W_t - W_0)$, skąd widać wynik.

31. Pokaż, że rozwiązaniem (4) jest (5), korzystając bezpośrednio z (3).

32. Rozwiąż równania

1. $dX_t = (1 + X_t^2)dt, \quad X_0 = 1.$
2. $dX_t = 7X_t dW_t, \quad X_0 = 2.$
3. $dX_t = 3X_t dt + 5X_t dW_t, \quad X_0 = 1.$

Czynnik całkujący 1. Rozważmy równanie stochastyczne postaci

$$dX_t = X_t dt + dW_t, \quad t \in [0, T]. \tag{6}$$

Ponieważ (6) nie można sprowadzić do postaci (2), przenosimy niewiadome na lewą stronę równania (6) i mnożymy obustronnie przez czynnik całkujący e^{-t}:

$$\begin{aligned} dX_t - X_t dt &= dW_t, \\ \mathrm{e}^{-t} dX_t - \mathrm{e}^{-t} X_t dt &= \mathrm{e}^{-t} dW_t. \end{aligned} \tag{7}$$

Zauważmy, że lewa strona (7) jest równa $d\left(\mathrm{e}^{-t} X_t\right)$. Zatem (7) zapisujemy równoważnie

$$\begin{aligned} d\left(\mathrm{e}^{-t} X_t\right) &= \mathrm{e}^{-t} dW_t \\ \int_0^t d\left(\mathrm{e}^{-s} X_s\right) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-s} dW_s \\ \mathrm{e}^{-t} X_t - \mathrm{e}^0 X_0 &= \int_0^t \mathrm{e}^{-s} dW_s \\ X_t &= X_0 \mathrm{e}^t + \int_0^t \mathrm{e}^{t-s} dW_s. \end{aligned}$$

33. Pokaż, że $d\left(\mathrm{e}^{-t} X_t\right) = \mathrm{e}^{-t} dX_t - \mathrm{e}^{-t} X_t dt$.

34. Rozwiąż równanie $dX_t = 5X_t dt + 2dW_t$, $X_0 = 1$, korzystając z czynnika całkującego.

Czynnik całkujący 2. Rozważmy równanie stochastyczne postaci

$$dX_t = dt + \alpha X_t dW_t, \quad t \in [0, T], \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Ponieważ (8) nie można sprowadzić do postaci (2), mnożymy (8) przez czynnik całkujący $F_t = \mathrm{e}^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}$

$$\begin{aligned} F_t dX_t &= F_t dt + \alpha F_t X_t dW_t, \\ F_t dX_t - \alpha F_t X_t dW_t &= F_t dt. \end{aligned} \tag{9}$$

35. Pokaż, że $d\left(F_t X_t\right) = F_t dX_t - \alpha F_t X_t dW_t$ i dokończ (9).

36. Rozwiąż równanie $dX_t = dt - 4X_t dW_t$, $X_0 = 3$, korzystając z czynnika całkującego.

Rozważmy ogólne równanie liniowe

$$dX_t = \left(\alpha_t + \beta_t X_t\right) dt + \left(\gamma_t + \delta_t X_t\right) dW_t, \quad t \in [0, T], \tag{10}$$

gdzie α, β, γ, δ są danymi ciągłymi procesami adaptowanymi. Pokażemy, że rozwiązaniem tego równania jest

$$\begin{aligned} X_t &= U_t \left(X_0 + \int_0^t \frac{\alpha_s - \delta_s \gamma_s}{U_s} ds + \int_0^t \frac{\gamma_s}{U_s} dW_s \right), \\ U_t &= \exp\left(\int_0^t (\beta_s - \frac{1}{2}\delta_s^2) ds + \int_0^t \delta_s dW_s \right). \end{aligned} \tag{11}$$

37. Udowodnij wzór na rozwiązanie ogólnego równania liniowego stochastycznego. W tym celu

1. Najpierw rozważ przypadek $\alpha_t = 0$, $\gamma_t = 0$. Wtedy (10) przyjmuje postać $dU_t = \beta_t U_t dt + \delta_t U_t dW_t$. Podaj rozwiązanie tego równania.
2. W przypadku ogólnym rozwiązania szukamy w postaci $X_t = U_t V_t$, gdzie

$$dU_t = \beta_t U_t dt + \delta_t U_t dW_t, \tag{12}$$
$$dV_t = a_t dt + b_t dW_t. \tag{13}$$

   Należy znaleźć procesy a_t, b_t. Przyjmij $V_0 = X_0$. Zastosuj całkowanie przez części do $d(U_t V_t)$, podstaw (12), (13), uporządkuj i porównaj z (10).

