**Wydział Matematyki, Fizyki
i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego**

Niezmienniki topologiczne stowarzyszone z rodzinami funkcji analitycznych

Aleksandra Nowel

Praca doktorska napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Zbigniewa Szafrańca

Gdańsk 2005

matematycy wiedzą dobrze, że ich rzemiosło
polega na tej samej tajemnicy, co rzemiosło poetów...
Hugo Steinhaus

Spis treści

Wstęp

Istnieje wiele własności lokalnych niezmienników topologicznych charakteryzujących rzeczywiste zbiory algebraiczne. Najprostsza z nich została odkryta przez Sullivana [42] w latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku — ogniwo zbioru algebraicznego w każdym jego punkcie ma parzystą charakterystykę Eulera.

Akbulut i King pokazali, że w wyższych wymiarach nie jest to warunek dostateczny na to, by zbiór był homeomorficzny ze zbiorem algebraicznym. Od tej pory skonstruowano wiele topologicznych niezmienników opisujących rzeczywiste zbiory algebraiczne i semialgebraiczne. Parusiński i McCrory znaleźli sposób opisu takich warunków przy użyciu pierścienia funkcji konstruowalnych i pewnych operatorów dających uogólnienie charakterystyki Eulera ogniwa zbioru algebraicznego. Zdefiniowali oni funkcje algebraicznie konstruowalne, które łączą algebrę rzeczywistą z topologią zbiorów algebraicznych.

Parusiński i Szafraniec podali [40], [41] charakteryzację funkcji algebraicznie konstruowalnych, która jest bardzo skuteczna w dowodzeniu własności tych funkcji. Pokazali oni, że funkcja algebraicznie konstruowalna jest sumą znaków skończonej liczby wielomianów.

Funkcje algebraicznie konstruowalne definiuje się używając charakterystyki Eulera włókien odwzorowań regularnych między zbiorami algebraicznymi. W dowodzie swojego twierdzenia Parusiński i Szafraniec wykorzystali między innymi własności tych zbiorów i odwzorowań, które wynikają z tego, że pierścień wielomianów jest noetherowski. Nasuwa się pytanie, czy używając podobnych metod da się badać niezmienniki topologiczne zbiorów zdefiniowanych za pomocą funkcji z algebr Ω – noetherowskich. Definicja takich algebr zostala podana przez El Khadiri i Tougerona [19].

W niniejszej pracy zajmiemy sie opisem ogniwa zbioru zer rodziny funkcji należących do algebry Ω – noetherowskiej. Korzystając z własności tych algebr oraz z argumentów analogicznych do argumentów stosowanych przez Parusińskiego i Szafrańca pokażemy, że dla rodziny $\mathcal{F}$ funkcji należących do algebry Ω – noetherowskiej (spełniającej pewne dodatkowe warunki) istnieją w tej algebrze takie funkcje $v_1, v_2, \ldots, v_s$, że dla $\omega \in \Omega$ połowa charakterystyki Eulera ogniwa zbioru $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(0)$ w punkcie ω jest równa sumie znaków funkcji $v_1, v_2, \ldots, v_s$ w punkcie ω.

Chciałabym wyrazić ogromną wdzięczność mojemu promotorowi Panu Profesorowi Zbigniewowi Szafrańcowi, który zaispirował powstanie tej pracy, zainteresował mnie opisanym w niej problemem i poświęcił wiele czasu, żeby przekazać mi wiedzę potrzebną do zajmowania się tą tematyką. Dziękuję za ogromne zaangażowanie, opiekę, cenne wskazówki, rady i sugestie, a także za życzliwość, wsparcie, zachętę i cierpliwość.

Chciałabym także podziękować Panu Profesorowi Adamowi Parusińskiemu z Université d'Angers oraz zespołowi kierującemu programem *Research Training Network Real Algebraic and Analytic Geometry.* W trakcie stażu „pre–doc” sfinansowanego przez ten program, który odbywałam pod kierunkiem Profesora Parusińskiego, miałam możliwość zajmowania się redagowaniem niniejszej pracy.

Serdecznie dziękuję wszystkim tym, dzięki którym mogę zajmować się matematyką — moim Rodzicom i Siostrze, moim Przyjaciołom, Profesorom, Koleżankom i Kolegom. Moja praca nie byłaby możliwa bez ich pomocy, wsparcia i wiary we mnie.

Historia problemu i opis wyników

Niech X będzie rzeczywistym zbiorem semialgebraicznym w $\mathbb{R}^n$ i niech $x \in X$. Oznaczmy przez $S_{x,\epsilon}$ sferę w $\mathbb{R}^n$ o środku w x i promieniu ϵ. Na mocy lematu [7, 9.3.6] o lokalnie stożkowej postaci zbioru semialgebraicznego, przekrój zbioru X z kulą o środku w punkcie x i promieniu ϵ jest dla dostatecznie małych ϵ homeomorficzny ze stożkiem o podstawie $S_{x,\epsilon} \cap X$, zatem dla dostatecznie małych ϵ typ topologiczny przestrzeni $S_{x,\epsilon} \cap X$ nie zależy od ϵ. Przestrzeń ta jest nazywana *ogniwem zbioru X w punkcie $x \in X$* i oznaczana przez $\mathrm{lk}(x, X)$.

W 1971 roku Sullivan [42] dowiódł, że charakterystyka Eulera ogniwa rzeczywistego zbioru algebraicznego w dowolnym punkcie jest liczbą parzystą:

Twierdzenie 1 *Jeśli X jest rzeczywistym zbiorem algebraicznym w $\mathbb{R}^n$ oraz $x \in X$, to charakterystyka Eulera $\chi(\mathrm{lk}(x, X))$ jest parzysta.*

Przykład 2 *Zbiór $X \subset \mathbb{R}^2$*

$$X = \{(x, y) \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \mid y \geq 0,\ x = 0\}$$

nie może być homeomorficzny ze zbiorem algebraicznym, ponieważ jego ogniwem w punkcie $(0, 0)$ jest zbiór składający się z trzech punktów, zatem jego charakterystyka Eulera jest równa trzy, czyli jest liczbą nieparzystą.

Oryginalny dowód Sullivana opierał się na użyciu kompleksyfikacji. Sullivan pokazał, że ogniwo kompleksyfikacji $X_{\mathbb{C}}$ w punkcie x ma charakterystykę Eulera równą 0 i korzystając z tego, że $\mathrm{lk}(x, X)$ jest zbiorem punktów stałych sprzężenia $\mathrm{lk}(x, X_{\mathbb{C}})$, udowodnił, że

$$\chi(\mathrm{lk}(x, X)) \equiv \chi(\mathrm{lk}(x, X_{\mathbb{C}})) \mod 2.$$

Ogólniejsze twierdzenie, o tym, że w dowolnej rodzinie rzeczywistych zbiorów algebraicznych charakterystyka Eulera włókna odwzorowania regularnego jest generycznie stała mod 2, zostało udowodnione przez Akbuluta i Kinga [1, 2.3.2] (zob. też [2]):

Twierdzenie 3 *Niech X, Y będą rzeczywistymi zbiorami algebraicznymi i niech Y będzie nierozkładalny. Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym. Istnieje taki podzbiór algebraiczny $Z \subset Y$, że $\dim Z < \dim Y$ i charakterystyka Eulera $\chi(f^{-1}(y))$ jest stała $\mod 2$ dla $y \in Y \setminus Z$.*

Wynik Sullivana jest szczególnym przypadkiem tego twierdzenia dla $Y = \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ i $f(x) = \|x - x_0\|^2$. Dla $y < 0$ włókno $f^{-1}(y)$ jest zbiorem pustym, dla dostatecznie małych $y > 0$ włókno $f^{-1}(y)$ jest równe $\operatorname{lk}(x_0, X)$.

Benedetti i Dedò [4] oraz Akbulut i King [1] pokazali, że warunek Sullivana dla zwartych zbiorów triangulowalnych wymiaru mniejszego lub równego 2 jest nie tylko konieczny, ale też wystarczający na to, żeby zbiór był homeomorficzny z rzeczywistym zbiorem algebraicznym. Akbulut i King [2] skonstruowali topologiczne niezmienniki, definiujące warunki konieczne i dostateczne na to, żeby zwarta 3-wymiarowa triangulowalna przestrzeń topologiczna była homeomorficzna z rzeczywistym zbiorem algebraicznym.

Badaniem niezmienników topologicznych związanych z rzeczywistymi zbiorami algebraicznymi w kontekście wyniku Sullivana zajmowali się również Coste i Kurdyka [14], [15]. Udowodnili oni następujące twierdzenie (Coste [13] udowodnił je najpierw w przypadku $\dim X - \dim V \leq 2$):

Twierdzenie 4 *Niech X będzie rzeczywistym zbiorem algebraicznym, V jego nierozkładalnym podzbiorem algebraicznym. Istnieje taki podzbiór algebraiczny $W \subset V$, że $\dim W < \dim V$ oraz charakterystyka Eulera $\chi(\operatorname{lk}(x, X))$ jest stała $\operatorname{mod} 4$ dla $x \in V \setminus W$.*

Coste i Kurdyka zdefiniowali niezmienniki mod 2^k stowarzyszone ze zbiorami algebraicznymi, które dla $k = 2$, $k = 3$ pokrywają się z niezmiennikami Akbuluta i Kinga. Nową interpretację i uogólnienie tych niezmienników (charakterystyka Eulera ogniw iterowanych) podali McCrory i Parusiński w [34]. Stosując w [33] metody używane przez Coste'a i Kurdykę, skonstruowali oni również nowe ogólniejsze niezmienniki Akbuluta i Kinga, wprowadzając pojęcie funkcji algebraicznie konstruowalnych (są to funkcje $\phi(w) = \sum_{i=1}^{s} m_i \chi(f_i^{-1}(w))$, gdzie $m_i \in \mathbb{Z}$, $f_i : X_i \longrightarrow W$ są regularnymi właściwymi odwzorowaniami między zbiorami algebraicznymi) i dowodząc wielu ich własności.