38. Korzystając z rozwiązania równania ogólnego (10), podaj rozwiązanie

1. równania typu Langevina: $dX_t = a_t X_t dt + dW_t$, gdzie a_t jest ciągłym procesem adaptowanym;
2. równania mostu Browna: $dX_t = \dfrac{b - X_t}{T - t} dt + dW_t,\ t \in [0, T],\ X_0 = a,\ X_T = b.$

Przykład. (Stochastyczny logarytm)

Proces $e^{W_t - \frac{1}{2}t}$ jest stochastycznym *eksponentem* ruchu Browna W_t.

Ruch Browna W_t jest stochastycznym *logarytmem* procesu $e^{W_t - \frac{1}{2}t}$.

Obliczymy stochastyczny logarytm procesu $U_t = e^{W_t}$.

I sposób.

Przypomnijmy, że eksponent stochastyczny U procesu X spełnia $dU_t = U_t dX_t,\ U_0 = 1$.

Z definicji stochastyczny logarytm X procesu $U \neq 0$ spełnia $dX_t = \dfrac{dU_t}{U_t},\ X_0 = 0$.

Zatem korzystając z lematu Itô

$$dX_t = \frac{dU_t}{U_t} = \frac{d(e^{W_t})}{e^{W_t}} = \frac{e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt}{e^{W_t}} = dW_t + \frac{1}{2} dt.$$

Stąd stochastyczny logarytm X procesu $U_t = e^{W_t}$ dany jest wzorem $X_t = W_t + \frac{1}{2}t$.

II sposób.

Zastosujemy wzór

$$X_t = \ln\left(\frac{U_t}{U_0}\right) + \int_0^t \frac{d[U, U]_s}{2U_s^2}. \tag{14}$$

Z lematu Itô i rachunku różniczek

$$d[U, U]_t = d[e^W, e^W]_t = \left(d(e^{W_t})\right)^2 = \left(e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt\right)^2 = e^{2W_t} dt.$$

Podstawiamy do wzoru (14)

$$X_t = \ln\left(\frac{e^{W_t}}{1}\right) + \int_0^t \frac{d[e^W, e^W]_s}{2e^{2W_s}} = W_t + \int_0^t \frac{e^{2W_s}}{2e^{2W_s}} ds = W_t + \frac{1}{2} t.$$

39. Oblicz stochastyczny logarytm procesu $U_t = W_t^2 + 1$ dwoma sposobami przedstawionymi w przykładzie.

40. Niech X_t będzie procesem Itô takim, że $a_t = X_t + 3$, $b_t^2 = 4X_t$. Przy założeniu, że $X_t \geq 0$ znajdź stochastyczne równanie różniczkowe spełnione przez proces $Y_t = \sqrt{X_t}$.

41. Znajdź stochastyczne równanie różniczkowe, które spełnia proces

1. $X_t = X_0\, e^{at + bW_t}$, *Wskazówka:* Zastosuj lemat Itô do e^{at+bx}
2. $X_t = \sin(aW_t + \arcsin X_0)$, *Wskazówka:* Zastosuj lemat Itô do $\sin(ax + b)$
3. $X_t = \sinh(t + W_t + C)$, gdzie $C = \operatorname{arcsinh} X_0$, *Wskazówka:* Zastosuj lemat Itô do $\sinh(t + x)$

Odpowiedzi:

1. $dX_t = \left(a + \dfrac{b^2}{2}\right) X_t dt + bX_t dW_t$
2. $dX_t = -\dfrac{1}{2} a^2 X_t dt + a\sqrt{1 - X_t^2}\, dW_t$
3. $dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \dfrac{1}{2} X_t\right) dt + \left(\sqrt{1 + X_t^2}\right) dW_t$

Przykład. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie nieliniowego równania różniczkowego

$$\begin{aligned} dX_t &= \ln(1+X_t^2)\,dt + \mathbf{1}_{\{X_t>0\}}\,X_t\,dW_t, \\ X_0 &= x_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że zagadnienie

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t, \\ X_0 &= Z, \end{aligned}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie, jeżeli spełnione są warunki

1. $|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le C(1+|x|)$ dla pewnej stałej $C>0$,
2. $|\mu(t,x)-\mu(t,y)| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le L|x-y|$ dla pewnej stałej $L>0$,
3. Z jest zmienną losową niezależną od ruchu Browna oraz $\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$.

Rozwiązanie.

Mamy $\mu(t,x) = \ln(1+x^2)$, $\sigma(t,x) = x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}$.

Ad. 1. Mamy

$$\begin{aligned} |\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| &= |\ln(1+x^2)| + |x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}| \\ &= \ln(1+x^2) + |x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}| \\ &\le \ln(1+x^2) + |x| \\ &= |x|\left(\frac{\ln(1+x^2)}{|x|}+1\right) \\ &\le |x|\,(C+1) \qquad \text{(trzeba pokazać, że istnieje taka stała } C>0) \\ &= \widetilde{C}\,|x| \qquad (\widetilde{C} = C+1) \\ &\le \widetilde{C}(1+|x|). \end{aligned}$$

Teraz wykażemy, że $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{|x|} \le C$ dla pewnej dodatniej stałej C.

Zauważmy, że f jest ciągła i dodatnia na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ponadto

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x} \overset{H}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2} \overset{H}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{-x} \overset{H}{=\!=} \lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{1+x^2} \overset{H}{=\!=} \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

Również

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x} \overset{H}{=\!=} \lim_{x\to0^+}\frac{2x}{1+x^2} = 0, \\ \lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+x^2)}{-x} \overset{H}{=\!=} \lim_{x\to0^-} -\frac{2x}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

czyli $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

Zatem f jest ograniczona.

Ad. 2. Mamy

$$|\mu(t,x)-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|=|\ln(1+x^2)-\ln(1+y^2)|+|x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}\;-y\cdot\mathbf{1}_{\{y>0\}}\,|.$$

Funkcja $f(t)=\ln(1+t^2)$ jest różniczkowalna. Zatem z twierdzenia o wartości średniej dla $x<y$ istnieje $\xi\in(x,y)$ takie, że

$$f(y)-f(x)=f'(\xi)(y-x).$$

Mamy

$$f'(\xi)=\frac{2\xi}{1+\xi^2},\qquad |f'(\xi)|=\left|\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right|\le 1,\quad \text{bo}\;\; 2\xi\le 1+\xi^2,\quad \text{a to wynika z}\;\; 1+\xi^2-2\xi=(1-\xi)^2\ge 0.$$

Zatem $|f(y)-f(x)|=|f'(\xi)||y-x|\le|y-x|$.
Teraz pokażemy, że

$$|x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}\;-y\cdot\mathbf{1}_{\{y>0\}}\,|\le|x-y|.$$

Niech $x>0$ i $y>0$. Wtedy $|x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}\;-y\cdot\mathbf{1}_{\{y>0\}}\,|=|x-y|$.
Niech $x>0$ i $y<0$. Wtedy $|x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}\;-y\cdot\mathbf{1}_{\{y>0\}}\,|=|x|\le|x+(-y)|$.
Niech $x<0$ i $y>0$. Wtedy $|x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}\;-y\cdot\mathbf{1}_{\{y>0\}}\,|=|-y|=|y|\le|y+(-x)|$.
Niech $x<0$ i $y<0$. Wtedy $|x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}\;-y\cdot\mathbf{1}_{\{y>0\}}\,|=0\le|x-y|$.

Ostatecznie mamy

$$|\mu(t,x)-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|=|\ln(1+x^2)-\ln(1+y^2)|+|x\cdot\mathbf{1}_{\{x>0\}}\;-y\cdot\mathbf{1}_{\{y>0\}}\,|\le 2|x-y|.$$

Ad. 3. Zmienna losowa $Z=x_0$ jest funkcją stałą, a więc niezależną od ruchu Browna i $\mathbb{E}[|x_0|^2]=x_0^2<\infty$.