Bardzo użyteczną charakteryzację funkcji algebraicznie konstruowalnych podali Parusiński i Szafraniec [40], [41] oraz Coste i Kurdyka [16]. Pokazali oni, ze funkcje algebraicznie konstruowalne na zbiorze algebraicznym W są reprezentowane przez sumy znaków skończonej liczby wielomianów na W:

Twierdzenie 5 *Niech W będzie rzeczywistym zbiorem algebraicznym. Funkcja $\phi : W \longrightarrow \mathbb{Z}$ jest algebraicznie konstruowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wielomiany $g_1, g_2, \ldots, g_s$ na W, że*

$$\phi(w) = \operatorname{sgn} g_1(w) + \operatorname{sgn} g_2(w) + \ldots + \operatorname{sgn} g_s(w),$$

gdzie $\operatorname{sgn} g(w)$ oznacza znak g w punkcie w.

Pierwszy dowód Parusińskiego i Szafrańca [40] wykorzystywał twierdzenie Eisenbuda i Levine'a [17] oraz formułę Khimshiashvili [26]. Krótszy i prostszy dowód tych samych autorów w [41] jest oparty na twierdzeniu Hermite'a [23], [24] i Sylvestera [43] o związku liczby pierwiastków wielomianu z sygnaturą stowarzyszonej z nim formy kwadratowej.

Bonnard [10], [11] podała ograniczenie na minimalną liczbę wielomianów potrzebnych do reprezentacji funkcji algebraicznie konstruowalnej oraz scharakteryzowała te wielomiany, podając kryterium pozwalające sprawdzać, czy funkcja konstruowalna jest algebraicznie konstruowalna.

McCrory i Parusiński wprowadzili też funkcje Nasha konstruowalne i zastosowali je jako narzędzie do opisu topologii zbiorów łukowo symetrycznych, zdefiniowanych przez Kurdykę [27]. Pokazali, że zbiór S jest łukowo symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja charakterystyczna jest Nasha konstruowalna. Bonnard udowodniła [8], że funkcje Nasha konstruowalne na zbiorze zwartym są sumami znaków funkcji semialgebraicznych łukowo analitycznych (funkcja jest łukowo analityczna, jeśli jej złożenie z dowolnym łukiem analitycznym jest funkcją analityczną). W przypadku wymiaru 2 założenie o zwartości dziedziny można opuścic (zob. [12]).

Bonnard i Pieroni [12] badały związek pomiędzy funkcjami analitycznie konstruowalnymi (zdefiniowanymi analogicznie do funkcji algebraicznie konstruowalnych McCrory'ego i Parusińskiego) a sumami znaków funkcji analitycznych. Inaczej niż w przypadku algebraicznym, funkcje analitycznie konstruowalne nie muszą być semianalitycznie konstruowalne (tzn. postaci $\phi(x) = \sum_{i=1}^{s} m_i \mathbf{1}_{X_i}$, $m_i \in \mathbb{Z}$, X_i semianalityczne). Bonnard i Pieroni pokazały, że w wymiarze 2 wśród funkcji semianalitycznie konstruowalnych klasy funkcji analitycznie konstruowalnych i sum znaków funkcji analitycznych się pokrywają.

* * *

Badając rzeczywiste zbiory algebraiczne często dowodzi się najpierw, że pewne własności zachodzą „generycznie" tzn. wszędzie poza właściwym podzbiorem algebraicznym. Następnie stosowana jest indukcja względem wymiaru zbioru. Żeby zastosować podobny sposób w przypadku rzeczywistych zbiorów analitycznych wykorzystamy własności rodzin noetherowskich i algebr noetherowskich zdefiniowanych przez El Khadiri i Tougerona [19].

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zwartym zbiorem semianalitycznym i niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną rodziną rzeczywistych funkcji analitycznych zdefiniowanych w otoczeniu zbioru Ω. Każdemu punktowi $\omega \in \Omega$ przyporządkowujemy kiełek analityczny w punkcie ω $Y_\omega = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(0)$ oraz kiełek analityczny w punkcie 0 $X_\omega = \{x \mid x+\omega \in Y_\omega\}$. Podobnie jak dla zbiorów semialgebraicznych, na mocy własności lokalnie stożkowej postaci zbiorów semianalitycznych, ogniwo zbioru semianalitycznego jest dobrze zdefiniowane, zatem także w tym przypadku dla dostatecznie małego ϵ typ topologiczny przestrzeni $S_\epsilon^{n-1} \cap X_\omega$ (gdzie S_ϵ^{n-1} oznacza sferę w $\mathbb{R}^n$ o środku w zerze i promieniu ϵ) nie zależy od ϵ i możemy rozważać ogniwo $\mathrm{lk}(0, X_\omega)$. Celem niniejszej pracy jest pokazanie, że istnieją takie funkcje analityczne $v_1, v_2, \ldots, v_s$ zdefiniowane w otoczeniu zbioru Ω, że dla każdego $\omega \in \Omega$

$$\frac{1}{2}\chi(\mathrm{lk}(\omega, Y_\omega)) = \frac{1}{2}\chi(\mathrm{lk}(0, X_\omega)) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn} v_i(\omega).$$

Wynik ten jest prawdziwy w ogólniejszym przypadku, kiedy $\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji analitycznych należących do spełniającej pewne dodatkowe warunki (zob. 4.14) algebry Ω–noetherowskiej, np.:

– algebry funkcji Nasha (semialgebraicznych funkcji analitycznych) na Ω, gdzie Ω jest otwartym zbiorem semialgebraicznym w $\mathbb{R}^n$,

– algebry $\mathbb{R}[x][f_1, \ldots, f_q]$, gdzie $\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ jest pierścieniem wielomianów na $\mathbb{R}^n$, $f_i = e^{Q_i}$, $Q_i \in \mathbb{R}[x]$,

– algebry funkcji analitycznych i jednocześnie subanalitycznych (tzn. takich, których wykresy są zbiorami subanalitycznymi) na Ω, gdzie Ω jest otwartym subanalitycznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ relatywnie zwartym.

W powyższych przypadkach funkcje $v_1, v_2, \ldots, v_s$ można wybrać w danej algebrze Ω–noetherowskiej.

Rezultat ten umożliwia przeniesienie niektórych wyników Parusińskiego i McCrory'ego [33], [35], Parusińskiego i Szafrańca [40] oraz Coste'a i Kurdyki [16], dotyczących funkcji algebraicznie konstruowalnych i lokalnych własności topologicznych zbiorów algebraicznych, na przypadek rodzin noetherowskich kiełków analitycznych.

Główne wyniki zaprezentowane w pracy zostaną opublikowane w artykule [39].

Rozdział 1

Wprowadzenie

W tym rozdziale sformułujemy definicje i twierdzenia, które będą wykorzystywane w rozdziałach następnych. Będzie to jedynie krótki przegląd znanych faktów z algebry oraz geometrii algebraicznej i analitycznej, bez przytaczania dowodów, które można znaleźć w książkach [3], [7], [29], [37], [38] oraz artykule [5].

Zdefiniujemy kiełki funkcji i zbiorów, zbiory algebraiczne, analityczne i semianalityczne i przytoczymy ich podstawowe własności. Podamy również pewne własności kiełków zbiorów analitycznych i kiełków funkcji holomorficznych. Omówimy rozkład prymarny ideałów (odp. podmodułów) w pierścieniu (odp. module) noetherowskim jako analogię dla rozkładu kiełków analitycznych na składowe nierozkładalne. Na koniec przypomnimy pojęcia lokalnego stopnia topologicznego odwzorowania w zerze i charakterystyki Eulera zbioru i sformułujemy twierdzenia Khimshiashvili i Eisenbuda–Levine'a.

Sprecyzujemy również terminologię i oznaczenia, których będziemy używać w dalszej części pracy.

W podrozdziale 1.2.4 przedstawione będą dowody kilku własnych wyników, dotyczących szczególnych własności kiełków pewnych zbiorów analitycznych w $\mathbb{C}^n$ (lematy 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.20 oraz wniosek 1.22). Dowody te zamieszczone są również w [39].

1.1 Kiełki zbiorów i funkcji

Definicja Niech T będzie przestrzenią topologiczną i niech $a \in T$. Definiujemy następującą relację równoważności w klasie wszystkich podzbiorów przestrzeni T: zbiory E_1, E_2 są ze sobą w relacji, jeśli $E_1 \cap U = E_2 \cap U$ dla pewnego otwartego otoczenia U punktu a. Klasę abstrakcji zbioru E nazywamy *kiełkiem zbioru E w punkcie a* i oznaczamy przez E_a.

Relacja zawierania, działania skończonej sumy i skończonego przekroju zbiorów, różnicy zbiorów i uzupełnienia zbioru i ich elementarne własności przenoszą się w naturalny sposób na kiełki w punkcie a. W tym kontekście rolę zbioru pustego pełni kiełek zbioru pustego w a, a rolę całej przestrzeni — jej kiełek w punkcie a. Mamy zatem $E_a \cup F_a = (E \cup F)_a$, $E_a \cap F_a = (E \cap F)_a$ itd., zawieranie $E_a \subset F_a$ oznacza, że istnieje takie otoczenie U punktu a, że $E \cap U \subset F \cap U$.

Kiełki zbiorów analitycznych (w zależności od kontekstu zespolonych lub rzeczywistych — zob. rozdział 1.2) będziemy nazywać *kiełkami analitycznymi.*

Definicja Niech A będzie kiełkiem zbioru w punkcie $a \in T$ i niech X będzie dowolnym zbiorem. Definiujemy następującą relację równoważności w klasie wszystkich funkcji zdefiniowanych na reprezentantach A o wartościach w X: funkcje f_1, f_2 są ze sobą w relacji, jeśli $f_1 = f_2$ na pewnym reprezentancie kiełka A. Klasę abstrakcji funkcji f nazywamy *kiełkiem funkcji f na A* i oznaczamy przez f_A.

Zatem dla każdej funkcji f, której dziedzina zawiera A, kiełek $f_A = (f|_{\tilde{A}})_A$ jest dobrze zdefiniowany, gdzie $\tilde{A}$ oznacza reprezentanta kiełka A.

W przypadku, kiedy X jest pierścieniem (odp. modułem nad pierścieniem R), powyższa relacja jest zgodna z dodawaniem i mnożeniem funkcji (lub odp. mnożeniem funkcji przez elementy z R): $f_A + g_A = (f+g)_A$, $f_A g_A = (fg)_A$ (odp. $\zeta f_A = (\zeta f)_A$). W rezultacie w zbiorze kiełków funkcji na A o wartościach w X otrzymujemy strukturę pierścienia (odp. modułu nad pierścieniem R).

W przypadku kiedy A jest kiełkiem całej przestrzeni, tzn. $A = T_a$, kiełek f_A funkcji f na A nazywamy *kiełkiem funkcji f w punkcie a* i oznaczamy f_a. Będziemy również stosować oznaczenie $f : (T, a) \longrightarrow (X, b)$, gdzie $b = f(a)$.

Podobnie jak kiełki zbioru i funkcji w jednym punkcie możemy zdefiniować kiełki zbioru w pewnym podzbiorze tego zbioru i funkcji na kiełku zbioru w pewnym jego podzbiorze. Definiujemy następującą relację równoważności w klasie wszystkich zbiorów w przestrzeni topologicznej T: zbiory E_1, E_2 są ze sobą w relacji, jeśli $E_1 \cap U = E_2 \cap U$ dla pewnego otwartego otoczenia U podzbioru A. Klasę abstrakcji zbioru E nazywamy *kiełkiem zbioru E w podzbiorze A* i oznaczamy przez E_A. Kiełki funkcji na takich kiełkach zbiorów definiujemy analogicznie jak kiełki funkcji na kiełkach zbiorów w punkcie.

1.2 Zbiory algebraiczne i semialgebraiczne, analityczne i semianalityczne

1.2.1 Zbiory algebraiczne i semialgebraiczne

Niech $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ oznacza pierścień wielomianów zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$.

Definicja Zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *zbiorem algebraicznym*, jeśli jest on

postaci
$$X = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \mid P_i(x) = 0\}.$$
gdzie $P_i \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ dla $i = 1, \ldots, k$.

Ideałem podzbioru $S \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy ideał
$$\mathcal{I}(S) = \{P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \mid \forall_{x \in S}\ P(x) = 0\}.$$
Zbiorem zer podzbioru $B \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ nazywamy zbiór
$$V(B) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall_{P \in B}\ P(x) = 0\}.$$
Jeśli $B = \{P_1, \ldots, P_k\}$, to oznaczamy $V(B) = V(P_1, \ldots, P_k)$.

Niech I będzie ideałem w $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ generowanym przez wielomiany $P_1, \ldots, P_k$. Zbiór algebraiczny
$$V(I) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall_{f \in I}\ f(x) = 0\}$$
nazywamy *zbiorem zer ideału I*. Nie zależy on od wyboru generatorów i pokrywa się ze zbiorem $V(P_1, \ldots, P_k)$.

Dla dowolnego zbioru algebraicznego $A \subset \mathbb{R}^n$ istnieje taki wielomian P w pierścieniu $R[x_1, \ldots, x_n]$, że $A = V(P)$.

Definicja Zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *zbiorem semialgebraicznym*, jeśli jest on postaci
$$X = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\{x \mid P_i(x) = 0\} \cap \bigcap_{j=1}^{k_i} \{x \mid Q_{ij}(x) > 0\} \right).$$
gdzie $P_i, Q_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k_i$.

1.2.2 Zbiory analityczne i semianalityczne

Niech M będzie rozmaitością analityczną rzeczywistą (odp. zespoloną). Dla otwartego podzbioru $U \subset M$ oznaczmy przez $\mathcal{A}(U)$ (odp. $\mathcal{H}(U)$) pierścień rzeczywistych funkcji analitycznych na U (odp. zespolonych funkcji holomorficznych na U).

Definicja Zbiór $X \subset M$ nazywamy *zbiorem analitycznym*, jeśli dla każdego $a \in M$ istnieją jego otoczenie U i funkcje $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}(U)$ (odp. $\mathcal{H}(U)$) takie, że
$$X \cap U = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \mid f_i(x) = 0\}.$$

Zbiór analityczny jest zawsze domknięty w M.

Twierdzenie 1.1 [37, Corollary V 2.1] *Niech $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$ będzie ciągiem zstępującym zbiorów analitycznych w zbiorze otwartym $U \subset \mathbf{k}^n$, gdzie $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ lub $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Ciąg ten stabilizuje się na każdym zbiorze zwartym zawartym w U.*

Wniosek 1.2 [37, Corollary V 2.2] *Dla dowolnej rodziny $\{A_\alpha\}$ zbiorów analitycznych w zbiorze otwartym $U \subset \mathbf{k}^n$ zbiór $\bigcap A_\alpha$ jest zbiorem analitycznym w U.*

Definicja Niech $U \subset M$ będzie zbiorem otwartym. *Stratyfikacją zbioru U* nazywamy taką lokalnie skończoną rodzinę zbiorów $\{A_k\}$, że:

(1) U jest sumą rozłączną zbiorów A_k;

(2) każdy zbiór A_k jest spójną podrozmaitoscią M;

(3) *(„Warunek brzegu")* jeśli $A_k \cap \overline{A_l} \neq \emptyset$, to $A_k \subset \overline{A_l}$ i $\dim A_k < \dim A_l$.

Zbiory A_k nazywamy *stratami* tej stratyfikacji.

Jeśli dana jest rodzina $\{X_i\}_{i \in I}$ podzbiorów U, to mówimy, że stratyfikacja jest *zgodna* z tą rodziną, jeśli każdy zbiór X_i jest sumą stratów tej stratyfikacji.

Załóżmy, że M jest rozmaitością **rzeczywistą**.

Definicja Zbiór $X \subset M$ nazywamy *zbiorem semianalitycznym*, jeśli dla każdego $a \in M$ istnieją jego otoczenie U oraz funkcje $g_i, f_{ij} \in \mathcal{A}(U)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k_i$, takie, że

$$X \cap U = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\{x \mid g_i(x) = 0\} \cap \bigcap_{j=1}^{k_i} \{x \mid f_{ij}(x) > 0\} \right).$$

Zbiory semianalityczne posiadają następujące własności:

1. Składowe spójności zbioru semianalitycznego są semianalityczne.
2. Rodzina składowych spójności zbioru semianalitycznego jest lokalnie skończona.
3. Zbiór semianalityczny jest lokalnie spójny.
4. Domknięcie i wnętrze zbioru semianalitycznego jest semianalityczne.
5. Zbiory semianalityczne są triangulowalne (zob. [30]).

Twierdzenie 1.3 ([5, Corollary 2.11]) *Niech $\{X_i\}$ będzie lokalnie skończoną rodziną semianalitycznych podzbiorów M. Istnieje taka stratyfikacja $\{A_k\}$ rozmaitości M, że A_k są podzbiorami semianalitycznym i analitycznymi podrozmaitosciami M oraz $\{A_k\}$ jest* zgodna *z $\{X_i\}$.*

Mając stratyfikację $\{A_k\}$ zbioru semianalitycznego X, możemy zdefiniować jego *wymiar:* $\dim X = \max_k \dim A_k$. Definicja jest niezależna od wyboru stratyfikacji, $\dim X = d$ wtedy i tylko wtedy, gdy X zawiera zbiór otwarty homeomorficzny z otwartą kulą w $\mathbb{R}^d$, a nie zawiera żadnego zbioru otwartego homeomorficznego z otwartą kulą w $\mathbb{R}^e$, $e > d$.

Twierdzenie 1.4 ([29, Proposition 19.2] Lemat o wyborze łuku) *Jeżeli A jest podzbiorem semianalitycznym rzeczywistej rozmaitości analitycznej M i $a \in \overline{A}$ nie jest jego punktem izolowanym, to istnieje taki łuk λ klasy C^1, o końcu a, że $\lambda \setminus \{a\} \subset A$.*

Fakt, że rzut zbioru semianalitycznego nie musi być zbiorem semianalitycznym, stał się motywacją do wprowadzenia i badania własności szerszej klasy zbiorów:

Definicja Podzbiór $X \subset M$ nazywamy *zbiorem subanalitycznym,* jeśli dla każdego punktu z M istnieje takie otoczenie U, że $X \cap U$ jest rzutem relatywnie zwartego zbioru semianalitycznego (tzn. istnieje rzeczywista rozmaitość analityczna N i relatywnie zwarty zbiór semianalityczny $A \subset M \times N$ takie, że $X \cap U = \pi(A)$, gdzie $\pi : M \times N \longrightarrow M$ jest rzutem).

Zbiory subanalityczne także posiadają własności 1. – 5. wymienione wyżej dla zbiorów semianalitycznych. Każdy zbiór subanalityczny relatywnie zwarty ma skończoną liczbę składowych spójności.

Załóżmy teraz, że M jest rozmaitością **zespoloną** wymiaru n.

Definicja Niepusty zbiór analityczny $V \subset M$ nazywamy *nierozkładalnym,* jeśli nie jest sumą dwóch swoich właściwych podzbiorów, które są analityczne w M. W przeciwnym wypadku zbiór V nazywamy *rozkładalnym.*

Twierdzenie 1.5 ([28, Wniosek IV 2.4, Wniosek IV 2.3]) *Nierozkładalne zbiory analityczne w M są spójne.*

Zbiór analityczny $V \subset M$ jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięciem niepustej spójnej podrozmaitości rozmaitości M.

Twierdzenie 1.6 ([28, Propozycja IV 2.3]) *Niech $V, W \subset M$ będą zbiorami analitycznymi. Jeśli $W \subset V$ i V jest nierozkładalny, to*

$$W \subsetneq V \Leftrightarrow W \ \ \textit{jest nigdziegęsty w } V \Leftrightarrow \dim W < \dim V.$$

Nieskracalnym rozkładem zbioru analitycznego $V \subset M$ na składowe nierozkładalne nazywamy rozkład zbioru V na sumę lokalnie skończonej rodziny takich nierozkładalnych zbiorów analitycznych $V_i \subset M$, że $V_i \not\subset V_j$ dla $i \neq j$.

Twierdzenie 1.7 ([28, Twierdzenie IV 2.4]) *Każdy zbiór analityczny $V \subset M$ posiada jednoznaczny nieskracalny rozkład $V = \bigcup_i V_i$ na składowe nierozkładalne.*

Zbiory V_i nazywamy *składowymi nierozkładalnymi zbioru V.*

Twierdzenie 1.8 ([28, Twierdzenie IV 2.5]) *Niech $V, W \subset M$ będą zbiorami analitycznymi. Zbiór $\overline{V \setminus W}$ jest sumą składowych nierozkładalnych zbioru V, które nie są zawarte w W, zatem jest analityczny.*

Twierdzenie 1.9 ([28, Propozycja IV 8.2]) *Dla dowolnej lokalnie skończonej rodziny $\{W_j\}$ zbiorów analitycznych w M istnieje taka stratyfikacja M, której strata są zespolonymi podrozmaitościami M, a ich domknięcia zbiorami analitycznymi, i która jest zgodna z tą rodziną.*

1.2.3 Zbiory analitycznie konstruowalne

Załóżmy, że M jest rozmaitością **zespoloną** wymiaru n.