42. Wykaż, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie nieliniowego równania różniczkowego

$$\begin{aligned} dX_t &= \operatorname{arctg}(X_t)\,dt+\sin(X_t)\,dW_t,\\ X_0 &= x_0\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Przykład. *(Generator dyfuzji)*
Generator procesu dyfuzji, czyli procesu spełniającego równanie różniczkowe stochastyczne

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \tag{15}$$

dany jest wzorem

$$L_t f(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + \mu(t, x)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x), \tag{16}$$

gdzie f jest dowolną funkcją klasy $C^{1,2}$. Generator dyfuzji jest więc operatorem różniczkowym drugiego rzędu stowarzyszonym z równaniem (15).

Wyznaczymy generator ruchu Browna. Mamy $X_t = W_t$, zatem $dX_t = dW_t$ i porównując z (20), otrzymujemy $\mu(t, X_t) = 0$, $\sigma(t, X_t) = 1$. Wstawiamy do (16)

$$L_t f(t, x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x).$$

43. Wyznacz generator procesu

1. $X_t = at + bW_t$, $a, b \in \mathbb{R}$
2. $X_t = \mathrm{e}^{(a-\frac{1}{2}b^2)t + bW_t}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Przykład. *(Martyngały)*
Co należy dodać do X_t^2, aby otrzymać martyngał? Podamy wzór ogólny dla procesu dyfuzji, a następnie dla $X_t = W_t$. Skorzystamy z następującego twierdzenia.

Niech X_t będzie rozwiązaniem (15), gdzie μ i σ spełniają warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną ze stałą niezależną od czasu, niech $|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ oraz niech X posiada funkcję tworzącą momenty. Wtedy martyngałem jest proces

$$M_{f,t} = f(t, X_t) - \int_0^t \left(L_s f(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) \right) ds. \tag{17}$$

Mamy

$$f(t, x) = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.$$

Wstawiamy do (16)

$$L_t f(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x) \cdot 2 + \mu(t, x) \cdot 2x = \sigma^2(t, x) + 2x\mu(t, x).$$

Zatem

$$M_{f,t} = X_t^2 - \int_0^t \left(\sigma^2(s, X_s) + 2X_s\mu(s, X_s) + 0\right) ds.$$

Aby otrzymać martyngał, do X_t^2 należy dodać $-\int_0^t \left(\sigma^2(s, X_s) + 2X_s\mu(s, X_s)\right) ds$.

Niech teraz $X_t = W_t$.

Wtedy do W_t^2 należy dodać: $-\int_0^t \left(\sigma^2(s, X_s) + 2X_s\mu(s, X_s)\right) ds = -\int_0^t (1 + 2W_s \cdot 0)\, ds = -t.$

44. Niech X_t będzie procesem Itô. Co należy dodać do $\operatorname{arctg} X_t$, aby otrzymać martyngał? Podaj wzór ogólny dla dowolnego procesu Itô, a następnie dla

1. $X_t = W_t$,
2. X_t o różniczce $dX_t = 3X_t dt + t dW_t$.

Przykład. *(Wzór Dynkina)*

Za pomocą funkcji tworzącej momenty i wzoru Dynkina wykażemy, że $\displaystyle\int_0^1 s\,dW_s$ ma rozkład $N(0, \frac{1}{3})$.

Wprowadźmy oznaczenie: $X_t = \displaystyle\int_0^t s\,dW_s$ dla $t \leq 1$.

Aby wykazać, że X_t ma rozkład normalny, obliczymy funkcje tworzące momenty $M_{X_t}(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right]$ zmiennych losowych X_t dla $t \leq 1$. W tym celu skorzystamy ze wzoru Dynkina.

Wzór Dynkina. Niech X_t będzie rozwiązaniem RRS: $dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t$ przy odpowiednich założeniach. Wtedy dla każdego $t \in [0, T]$ zachodzi

$$\mathbb{E}\left[f(t, X_t)\right] = f(0, X_0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(L_s f(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)\right) ds\right].$$

Przyjmujemy więc $f(t, x) = f(x) = e^{ux}$ i obliczamy generator

$$L_t f(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x) f''(x) + \mu(t, x) f'(x) = \frac{1}{2} t^2 u^2\, e^{ux},$$

ponieważ $dX_t = t\,dW_t$, a stąd $\mu(t, X_t) = 0$, $\sigma(t, X_t) = t$. Ponadto $X_0 = 0$ oraz $f(X_0) = f(0) = 1$. Podstawiamy do wzoru Dynkina

$$\mathbb{E}\left[f(X_t)\right] = \mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right] = 1 + \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{1}{2} s^2 u^2\, e^{uX_s}\,ds\right] = 1 + \frac{1}{2}u^2 \int_0^t s^2\,\mathbb{E}\left[e^{uX_s}\right] ds.$$