Definicja *Zbiorami analitycznie konstruowalnymi w M* nazywamy elementy najmniejszej rodziny podzbiorów rozmaitości M, która zawiera wszystkie zbiory analityczne w M i jest zamknięta ze względu na lokalnie skończoną sumę zbiorów i na dopełnienie zbioru.

Różnica i skończony przekrój zbiorów analitycznie konstruowalnych jest też zbiorem analitycznie konstruowalnym.

Twierdzenie 1.10 ([28, IV 8.4] Lemat o wyborze łuku) *Jeżeli E jest zbiorem analitycznie konstruowalnym oraz $a \in \overline{E}$ nie jest jego punktem izolowanym, to istnieje taki łuk λ klasy C^1, o końcu a, że $\lambda \setminus \{a\} \subset E$.*

Twierdzenie 1.11 ([28, Twierdzenie IV 8.5]) *Domknięcie zbioru analitycznie konstruowalnego jest zbiorem analitycznym. Rodzina domkniętych zbiorów analitycznie konstruowalnych pokrywa się z rodziną zbiorów analitycznych.*

Zbiór $E \subset M$ jest analitycznie konstruowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $E = \bigcup_i (V_i \setminus W_i)$, gdzie $\{V_i\}$ jest lokalnie skończoną rodziną nierozkładalnych zbiorów analitycznych, W_i są zbiorami analitycznymi; ponadto V_i, W_i można wybrać tak, że $W_i \subsetneq V_i$.

1.2.4 Kiełki zespolonych zbiorów analitycznych

Definicja Niech M będzie rozmaitością rzeczywistą (odp. zespoloną) i niech $a \in M$. Pierścień kiełków rzeczywistych funkcji analitycznych (odp. zespolonych funkcji holomorficznych) w a oznaczamy $\mathcal{A}_a$ lub $\mathcal{A}_a(M)$ (odp. $\mathcal{H}_a$ lub $\mathcal{H}_a(M)$).

W szczególności $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ (odp. $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_0(\mathbb{C}^n)$) oznacza pierścień kiełków funkcji holomorficznych w $0 \in \mathbb{R}^n$ (odp. $\mathbb{C}^n$). Zauważmy, że za pomocą izomorfizmu, który kiełkowi funkcji w zerze przyporządkowuje jej rozwinięcie w szereg w zerze, pierścień $\mathcal{A}_n$ (odp. $\mathcal{H}_n$) można identyfikować z pierścieniem $\mathbb{R}\{x_1, \dots x_n\}$ (odp. $\mathbb{C}\{z_1, \dots z_n\}$) szeregów formalnych o współczynnikach rzeczywistych (odp. zespolonych) zbieżnych w otoczeniu zera.

Pierścienie $\mathcal{A}_a$ i $\mathcal{A}_n$ (odp. $\mathcal{H}_a$ i $\mathcal{H}_n$) są izomorficzne, izomorfizm definiuje się za pomocą lokalnego układu współrzędnych ϕ w otoczeniu punktu a:

$\mathcal{A}_a \ni f \mapsto f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{A}_n$ (odp. $\mathcal{H}_a \ni f \mapsto f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{H}_n$).

Pierścienie $\mathcal{A}_a$, $\mathcal{H}_a$ są noetherowskie i lokalne, ideałem maksymalnym jest $\mathbf{m}_a = \{f \in \mathcal{A}_a \mid f(a) = 0\}$ (odp. $\mathbf{m}_a = \{f \in \mathcal{H}_a \mid f(a) = 0\}$).

Niech M będzie rozmaitością *zespoloną*.

Niech $a \in M$ i niech A będzie kiełkiem analitycznym w a. *Ideałem kiełka analitycznego* A nazywamy zbiór

$$\mathcal{I}(A) = \{f \in \mathcal{H}_a \mid f_A = 0\}.$$

Dla dowolnych kiełków analitycznych $A, A_1, \dots, A_k, B$ w punkcie a:

1. $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{I}(A) \supset \mathcal{I}(B)$.
2. $A = B \Leftrightarrow \mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B)$.
3. $\mathcal{I}(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \mathcal{I}(A_1) \cap \ldots \cap \mathcal{I}(A_k)$.
4. $\operatorname{rad} \mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(A)$.

Niech I będzie ideałem w $\mathcal{H}_a$. Ponieważ $\mathcal{H}_a$ jest pierścieniem noetherowskim, to I ma skończoną liczbę generatorów, oznaczmy je przez $f_1, \dots, f_k$. Zatem istnieje wspólne otoczenie punktu a, na którym są określone reprezentanty $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k$ generatorów ideału I.

Kiełek analityczny w a

$$V(I) = V(f_1, \dots, f_k) = \{z \in M \mid \tilde{f}_1 = \ldots = \tilde{f}_k = 0\}_a$$

nie zależy od wyboru generatorów. Nazywamy go *zbiorem zer ideału I*.

Dla dowolnych ideałów $I, I_1, \dots, I_k, J \subset \mathcal{H}_a$ oraz dowolnego kiełka analitycznego A w punkcie a:

1. $I \subset J \Rightarrow V(I) \supset V(J)$.

2. $V(I_1 \cap \ldots \cap I_k) = V(I_1) \cup \ldots \cup V(I_k)$.
3. $V(\operatorname{rad} I) = V(I)$.
4. $V(\mathcal{I}(A)) = A$.
5. $I \subset \mathcal{I}(V(I))$ (zob. 1.12).

Twierdzenie 1.12 [28, III 4.1] (Lokalne twierdzenie Hilberta o zerach) *Niech $a \in M$ i niech I będzie ideałem w pierścieniu $\mathcal{H}_a$. Wtedy*

$$\mathcal{I}(V(I)) = \operatorname{rad} I.$$

W szczególności $\mathcal{I}(V(I)) = I$, jeśli I jest ideałem pierwszym.

Definicja Niepusty kiełek analityczny A w punkcie $a \in M$ nazywamy *nierozkładalnym,* jeśli dla dowolnych kiełków analitycznych A_1, A_2 w a

$$A = A_1 \cup A_2 \ \Rightarrow A = A_1 \text{ lub } A = A_2.$$

Lemat 1.13 ([28, Propozycja II 4.2]) *Kiełek analityczny A jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego ideał $\mathcal{I}(A)$ jest pierwszy.*

Twierdzenie 1.14 ([28, Propozycja II 4.1]) *Każdy kiełek analityczny A przedstawia się jednoznacznie jako suma skończona takich nierozkładalnych kiełków analitycznych A_i, że $A_i \not\subset A_j$ dla $i \neq j$.*

Udowodnimy teraz szczególne własności kiełków pewnych zbiorów analitycznych w $\mathbb{C}^n$, które będziemy wykorzystywać w dalszej części pracy.

Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie kiełkiem funkcji holomorficznej w zerze i niech $r(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$ dla $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Oznaczmy przez $\mathcal{G}$ kiełek w zerze zbioru analitycznego

$$\bigcap_{i<j} \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \det \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial z_i} & \frac{\partial r}{\partial z_j} \\ \frac{\partial f}{\partial z_i} & \frac{\partial f}{\partial z_j} \end{bmatrix} = 0 \right\} = \bigcap_{i<j} \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \det \begin{bmatrix} z_i & z_j \\ \frac{\partial f}{\partial z_i} & \frac{\partial f}{\partial z_j} \end{bmatrix} = 0 \right\},$$

tzn. $\mathcal{G}$ jest kiełkiem zbioru tych $z \in \mathbb{C}^n$, dla których

$$\nabla r(z) = \left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial r}{\partial z_n}(z) \right)$$

oraz $\nabla f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) \right)$ są liniowo zależne. W zależności od kontekstu $\mathcal{G}$ będzie też oznaczać pewnego reprezentanta tego kiełka.

Oznaczmy przez $\mathcal{G}'$ kiełek w punkcie zero zbioru $\overline{\mathcal{G} \setminus f^{-1}(0)}$. Pokażemy, że $\mathcal{G}' \cap f^{-1}(0) = \mathcal{G}' \cap r^{-1}(0)$.

Lemat 1.15 $\mathcal{G} \cap r^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$.

Dowód. Załóżmy, że $(\mathcal{G} \cap r^{-1}(0)) \setminus (\mathcal{G} \cap f^{-1}(0)) \neq \emptyset$. Jest to zbiór analitycznie konstruowalny, zatem na mocy lematu o wyborze łuku 1.10 istnieje taki łuk $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ klasy C^1, że $\gamma(0) = 0$ oraz $\gamma \setminus \{0\} \subset (\mathcal{G} \cap r^{-1}(0)) \setminus (\mathcal{G} \cap f^{-1}(0))$. Zatem $r(\gamma(t)) \equiv 0$. Stąd
(1.1)

$$\frac{d}{dt} r(\gamma(t)) = \left\langle \nabla r(\gamma(t)), \frac{d}{dt}\gamma(t) \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial z_1}(\gamma(t))\frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \ldots + \frac{\partial r}{\partial z_n}(\gamma(t))\frac{d\gamma_n}{dt}(t) \equiv 0,$$

gdzie $\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j$ dla $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$.

Ponieważ $\nabla r(z) = (2z_1, \ldots, 2z_n) \neq 0$ dla $z \neq 0$ oraz $\gamma(t) \in \mathcal{G}$, to z definicji kiełka $\mathcal{G}$

$$\forall_t \ \exists_{c(t) \in \mathbb{C}} \ \nabla f(\gamma(t)) = c(t) \nabla r(\gamma(t)).$$

Zatem z (1.1) mamy

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \frac{d}{dt}\gamma(t)\rangle = c(t)\langle \nabla r(\gamma(t)), \frac{d}{dt}\gamma(t)\rangle \equiv 0,$$

czyli $f \circ \gamma = const$. Ponieważ $(f \circ \gamma)(0) = 0$, to $\gamma \subset f^{-1}(0)$ — sprzeczność.

□

Lemat 1.16 *$\mathcal{G}'$ jest kiełkiem zbioru analitycznego.*

Dowód. Kiełki $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \cap f^{-1}(0)$ są kiełkami zbiorów analitycznych, zatem reprezentant $\mathcal{G} \setminus f^{-1}(0)$ jest zbiorem analitycznie konstruowalnym. Na mocy twierdzenia 1.11 domknięcie zespolone zbioru konstruowalnego analitycznie jest zbiorem analitycznym, zatem reprezentant kiełka $\mathcal{G}'$ jest zbiorem analitycznym.

□

Lemat 1.17 *Niech $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_p$ będą takimi składowymi nierozkładalnymi $\mathcal{G}$, że $\mathcal{G}_i \setminus f^{-1}(0) \neq \emptyset$ dla $i = 1, \ldots, p$. Wtedy $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{G}_p$. Ponadto $\mathcal{G}_i \setminus f^{-1}(0)$ jest gęsty w $\mathcal{G}_i$.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 1.8, $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{G}_p$. Ponieważ kiełki $\mathcal{G}_i$ są nierozkładalne, $\mathcal{G}_i \cap f^{-1}(0)$ jest nigdziegęsty w $\mathcal{G}_i$ zgodnie z twierdzeniem 1.6, zatem $\mathcal{G}_i \setminus f^{-1}(0) = \mathcal{G}_i \setminus (\mathcal{G}_i \cap f^{-1}(0))$ jest gęsty w $\mathcal{G}_i$.

□

Lemat 1.18 *Niech $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_p$ będą zdefiniowane jak w lemacie 1.17. Niech $\mathcal{G}_i \setminus r^{-1}(0) = \bigcup A_{i,k}$ będzie rozkładem na skończoną liczbę rozłącznych podrozmaitości analitycznych (zob. twierdzenie 1.9). Wtedy istnieje otoczenie zera, w którym dla każdych i, k obcięcie r do zbioru $A_{i,k}$ nie ma żadnych punktów krytycznych.*

Dowód. Ustalmy i, k i załóżmy, że w każdym otoczeniu zera zbiór punktów krytycznych $r|_{A_{i,k}}$ jest niepusty. Wtedy jest on analitycznie konstruowalny. Na mocy lematu o wyborze łuku 1.10 istnieje taki łuk γ, że $\gamma(0) = 0$ oraz $\gamma \setminus \{0\}$ jest zawarty w zbiorze punktów krytycznych $r|_{A_{i,k}}$. Zatem funkcja $r|_{A_{i,k}} \circ \gamma$ jest stała. Ponieważ $r(\gamma(0)) = r(0) = 0$, zatem $r|_{A_{i,k}} \circ \gamma \equiv 0$. Otrzymujemy $\gamma \subset A_{i,k} \cap r^{-1}(0) = \emptyset$ — sprzeczność. W konsekwencji w pewnym otoczeniu zera zbiór punktów krytycznych $r|_{A_{i,k}}$ musi być zbiorem pustym.

□

Przypomnijmy definicję warunków Whitneya oraz stratyfikacji Whitneya (zob. np. [7, Definition 9.7.1]). Niech $\mathrm{T}_x X$ oznacza przestrzeń styczną do rozmaitości X w punkcie $x \in X$.

Definicja Niech X i Y będą dwiema rozłącznymi spójnymi podrozmaitościami $\mathbf{k}^n$, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ lub $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, takimi, że $Y \subset \overline{X}$. Niech $y \in Y$ i $k = \dim(X)$.

a) Para (X, Y) spełnia warunek **a** w punkcie y, jeśli dla każdego ciągu $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ w X takiego, że $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = y$ i $\lim_{\nu \to \infty} \mathrm{T}_{x_\nu} X = \tau \in \mathbb{G}_{n,k}(\mathbf{k})$, τ zawiera $\mathrm{T}_y Y$.

b) Para (X, Y) spełnia warunek **b** w punkcie y, jeśli dla każdego ciągu $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ w X i ciągu $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ w Y takich, że $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = \lim_{\nu \to \infty} y_\nu = y$, $\lim_{\nu \to \infty} \mathrm{T}_{x_\nu} X = \tau \in \mathbb{G}_{n,k}(\mathbf{k})$ oraz $\lim_{\nu \to \infty} \mathbf{k}(x_\nu - y_\nu) = \delta \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbf{k})$, zachodzi $\delta \subset \tau$.

Symbol $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbf{k})$ oznacza tu grassmannian (zbiór podprzestrzeni wektorowych wymiaru k przestrzeni $\mathbf{k}^n$), a $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbf{k})$ — przestrzeń rzutową.

Będziemy mówić, że zbiór analityczny posiada *stratyfikację Whitneya*, jeśli istnieje taka jego stratyfikacja, której każde strata X, Y takie, że $Y \subset \overline{X}$, spełniają warunki Whitneya **a** i **b**.

Twierdzenie 1.19 (zob. np. [50, Theorem 19.2], [7, Theorem 9.7.11]). *Każdy zbiór analityczny posiada stratyfikację Whitneya. Dla dowolnej stratyfikacji $(E_i)_{i \in I}$ zbioru analitycznego istnieje taka stratyfikacja Whitneya $(F_j)_{j \in J}$ tego zbioru, że każde stratum E_i jest sumą pewnych stratów z $(F_j)_{j \in J}$.*

Lemat 1.20 $\mathcal{G}' \cap f^{-1}(0) \setminus r^{-1}(0) = \emptyset$.

Dowód. Niech $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_p$ będą zdefiniowane jak w lemacie 1.17. Ustalmy i w zbiorze $\{1, \ldots, p\}$. Pokażemy, że

$$\mathcal{G}_i \cap f^{-1}(0) \setminus r^{-1}(0) = \emptyset.$$

Z twierdzenia 1.19 zbiór $\mathcal{G}_i$ posiada taką stratyfikację Whitneya $\mathcal{G}_i = \bigcup A_{i,j}$, że $\mathcal{G}_i \cap f^{-1}(0)$ oraz $\mathcal{G}_i \setminus r^{-1}(0)$ są sumami stratów. Niech $A_{i,k}$ będzie pewnym stratum zawartym w $\mathcal{G}_i \setminus r^{-1}(0)$. Na mocy lematu 1.18 istnieje takie otoczenie zera, w którym obcięcie $r|_{A_{i,k}}$ jest submersją.

Załóżmy, że $z_0 \in \mathcal{G}_i \cap f^{-1}(0) \setminus r^{-1}(0)$. Niech A będzie takim stratum, że $z_0 \in A$ (wtedy $A \subset \mathcal{G}_i \setminus r^{-1}(0)$, czyli A jest jednym ze stratów $A_{i,k}$) i niech $B \subset \mathcal{G}_i \setminus f^{-1}(0)$ będzie takim stratum, że $A \subset \overline{B}$. Lemat 1.17 implikuje istnienie co najmniej jednego niepustego stratum spełniającego ten warunek.

Używając twierdzenia Thoma–Mathera pokażemy, że z_0 nie jest izolowany w zbiorze $B \cap r^{-1}(r(z_0))$.

Twierdzenie 1.21 (Thom–Mather, zob. [46, Theorem 4.3.1]) *Niech $X = \bigcup X_\alpha$ będzie przestrzenią analityczną, która posiada stratyfikację Whitneya. Dla dowolnego $x \in X_\alpha$, lokalnego zanurzenia $X \subset \mathbb{C}^n$ w otoczenie x i lokalnej holomorficznej retrakcji $\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow X_\alpha$ istnieją otwarte otoczenie U punktu x w $\mathbb{C}^n$ i homeomorfizm zgodny z retrakcją ρ taki, że jeśli $V = U \cap X_\alpha$ oraz $\Pi_2 : (\rho^{-1}(x) \cap X \cap U) \times V \longrightarrow V$ jest rzutem na drugą zmienną, to diagram*

$$\begin{array}{ccc} X \cap U & \simeq & (\rho^{-1}(x) \cap X \cap U) \times V \\ \rho|_{X\cap U} \searrow & & \swarrow \Pi_2 \\ & V & \end{array}$$

jest przemienny.

Homeomorfizm ten indukuje dla każdego $\overline{X}_\beta$ zawierającego X_α analogiczny homeomorfizm

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}_\beta \cap U & \simeq & (\rho^{-1}(x) \cap \overline{X}_\beta \cap U) \times V \\ \rho|_{\overline{X}_\beta\cap U} \searrow & & \swarrow \Pi_2 \\ & V & \end{array} .$$

Zbiór $A \cup B$ spełnia założenia tego twierdzenia. Oznaczmy $k = \dim_{\mathbb{C}} A$, $\tilde{r} = r|_A$. Ponieważ $\tilde{r}$ nie ma punktów krytycznych, to istnieją takie holomorficzne $r_2, \ldots, r_k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, że dla z z pewnego otoczenia z_0 różniczki odwzorowań $\tilde{r}_i = r_i|_A$ tworzą układ liniowo niezależny $\mathrm{d}\tilde{r}(z), \mathrm{d}\tilde{r}_2(z), \ldots, \mathrm{d}\tilde{r}_k(z)$. Przyjmijmy $R = (r, r_2, \ldots, r_k) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k$. Niech $\tilde{R} = R|_A$, wtedy rząd macierzy pochodnej $\mathrm{d}\tilde{R}(z_0)$ wynosi k. Zatem $\tilde{R} : (A, z_0) \longrightarrow (\mathbb{C}^k, R(z_0))$ jest holomorficznym dyfeomorfizmem. Oznaczmy przez $S : (\mathbb{C}^k, R(z_0)) \longrightarrow (A, z_0)$ odwzorowanie odwrotne do $\tilde{R}$.

Definiujemy lokalną retrakcję $\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow A$ jako złożenie $\rho(z) = (S \circ R)(z)$. Na mocy twierdzenia 1.21 istnieje otoczenie U punktu z_0 i homeomorfizm h takie, że dla $V = U \cap A$

$$\begin{array}{ccc} \overline{B} \cap U & \overset{h}{\simeq} & (\rho^{-1}(z_0) \cap \overline{B} \cap U) \times V \\ \rho|_{\overline{B}\cap U} \searrow & & \swarrow \Pi_2 \\ & V & \end{array} .$$

Ponieważ

$$\rho^{-1}(z_0) = (S \circ R)^{-1}(z_0) = R^{-1}(S^{-1}(z_0)) = R^{-1}(\tilde{R}(z_0)) = R^{-1}(R(z_0)),$$

to w otoczeniu z_0 mamy

$$(\rho^{-1}(z_0)\cap\overline{B}\cap U)\times V=(R^{-1}(R(z_0))\cap\overline{B}\cap U)\times V\subset(r^{-1}(r(z_0))\cap\overline{B}\cap U)\times V.$$

Ponieważ $A\subset\overline{B}$, to istnieje taki ciąg $(z_n)\subset B$, że $z_n\to z_0$. Niech ciąg $(y_n)\subset(R^{-1}(R(z_0))\cap\overline{B}\cap U)$ będzie taki, że $z_n=h^{-1}(y_n,\rho(z_n))$. Wtedy $y_n\to z_0$ oraz $(y_n)\subset r^{-1}(r(z_0))$.