Wprowadzając oznaczenie $h(t) = \mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right]$, mamy

$$h(t) = 1 + \frac{1}{2}u^2 \int_0^t s^2 h(s)\,ds.$$

Różniczkujemy

$$h'(t) = \frac{1}{2}u^2 t^2 h(t), \quad h(0) = 1.$$

Rozwiązujemy, rozdzielając zmienne

$$\frac{dh}{h} = \frac{1}{2}u^2 t^2\,dt$$
$$\ln|h(t)| - \ln|h(0)| = \frac{1}{2}u^2 \int_0^t s^2\,ds$$
$$h(t) = e^{\frac{1}{2}u^2 \cdot \frac{1}{3}t^3}.$$

Zatem

$$M_{X_t}(u) = \mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right] = e^{\frac{1}{2}u^2 \cdot \frac{1}{3}t^3}. \tag{18}$$

Przypomnijmy, że funkcja tworząca momenty zmiennej losowej Y o rozkładzie normalnym $N(m, s^2)$ dana jest wzorem

$$M_Y(u) = \mathbb{E}[e^{uY}] = e^{um + \frac{1}{2}u^2 s^2} \tag{19}$$

Porównując (18) i (19), stwierdzamy, że dla $t \leq 1$ zmienna X_t ma rozkład normalny ze średnią $m = 0$ i wariancją $s^2 = \frac{1}{3}t^3$. Zatem dla $t = 1$: $X_1 \sim N(0, \frac{1}{3})$.

45. Za pomocą funkcji generującej momenty i wzoru Dynkina wykaż, że $\displaystyle\int_0^1 W_s\,ds$ ma rozkład $N(0, \frac{1}{3})$.

Wskazówka: Najpierw przekształć $\int_0^1 W_s\,ds$ na całkę stochastyczną, tj. $\int_0^1 (1 - s)\,dW_s$. W tym celu możesz użyć wzoru na całkowanie przez części.

Przykład. *(Wzór Feynmana–Kaca)*

Korzystając ze wzoru Feynmana-Kaca, podamy probabilistyczną reprezentację rozwiązania $f(t,x)$ równania

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = rf, \quad f(T,x) = x^2, \quad \sigma > 0,\ \mu > 0,\ r > 0. \tag{20}$$

Wzór Feynmana-Kaca. Niech $r(t,x)$, $g(x)$ będą funkcjami ciągłymi, ograniczonymi oraz

$$C(t,x) := \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r(s,X_s)ds} g(X_T) \mid X_t = x \right].$$

Załóżmy, że istnieje rozwiązanie RRCz: $L_t f(t,x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = r(t,x) f(t,x)$ z warunkiem $f(T,x) = g(x)$. Wtedy rozwiązanie $f(t,x)$ zagadnienia jest jedyne oraz $f(t,x) = C(t,x)$.

Zauważmy, że dwa pierwsze składniki lewej strony równania (20) tworzą generator pewnego procesu X_t, takiego że $\mu(t,x) = \mu x$, $\sigma(t,x) = \sigma x$. Stąd równanie

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

którego rozwiązaniem jest $X_t = X_0 \, e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$. Dodatkowo zauważmy, że $r(t,x) = r$. Korzystamy ze wzoru Feynmana–Kaca

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r(s,X_s)\,ds} g(X_T) \mid X_t = x \right] = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r\,ds} X_T^2 \mid X_t = x \right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)} X_T^2 \mid X_t = x \right] = e^{-r(T-t)} \, \mathbb{E}\left[X_T^2 \mid X_t = x \right]. \end{aligned}$$