Stąd z_0 nie jest punktem izolowanym w $B\cap r^{-1}(r(z_0))$. Lemat o wyborze łuku 1.10 implikuje istnienie takiego łuku γ, że $\gamma\setminus\{z_0\}\subset B\cap r^{-1}(r(z_0))$ i $\gamma(0)=z_0$.

Ponieważ $\gamma\backslash\{z_0\}\subset B\subset\mathcal{G}_i\backslash f^{-1}(0)$, na mocy lematu 1.18 $r|_B$ jest submersją i $r|_B(\gamma(t))\equiv r(z_0)$, to używając takich samych argumentów jak w dowodzie lematu 1.15 możemy wnioskować, że $f|_B$ jest stała wzdłuż γ.

Rzeczywiście, ponieważ $r|_B(\gamma(t))\equiv r(z_0)$, to $\frac{d}{dt}r|_B(\gamma(t))\equiv 0$. Oznaczmy przez $i:B\longrightarrow\mathbb{C}^n$ zanurzenie B w $\mathbb{C}^n$. Mamy wtedy $r|_B=r\circ i$, $f|_B=f\circ i$ oraz

$$\forall_t\ \exists_{c(t)\in\mathbb{C}}\ \nabla f(i(\gamma(t)))=c(t)\nabla r(i(\gamma(t))).$$

Stąd $\mathrm{d}f(i(\gamma(t)))=c(t)\,\mathrm{d}r(i(\gamma(t)))$. Ponieważ

$$\frac{d}{dt}f|_B(\gamma(t))=\frac{d}{dt}(f(i(\gamma(t)))=$$
$$=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial z_1}f(i(\gamma(t)),\ldots,\frac{\partial}{\partial z_n}f(i(\gamma(t))\right),\frac{d}{dt}i(\gamma(t))\right\rangle=$$
$$=\left\langle\nabla f(i(\gamma(t))),\frac{d}{dt}i(\gamma(t))\right\rangle=\left\langle c(t)\nabla r(i(\gamma(t))),\frac{d}{dt}i(\gamma(t))\right\rangle=$$
$$=c(t)\frac{d}{dt}(r(i(\gamma(t)))=c(t)\frac{d}{dt}r|_B(\gamma(t)),$$

gdzie $\langle u,v\rangle=\sum_{j=1}^n u_jv_j$ dla $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{C}^n$, to mamy również $\frac{d}{dt}f|_B(\gamma(t))\equiv 0$, czyli $f|_B$ jest stała wzdłuż γ.

Ponieważ $f(\gamma(0))=f(z_0)=0$, to $f|_B\equiv 0$ wzdłuż γ. Ale $\gamma\setminus\{z_0\}$ jest zawarte w $\mathcal{G}_i\setminus f^{-1}(0)$, sprzeczność. Zatem $\mathcal{G}'\cap f^{-1}(0)\setminus r^{-1}(0)=\emptyset$.

□

Stąd otrzymujemy

Wniosek 1.22 $\mathcal{G}'\cap f^{-1}(0)=\mathcal{G}'\cap r^{-1}(0)$.

1.3 Pierścienie i moduły noetherowskie. Rozkład prymarny

Definicja Pierścień R nazywamy *noetherowskim,* jeśli każdy jego ideał jest skończenie generowany.

Definicja *Ideałem prymarnym* pierścienia R nazywamy ideał właściwy I spełniający następujący warunek:

$$xy \in I \Rightarrow (x \notin I \Rightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}}\ y^n \in I).$$

Oczywiście każdy ideał pierwszy jest prymarny.

Jeśli ideał J jest prymarny, to jego radykał $I = \operatorname{rad} J$ jest ideałem pierwszym. Mówimy wtedy, że *J jest I – prymarny.*

Jeśli ideały $J_1, \ldots, J_k$ są I – prymarne, to ideał $\bigcap_{i=1}^k J_i$ też jest I – prymarny.

Definicja *Ideałem nierozkładalnym* pierścienia R nazywamy ideał właściwy I spełniający następujący warunek: jeśli $I = I_1 \cap I_2$, to $I = I_1$ lub $I = I_2$.

W pierścieniu noetherowskim ideały nierozkładalne są prymarne.

Przypomnijmy (zob. twierdzenie 1.14), że każdy kiełek analityczny A w rozmaitości zespolonej M posiada rozkład $A = \bigcup_{i=1}^q A_i$ na składowe nierozkładalne. Zatem jego ideał $\mathcal{I}(A)$ w pierścieniu noetherowskim $\mathcal{H}_a$ jest przekrojem $\mathcal{I}(A) = \bigcap_{i=1}^q \mathcal{I}(A_i)$. Ideały $\mathcal{I}(A_i)$ są nierozkładalne, ponieważ jeśli $\mathcal{I}(A_i) = I_1 \cap I_2$, to $A_i = V(\mathcal{I}(A_i)) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$. Wtedy np. $A_i \subset V(I_1)$, a stąd $I_1 \subset \mathcal{I}(V(I_1)) \subset \mathcal{I}(A_i)$, czyli $I_1 = \mathcal{I}(A_i)$.

Lemat 1.23 ([3, Lemat 2.3.9]) *Każdy ideał właściwy w pierścieniu noetherowskim R jest przekrojem skończonej liczby ideałów nierozkładalnych.*

W przytoczonym wyżej rozkładzie $\mathcal{I}(A) = \bigcap_{i=1}^q \mathcal{I}(A_i)$ ideały $\mathcal{I}(A_i)$ są pierwsze. W sytuacji ogólnej ideał w pierścieniu noetherowskim możemy rozłożyć na ideały prymarne.

Twierdzenie 1.24 ([3, Wniosek 2.3.14]) *Każdy właściwy ideał I pierścienia noetherowskiego R posiada* nieskracalny rozkład prymarny, *tzn. istnieją takie ideały prymarne $J_1, \ldots, J_k$, że $I = J_1 \cap \ldots \cap J_k$, żaden z ideałów J_i nie zawiera przekroju pozostałych oraz ideały $I_i = \operatorname{rad} J_i$ są parami różne. Ideały I_i są pierwsze i wyznaczone jednoznacznie przez I.*

W szczególności $\operatorname{rad} I = I_1 \cap \ldots \cap I_k$.

Ideały I_i nazywamy *ideałami stowarzyszonymi z I.* Ideałami stowarzyszonymi z $\mathcal{I}(A)$ są $\mathcal{I}(A_i)$, $i = 1, \ldots, q$.

Modułem noetherowskim nazywamy moduł, którego każdy podmoduł ma skończoną liczbę generatorów.

Niech $J \subset R$ (odp. $J \subset M$) będzie ideałem w pierścieniu noetherowskim R (odp. podmodułem noetherowskiego R – modułu M). Wprowadzamy oznaczenie:

$$\operatorname{Ann}_R(J) = \{r \in R \mid \forall_{j\in J}\ rj = 0\}.$$

Lemat 1.25 *Niech I będzie ideałem w pierścieniu noetherowskim R. I jest prymarny wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień $R/I \neq 0$ i dla każdego dzielnika zera a w pierścieniu R/I istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $a^k(R/I) = 0$. Ponadto* $\operatorname{rad} I = \operatorname{rad} \operatorname{Ann}_R(R/I)$.

Powyższa charakteryzacja prymarności pozwala uogólnić to pojęcie na moduły. Także w tym ogólniejszym przypadku prawdziwa jest własność istnienia rozkładu prymarnego.

Definicja Podmoduł N modułu noetherowskiego M nad pierścieniem R nazywamy *prymarnym,* jeśli $M/N \neq 0$ i dla każdego dzielnika zera a w R – module M/N istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $a^k(M/N) = 0$.

Jeśli N jest podmodułem prymarnym M, to ideał $I = \operatorname{rad} \operatorname{Ann}_R(M/N)$ jest pierwszy. Mówimy, że N jest I – prymarny.

Twierdzenie 1.26 ([3, 2.3.11]) *Każdy właściwy podmoduł N modułu noetherowskiego M nad pierścieniem R posiada* nieskracalny rozkład prymarny, *tzn. istnieją podmoduły prymarne $N_1, \ldots, N_k$ takie, że $N = N_1 \cap \ldots \cap N_k$, żaden z podmodułów N_i nie zawiera przekroju pozostałych i ideały $I_i = \operatorname{rad} \operatorname{Ann}_R(M/N_i)$ są parami różne. Ideały I_i są pierwsze i wyznaczone jednoznacznie przez N. Nazywamy je* ideałami stowarzyszonymi z N.

1.4 Lokalny stopień topologiczny odwzorowania i charakterystyka Eulera

Niech M, N będą zorientowanymi, zwartymi i spójnymi rozmaitościami o wymiarach $\dim M = \dim N = n$. Niech $f : M \longrightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim i niech $x \in M$ będzie puktem regularnym tego odwzorowania, tzn. takim, że macierz pochodnej $\mathrm{d}f_x$ jest nieosobliwa. Wtedy

$$\mathrm{d}f_x : \mathrm{T}_x M \longrightarrow \mathrm{T}_{f(x)} N$$

jest liniowym izomorfizmem zorientowanych przestrzeni wektorowych. Niech

$$\operatorname{sign} \mathrm{d}f_x = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \mathrm{d}f_x \text{ zachowuje orientację} \\ -1, & \text{jeśli } \mathrm{d}f_x \text{ zmienia orientację} \end{cases}.$$

Niech $y \in N$ będzie wartością regularną (tzn. przeciwobraz $f^{-1}(y)$ jest pusty lub zawiera tylko punkty regularne). Definiujemy

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} \mathrm{d}f_x.$$

Twierdzenie 1.27 ([36, Twierdzenie 5.A]) $\deg(f, y)$ *nie zależy od wyboru wartości regularnej y.*

Definicja Niech $y \in N$ będzie dowolnie ustaloną wartością regularną odwzorowania f. Liczbę $\deg f = \deg(f, y)$ nazywamy *stopniem odwzorowania* f.

Stopień odwzorowania jest niezmiennikiem homotopii, tzn. odwzorowania homotopijne mają ten sam stopień.

Niech $B \subset \mathbb{R}^n$ będzie n–wymiarową zwartą rozmaitością z brzegiem i niech $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie takim odwzorowaniem, że $0 \notin f(\partial B)$, gdzie ∂B oznacza brzeg B. Oznaczmy przez S^{n-1} sferę w $\mathbb{R}^n$ o środku w punkcie 0 i promieniu 1. Wtedy $\frac{f}{\|f\|} : \partial B \longrightarrow S^{n-1}$.

Definicja *Stopniem odwzorowania* $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *w zerze* nazywamy stopień odwzorowania $\frac{f}{\|f\|}$ na ∂B i oznaczamy $\deg(f, B, 0)$.

Podobnie jak w przypadku stopnia odwzorowania, homotopijne odwzorowania z B w $\mathbb{R}^n$ mają ten sam stopień w zerze:

Wniosek 1.28 *Niech* $\phi_t : B \times [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *będzie jednoparametrową rodziną odwzorowań, ciągłą na* $B \times [0; 1]$ *i klasy* C^1 *dla każdego* $t \in [0; 1]$. *Załóżmy, że dla każdego* t *zachodzi* $0 \notin \phi_t(\partial B)$. *Wtedy* $\deg(\phi_t, B, 0)$ *nie zależy od* t.

Niech teraz $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym zawierającym zero. Oznaczmy przez $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gładkie odwzorowanie, które ma zero izolowane w punkcie 0, tzn. $g(0) = 0$ oraz 0 jest punktem izolowanym w zbiorze $g^{-1}(0)$. Dla dostatecznie małego $\epsilon > 0$ mamy $g^{-1}(0) \cap \overline{B_\epsilon} = \{0\}$, gdzie B_ϵ oznacza kulę w $\mathbb{R}^n$ o środku w punkcie 0 i promieniu ϵ.

Definicja Liczbę $\deg_0 g = \deg(g, \overline{B_\epsilon}, 0)$ nazywamy *lokalnym stopniem topologicznym odwzorowania* g *w punkcie* 0.

Niech $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie kiełkiem rzeczywistego odwzorowania analitycznego. Oznaczmy przez I ideał w $\mathbb{R}[[x]] = \mathbb{R}[[x_1, \dots x_n]]$ generowany przez $f_1, \dots, f_n$. Wtedy $Q = \mathbb{R}[[x]]/I$ jest $\mathbb{R}$–algebrą. Jeśli $\dim_{\mathbb{R}} Q < \infty$, to F ma w 0 zero izolowane, i mówimy wtedy, że F ma *algebraicznie izolowane zero* w punkcie 0. (Jeśli $0 \in \mathbb{C}^n$ jest izolowane w przeciwobrazie 0 względem kompleksyfikacji F, to 0 jest zerem algebraicznie izolowanym kiełka F.) Niech J oznacza klasę abstrakcji w Q wyznacznika Jacobiego $\det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{1 \le i,j \le n}$.

Twierdzenie 1.29 (Eisenbuda–Levine'a [17]) *Załóżmy, że* $\dim_{\mathbb{R}} Q < \infty$. *Wtedy*

(i) $J \neq 0$ *w* Q,

(ii) dla dowolnej formy $\mathbb{R}$*–liniowej* $\phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ *takiej, że* $\phi(J) > 0$, *odpowiadająca jej forma dwuliniowa symetryczna* $\Phi : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$, *dana wzorem* $\Phi(f, g) = \phi(fg)$, *jest niezdegenerowana oraz lokalny stopień topologiczny w zerze odwzorowania* F *jest równy sygnaturze formy* Φ.

Załóżmy, że zbiór X jest triangulowalny oraz $K = \{K^n\}$ jest skończonym kompleksem symplicjalnym homeomorficznym ze zbiorem X. Oznaczmy przez α_n liczbę sympleksów n–wymiarowych w K.

Definicja *Charakterystyką Eulera (charakterystyką Eulera – Poincaré) zbioru* X nazywamy liczbę

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n.$$

Charakterystyka Eulera nie zależy od wyboru triangulacji i jest niezmiennikiem topologicznym.

Twierdzenie 1.30 ([31, Theorem IX 4.3]) *Niech X będzie zbiorem triangulowalnym homeomorficznym ze skończonym kompleksem symplicjalnym. Charakterystyka Eulera zbioru X spełnia następującą równość:*

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \operatorname{rank}(H_n(X)),$$

gdzie $H_n(X)$ oznacza n–tą grupę homologii zbioru X.

Następująca formuła Khimshiashvili wiąże charakterystykę Eulera z lokalnym stopniem topologicznym odwzorowania:

Twierdzenie 1.31 (Formuła Khimshiashvili [26]) *Niech $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ będzie kiełkiem rzeczywistej funkcji analitycznej, która ma izolowany punkt krytyczny w 0. Wtedy gradient $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ma zero izolowane w punkcie 0 oraz dla dostatecznie małych $\epsilon > 0$*

$$\chi(S_\epsilon^{n-1} \cap \{f \leq 0\}) = 1 - \deg_0(\nabla f).$$

Rozdział 2

Rodziny noetherowskie i algebry Ω–noetherowskie

Rodziny noetherowskie zostały wprowadzone przez El Khadiri i Tougerona [19] w 1984r. Autorzy udowodnili m. in. wiele własności podmodułów modułu $A[[x]]^p$ nad pierścieniem $A[[x]]$ oraz ideałów w $A[[x]]$, gdzie A jest algebrą spełniającą odpowiednie założenia (zob. warunki (a) i (b) w podrozdziale 2.1), scharakteryzowali rodziny noetherowskie oraz zdefiniowali algebry Ω–noetherowskie, spełniające wspomniane warunki (a) i (b), i podali ich przykłady. W rozdziale tym przypomnimy te z wyników El Khadiri i Tougerona, które będziemy wykorzystywać w dalszej części pracy, przedstawimy również własne proste uwagi (2.6, 2.7) i kilka przykładów.

2.1 Rodziny noetherowskie

Na początku przypomnimy pojęcie spektrum pierwszego i spektrum maksymalnego pierścienia oraz zdefiniowaną w nich topologię.

Definicja *Spektrum pierwszym* pierścienia R nazywamy zbiór $\mathrm{Spec}(R)$ wszystkich ideałów pierwszych pierścienia R. Podzbiór $\mathrm{SM}(R) \subset \mathrm{Spec}(R)$ składający się ze wszystkich ideałów maksymalnych w R nazywamy *spektrum maksymalnym pierścienia R.*

Określamy topologię na zbiorze $\mathrm{Spec}(R)$. Dla dowolnego zbioru $B \subset R$ przyjmujemy $V(B) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) \mid B \subset p\}$. Rodzina podzbiorów $\mathrm{Spec}(R)$ postaci $V(B)$ jest zamknięta względem dowolnych przekrojów i skończonych sum, zawiera zbiór pusty i $\mathrm{Spec}(R)$. Wobec tego istnieje jedyna topologia w zbiorze $\mathrm{Spec}(R)$, w której zbiory domknięte są postaci $V(B)$ dla $B \subset R$. Nazywamy ją *topologią Zariskiego.*

Zbiór domknięty w powyższej topologii będziemy nazywać *nierozkładalnym,* jeśli nie jest on sumą dwóch zbiorów domkniętych silnie w nim zawartych. W przeciwnym razie zbiór ten nazywamy *rozkładalnym.*

Określenie algebra (podalgebra) będzie oznaczać zawsze algebrę przemienną z jednością.

Niech A będzie algebrą nad ciałem $\mathbf{k}$ charakterystyki zero i niech Γ będzie podzbiorem spektrum maksymalnego $SM(A)$ algebry A z topologią indukowaną z $SM(A)$, tzn. F jest domknięty w Γ jeśli $F = \{\gamma \in \Gamma \mid B \subset \gamma\}$ dla pewnego $B \subset A$.

Załóżmy jak w [20], że A i Γ spełniają następujące warunki:

(a) dla każdego $\gamma \in \Gamma$ kanoniczne odwzorowanie $\mathbf{k} \longrightarrow A/\gamma$ jest izomorfizmem

(b) Γ z topologią z $SM(A)$ jest przestrzenią noetherowską (każdy zstępujący ciąg podzbiorów domkniętych w Γ stabilizuje się)

W konsekwencji każdy domknięty podzbiór Γ jest sumą skończonej liczby nierozkładalnych zbiorów domkniętych. Rzeczywiście, niech $F \subset \Gamma$ będzie rozkładalnym zbiorem domkniętym. Wtedy istnieją takie $F_1 \subsetneq F$, $F_2 \subsetneq F$, że $F = F_1 \cup F_2$. Jeśli oba te podzbiory są nierozkładalne, to mamy żądany rozkład. Jeśli któryś ze zbiorów F_1, F_2 jest rozkładalny, np. F_1, to znów możemy go rozłożyć na sumę jego właściwych podzbiorów domkniętych: $F_1 = F_{1,1} \cup F_{1,2}$. Kontynuując to postępowanie otrzymamy zstępujące ciągi zbiorów domkniętych w Γ. Noetherowskość przestrzeni Γ gwarantuje stabilizowanie się tych ciągów, a zatem rozkład na skończoną liczbę podzbiorów nierozkładalnych $F = \bigcup_{i=1}^{s} F_i$. Usuńmy spośród zbiorów F_i takie, które zawierają się w sumie $\bigcup_{j \neq i} F_j$. Otrzymany w ten sposób rozkład będziemy nazywać *(nieskracalnym) rozkładem zbioru F na składowe nierozkładalne.*

Załóżmy, że $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$, F jest podzbiorem Γ, S jest podzbiorem A. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$a(\gamma) \in \mathbf{k}$ — obraz a przy odwzorowaniu $A \longrightarrow A/\gamma \cong \mathbf{k}$
$\mathcal{I}(F) = \{a \in A : a(\gamma) = 0,\ \gamma \in F\}$
$V(S) = \{\gamma \in \Gamma : a(\gamma) = 0,\ a \in S\}$

Zatem zbiorami domkniętymi w Γ są zbiory $V(S)$, gdzie $S \subset A$. Zbiór domknięty F w Γ jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{I}(F)$ jest ideałem pierwszym.