Metodą "dodać–odjąć" przekształcamy X_T

$$\begin{aligned} X_T &= X_0 \, e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T} \left[e^{-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - \sigma W_t} \, e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t} \right] \\ &= \left(X_0 \, e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t} \right) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T} \, e^{-\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t - \sigma W_t} \\ &= X_t \, e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_T^2 \mid X_t = x \right] &= \mathbb{E}\left[X_t^2 \, e^{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + 2\sigma(W_T - W_t)} \mid X_t = x \right] \\ &= \mathbb{E}\left[x^2 \, e^{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + 2\sigma(W_T - W_t)} \right] \\ &= x^2 \, e^{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \, \mathbb{E}\left[e^{2\sigma(W_T - W_t)} \right]. \end{aligned}$$

Dla ustalonego $t \in [0,T]$ zmienna losowa $W_T - W_t$ ma rozkład $N(0, T-t)$, a jej funkcja generująca momenty dana jest wzorem $\mathbb{E}\left[e^{a(W_T - W_t)} \right] = e^{\frac{1}{2}a^2(T-t)}$. Przyjmujemy $a = 2\sigma$ i otrzymujemy

$$\mathbb{E}\left[e^{2\sigma(W_T - W_t)} \right] = e^{\frac{1}{2}\cdot 4\sigma^2(T-t)} = e^{2\sigma^2(T-t)}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_T^2 \mid X_t = x \right] &= x^2 \, e^{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \, \mathbb{E}\left[e^{2\sigma(W_T - W_t)} \right] \\ &= x^2 \, e^{\left(2\mu - \sigma^2\right)(T-t)} \, e^{2\sigma^2(T-t)} = x^2 \, e^{\left(2\mu + \sigma^2\right)(T-t)} \end{aligned}$$

oraz

$$f(t,x) = e^{-r(T-t)} \, \mathbb{E}\left[X_T^2 \mid X_t = x \right] = e^{-r(T-t)} x^2 \, e^{\left(2\mu + \sigma^2\right)(T-t)} = x^2 \, e^{\left(2\mu + \sigma^2 - r\right)(T-t)}.$$

46. Korzystając ze wzoru Feynmana-Kaca, podaj probabilistyczną reprezentację rozwiązania $f(t,x)$ równania

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad f(T,x) = x^2.$$

Przykład. *(Dyfuzja jednorodna w czasie)* Niech X_t będzie procesem dyfuzji o współczynnikach $\mu(x) = cx$, $\sigma(x) = 1$, gdzie c jest pewną liczbą. Wyznaczymy generator L dla X_t i pokażemy, że proces

$$X_t^2 - 2c \int_0^t X_s^2 \, ds - t \tag{21}$$

jest martyngałem.

Proces dyfuzji X_t o współczynnikach $\mu(x) = cx$, $\sigma(x) = 1$ spełnia $dX_t = cX_t dt + dW_t$. Generator tego procesu dany jest wzorem

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x) f''(x) + \mu(x) f'(x) = \frac{1}{2} f''(x) + cx f'(x).$$

Dla dyfuzji jednorodnej (przy odpowiednich założeniach) martyngałem jest proces postaci

$$M_{f,t} = f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s) ds. \tag{22}$$

Porównując (21) i (22) zauważamy, że należy przyjąć $f(x) = x^2$. Wtedy generator przyjmuje postać $Lf(x) = 1 + 2cx^2$ oraz proces

$$M_{f,t} = X_t^2 - \int_0^t \left(1 + 2cX_s^2\right) ds = X_t^2 - t - 2c \int_0^t X_s^2 ds$$

jest martyngałem, co należało wykazać.

Przykład. *(Dyfuzja jednorodna w czasie)* Znajdziemy funkcję $f(x)$ taką, aby proces $f(W_t + t)$ był martyngałem.

Oznaczmy $X_t = W_t + t$. Wtedy $dX_t = dW_t + dt$ oraz $\mu(x) = 1$, $\sigma(x) = 1$.

Szukamy takiej funkcji f, aby $Lf(X_s) = 0$, ponieważ wtedy (22) przyjmie postać $M_{f,t} = f(X_t)$, a to będzie oznaczać, że f jest martyngałem. Mamy zatem

$$\begin{aligned} Lf(x) &= 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x) &= 0, \\ \frac{1}{2} f''(x) + f'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Jest to równanie jednorodne II-rzędu. Piszemy dla niego równanie charakterystyczne $\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda = 0$, skąd otrzymujemy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. A zatem rozwiązaniem jest rodzina funkcji

$$f(x) = C_1 \mathrm{e}^{0 \cdot x} + C_2 \mathrm{e}^{-2 \cdot x} = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-2x}, \quad C_1, C_2 - \text{stałe}.$$

Martyngałem jest proces $C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-2(W_t + t)}$ dla dowolnych stałych C_1, C_2.

47. Niech X_t będzie procesem dyfuzji o współczynnikach $\mu(x) = 2x$, $\sigma^2(x) = 4x$. Wyznacz generator L dla X_t. Rozwiąż równanie $Lf = 0$ i podaj martyngał $M_{f,t}$.

Przykład. *(Dyfuzja jednorodna w czasie)* Korzystając z

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,X_0 = x\right] - f(x)}{t}, \tag{23}$$

znajdziemy generator ruchu Browna, gdy $f(x) = x$.

Mamy $X_t = W_t$ oraz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,X_0 = x\right] &= \mathbb{E}\left[f(W_t)\,|\,W_0 = x\right] \\
&= \mathbb{E}\left[W_t\,|\,W_0 = x\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(W_t - W_0) + W_0\,|\,W_0 = x\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(W_t - W_0)|\,W_0 = x\right] + \mathbb{E}\left[W_0\,|\,W_0 = x\right] \\
&= \mathbb{E}[W_t - W_0] + x \\
&= x,
\end{aligned}$$

gdzie równość

$$\mathbb{E}\left[(W_t - W_0)|\,W_0 = x\right] = \mathbb{E}[W_t - W_0]$$

wynika z niezależności przyrostu $W_t - W_0$ od przeszłości. Wtedy

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}\left[f(X_t)\,|\,X_0 = x\right] - f(x)}{t}, = \lim_{t\to 0} \frac{x - x}{t} = 0.$$

Sprawdzenie. Wiemy, że generator ruchu Browna jest postaci $Lf(x) = \frac{1}{2}f''(x)$. Dla funkcji $f(x) = x$ jest on rzeczywiście równy 0.

48. Korzystając z (23) znajdź generator dla ruchu Browna, gdy $f(x) = e^x$.

49. Korzystając z (23), znajdź generator dla geometrycznego ruchu Browna

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

gdy $f(x) = x^n$, $x > 0$, n – stała.

Przykład. Wyrazimy całkę Stratonowicza $\int_0^t W_s \circ dW_s$ w terminach całki Itô, korzystając ze wzoru

$$\text{w postaci całkowej:} \quad \int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s \, dX_s + \frac{1}{2}[X,Y]_t,$$

$$\text{w postaci różniczkowej:} \quad Y_t \circ dX_t = Y_t \, dX_t + \frac{1}{2} d[X,Y]_t.$$

Mamy

$$\int_0^t W_s \circ dW_s = \int_0^t W_s \, dW_s + \frac{1}{2}[W,W]_t = \int_0^t W_s \, dW_s + \frac{1}{2}t,$$

$$W_t \circ dW_t = W_t \, dW_t + \frac{1}{2} dt.$$

50. Wyraź całkę Stratonowicza $\int_0^t W_t \circ dX_t$ dla $X_t = t^2 + \int_0^t s \, dW_s$ w terminach całki Itô.

51. Pokaż, że

$$\int_0^T h(W_t) \circ dW_t = H(W_T) - H(W_0), \quad \text{gdzie } H'(x) = h(x).$$

Wskazówka: zastosuj wzór Itô do $Y_t = H(W_t)$.

Obliczymy różniczkę stochastyczną w sensie Stratonowicza procesu W_t^5, korzystając ze wzoru

$$d(f(X_t)) = f'(X_t) \circ dX_t.$$

Mamy $d(W_t^5) = 5W_t^4 \circ dW_t$.

52. Oblicz różniczkę stochastyczną w sensie Stratonowicza procesu $\dfrac{1}{1+X_t^2}$.

Przykład. Rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego Stratonowicza

$$dX_t = a(X_t) \, dt + b(X_t) \circ dW_t$$

spełniają stochastyczne równanie różniczkowe Itô

$$dX_t = \left(a(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t) \right) dt + b(X_t) \, dW_t.$$

W drugą stronę: rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego Itô

$$dX_t = a(X_t) \, dt + b(X_t) \, dW_t$$

spełniają stochastyczne równanie różniczkowe Stratonowicza

$$dX_t = \left(a(X_t) - \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t) \right) dt + b(X_t) \circ dW_t.$$

Równanie Stratonowicza $dX_t = X_t \, dt + X_t^3 \circ dW_t$ jest równoważne równaniu Itô postaci $dX_t = (X_t + \frac{3}{2} X_t^5) \, dt + X_t^3 \, dW_t$.

53. Wykonaj polecenia.

1. Przekształć równanie różniczkowe Stratonowicza $dX_t = X_t \, dt + 2e^{3X_t} \circ dW_t$ na równoważne równanie Itô.
2. Równanie Langevina z szumem addytywnym ma postać $dX_t = -aX_t \, dt + b \, dW_t$. Pokaż, że równoważne równanie Stratonowicza ma identyczną postać.
3. Pokaż, że równania $dX_t = 2X_t \circ dW_t$ i $dX_t = 2X_t \, dt + 2X_t \, dW_t$ mają to samo rozwiązanie.

Przykład. *(Czas wyjścia z przedziału)* Obliczymy $P_x(T_b < T_a)$ dla ruchu Browna, $a = -2$, $b = 3$, $T_a = \inf\{t > 0 : \ X_t = a\}$, $T_b = \inf\{t > 0 : \ X_t = b\}$.

Przypomnijmy następujące twierdzenie. Niech (X_t) będzie procesem dyfuzji $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, gdzie $\sigma(x) > 0$ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ oraz $X_0 = x \in (a, b)$. Wtedy

$$P_x(T_b < T_a) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}, \qquad S(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{\xi} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}\, ds} d\xi.$$

Skorzystamy z wniosku z tego twierdzenia. Jeżeli (X_t) jest procesem dyfuzji bez dryfu, tzn. $dX_t = \sigma(X_t)dW_t$, to

$$P_x(T_b < T_a) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Mamy $X_t = W_t$, $\mu(s) = 0$, $\sigma(s) = 1$, $X_0 = W_0 = 0 \in (-2, 3)$. Wtedy $P_0(T_3 < T_{-2}) = \frac{2}{5}$.

54. Oblicz $P_x(T_b < T_a)$ dla ruchu Browna z dryfem, gdy $\mu(x) = \mu$, $\sigma^2(x) = \sigma^2$. Następnie podaj odpowiedź, przyjmując $a = 1$, $b = 4$, $\mu = 2$, $\sigma = 0.5$.

Przykład. *(Równania z wybuchem)* Pokażemy, że rozwiązanie równania różniczkowego

$$dX_t = 3X_t^2 dt + dW_t$$

wybucha w skończonym czasie.

Przypomnijmy następujące twierdzenie. Niech (X_t) będzie procesem dyfuzji $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, gdzie funkcje $\mu(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ są lokalnie ograniczone, funkcja $\sigma(\cdot)$ jest ciągła i dodatnia. Proces dyfuzji wybucha wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje x_0, dla którego spełniony jest jeden z warunków

$$\int_{-\infty}^{x_0} \left[e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}\, ds} \left(\int_{x}^{x_0} \frac{1}{\sigma^2(y)} e^{\int_{x_0}^{y} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}\, ds} dy \right) \right] dx < \infty$$

lub

$$\int_{x_0}^{\infty} \left[e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}\, ds} \left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sigma^2(y)} e^{\int_{x_0}^{y} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}\, ds} dy \right) \right] dx < \infty$$

Mamy $\mu(s) = 3s^2$, $\sigma(s) = 1$ oraz

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\int_{x_0}^{x} e^{2y^3}\, dy}{e^{2x^3}} dx$$

Oznaczmy $h(x) = \frac{\int_{x_0}^{x} e^{2y^3}\, dy}{e^{2x^3}}$ i korzystając z reguły de l'Hospitala obliczmy granicę:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_{x_0}^{x} e^{2y^3}\, dy}{e^{2x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{6x^2} = 0.$$

Zatem

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\int_{x_0}^{x} e^{2y^3}\, dy}{e^{2x^3}} dx \approx \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{6x^2} dx = \frac{1}{6x_0} < \infty.$$

55. Zbadaj, czy rozwiązanie równania różniczkowego

$$dX_t = X_t^2 dt + X_t dW_t$$

wybucha w skończonym czasie.