Niech $x = (x_1, \dots, x_n)$. Będziemy oznaczać przez
$A[[x]]$ (odp. $\mathbf{k}[[x]]$) — pierścień szeregów formalnych zmiennych x o współczynnikach w A (odp. w $\mathbf{k}$)
$\mathbb{R}\{x\}$ (odp. $\mathbb{C}\{x\}$) — pierścień szeregów formalnych o współczynnikach w $\mathbb{R}$ (odp. w $\mathbb{C}$) zbieżnych w pewnym otoczeniu zera

Niech $\gamma \in \Gamma$, $f = \sum_\beta a_\beta x^\beta \in A[[x]]$, $F = (f_1, \dots, f_p) \in A[[x]]^p$ i niech N będzie podmodułem $A[[x]]^p$ generowanym przez F_α. Będziemy wtedy używać następujących symboli:

$f_\gamma = \sum_\beta a_\beta(\gamma) x^\beta \in \mathbf{k}[[x]]$
$F_\gamma = (f_{1,\gamma}, \dots, f_{p,\gamma})$

N_γ — podmoduł $\mathbf{k}[[x]]^p$ generowany przez $F_{\alpha,\gamma}$

Przypomnimy teraz niektóre z własności podmodułów $A[[x]]^p$, udowodnionych przez El Khadiri i Tougerona w [20].

Twierdzenie 2.1 ([20, Proposition 6.2.1]) *Niech N będzie podmodułem $A[[x]]^p$. Istnieje podmoduł $N' \subset N$, generowany przez skończoną liczbę elementów i taki, że $N_\gamma = N'_\gamma$ dla $\gamma \in \Gamma$.*

Twierdzenie 2.2 ([20, Proposition 6.8]) *Niech I będzie ideałem w $A[[x]]$. Istnieje taka liczba naturalna μ, że*

$$\forall_{\gamma\in\Gamma}\ (\mathrm{rad}(I_\gamma))^\mu \subset I_\gamma.$$

Niech $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ lub $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Oznaczmy przez $A_c[[x]]$ podpierścień pierścienia $A[[x]]$ złożony z takich szeregów formalnych $f \in A[[x]]$, że

$$\forall_{\gamma\in\Gamma}\ f_\gamma \in \mathbf{k}\{x\}.$$

Twierdzenia 2.1 i 2.2 pozostają prawdziwe, jeśli zastąpimy $A[[x]]$ przez $A_c[[x]]$.

Definicja Rodzinę $\mathcal{N}$ podmodułów $\mathbf{k}[[x]]^p$ (odp. $\mathbf{k}\{x\}^p$) nazywamy *rodziną noetherowską (sparametryzowaną przez (A,Γ))*, jeśli istnieje para (A,Γ), spełniająca podane w podrozdziale 2.1 warunki (a) i (b), oraz taki podmoduł $N \subset A[[x]]^p$ (odp. $N \subset A_c[[x]]^p$), że $\mathcal{N} = (N_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.

Każda podrodzina rodziny noetherowskiej jest rodziną noetherowską, suma skończonej liczby rodzin noetherowskich jest rodziną noetherowską (jeśli $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$ są rodzinami noetherowskimi sparametryzowanymi odp. przez (A_1,Γ_1), (A_2,Γ_2), to $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ jest sparametryzowana przez $(A_1 \oplus A_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$).

Definicja Niech I będzie ideałem w $\mathbb{R}\{x\}$ generowanym przez $f_1,\ldots,f_p$ i niech $V(I)$ będzie kiełkiem w zerze zbioru zer ideału I. *Wykładnikiem Łojasiewicza ideału I* nazywamy kres dolny zbioru liczb $\alpha > 0$, dla których istnieje taka stała $c > 0$, że

$$\sum_{i=1}^{p} |f_i(x)| \geq c\varrho(x, V(I))^\alpha$$

w pewnym otoczeniu zera (ϱ oznacza odległość euklidesową, $\varrho(x,\emptyset) = 1$). Wykładnik Łojasiewicza ideału I będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{L}(I)$.

Twierdzenie 2.3 ([20, Proposition 8.3]) *Niech $(I_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ będzie rodziną noetherowską ideałów w $\mathbb{R}\{x\}$. Wtedy rodzina wykładników Łojasiewicza $\mathcal{L}(I_\gamma)$ ideałów I_γ jest ograniczona.*

Definicja Niech pary (A, Γ), $(\overline{A}, \overline{\Gamma})$ spełniają warunki (a) i (b). *Zmianą parametryzacji* nazywamy taki homomorfizm $\mathbf{k}$-algebr $\phi : A \longrightarrow \overline{A}$, że odwzorowanie $\phi_* : \operatorname{Spec} \overline{A} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ indukuje morfizm z $\overline{\Gamma}$ na Γ. Oznaczmy przez $\tilde{\phi} : A[[x]]^p \longrightarrow \overline{A}[[x]]^p$ naturalne rozszerzenie ϕ na $A[[x]]^p$. Jeśli $\mathcal{N} = (N_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ jest rodziną noetherowską oraz $\overline{N}$ jest podmodułem $\overline{A}[[x]]^p$ (odp. $\overline{A}_c[[x]]^p$) generowanym przez $\tilde{\phi}(N)$, to $\mathcal{N} = (\overline{N}_{\bar{\gamma}})_{\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}}$ i $(\overline{A}, \overline{\Gamma})$ jest inną parametryzacją tej rodziny.

Złożenie zmian parametryzacji jest też zmianą parametryzacji.

Twierdzenie 2.4 ([19, Proposition 6.6]) *Niech N będzie podmodułem $A[[x]]^p$. Istnieją zmiana parametryzacji $\phi : (A, \Gamma) \longrightarrow (\overline{A}, \overline{\Gamma})$, skończony podział $(\overline{\Gamma}_i)_{i \in I}$ zbioru $\overline{\Gamma}$, ideały $p_1, \ldots p_s$ w $\overline{A}[[x]]$, podmoduły $N_1, \ldots, N_s$ modułu $\overline{A}[[x]]^p$ oraz stałe $s_i \leq s$, $i \in I$, takie, że dla $\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}_i$, takich, że $\gamma = \phi_*(\bar{\gamma})$, zachodzi:*

(1) $p_{1,\bar{\gamma}}, \ldots, p_{s_i,\bar{\gamma}}$ są ideałami pierwszymi w $\mathbf{k}[[x]]$ i jeśli $j > s_i$, to $p_{j,\bar{\gamma}} = \mathbf{k}[[x]]$

(2) $N_{j,\bar{\gamma}}$ jest $p_{j,\bar{\gamma}}$ – prymarny dla $1 \leq j \leq s_i$, i $N_{j,\bar{\gamma}} = \mathbf{k}[[x]]^p$ dla $j > s_i$

(3) $N_\gamma = N_{1,\bar{\gamma}} \cap \ldots \cap N_{s_i,\bar{\gamma}}$ i jest to nieskracalny rozkład prymarny N_γ.

Twierdzenie 2.5 ([20, Proposition 6.4]) *Niech N, N' będą podmodułami $A[[x]]^p$. Istnieje zmiana parametryzacji $\phi : (A, \Gamma) \longrightarrow (\overline{A}, \overline{\Gamma})$ oraz podmoduł $\overline{N}$ modułu $\overline{A}[[x]]^p$ takie, że dla $\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, takich, że $\gamma = \phi_*(\bar{\gamma})$, zachodzi:*

$$\overline{N}_{\bar{\gamma}} = N_\gamma \cap N'_\gamma.$$

Innymi słowy, jeśli $(N_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, $(N'_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ są dwiema rodzinami noetherowskimi, to rodzina przekrojów $(N_\gamma \cap N'_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ też jest rodziną noetherowską.

W dalszej części pracy będziemy rozważać podmoduły modułu $A[[x]]^p$ tylko dla przypadku $p = 1$, czyli ideały w $A[[x]]$.

2.2 Algebry Ω–noetherowskie

Niech $\Omega \subset \mathbf{k}^n$, gdzie $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ lub $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, będzie zbiorem *lokalnie domkniętym*, tzn. otwartym w swoim domknięciu. Przez $\mathcal{A}(\Omega)$ (odp. $\mathcal{H}(\Omega)$) będziemy oznaczać algebrę rzeczywistych funkcji analitycznych (odp. zespolonych funkcji holomorficznych) zdefiniowanych w pewnym otwartym otoczeniu zbioru Ω.

Niech $\mathcal{O}(\Omega)$ będzie $\mathbf{k}$–podalgebrą algebry $\mathcal{A}(\Omega)$ (odp. $\mathcal{H}(\Omega)$). Utożsamiamy zbiór Ω z podzbiorem spektrum maksymalnego $\mathrm{SM}(\mathcal{O}(\Omega))$ za pomocą następującego odwzorowania:

$$\Omega \ni \omega \mapsto p_\omega = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid f(\omega) = 0\} \in \mathrm{SM}(\mathcal{O}(\Omega)).$$

Topologia w $\mathrm{SM}(\mathcal{O}(\Omega))$ indukuje topologię w Ω, tzn. $\{\bigcap_{f \in S} f^{-1}(0) \cap \Omega\}_{S \subset \mathcal{O}(\Omega)}$ jest rodziną wszystkich zbiorów domkniętych w Ω.

Definicja Podalgebrę $\mathcal{O}(\Omega)$ nazywamy *algebrą Ω–noetherowską,* jeśli

(1) zawiera ona pierścień wielomianów,

(2) jest zamknięta ze względu na różniczkowanie,

(3) Ω z topologią indukowaną z $\mathrm{SM}(\mathcal{O}(\Omega))$ jest przestrzenią noetherowską.

Uwaga 2.6 *Zauważmy, że jeśli Ω z topologią indukowaną z $\mathrm{SM}(\mathcal{O}(\Omega))$ jest przestrzenią noetherowską, to dla każdego zbioru domkniętego D w Ω istnieją takie $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{O}(\Omega)$, że $D = \bigcap_{i=1}^{p} f_i^{-1}(0) \cap \Omega$, zatem D jest przekrojem zbioru Ω i pewnego zbioru analitycznego.*

Niech I będzie ideałem w $\mathcal{O}(\Omega)$. Jeśli $\mathcal{O}(\Omega)$ jest pierścieniem noetherowskim, to I ma skończoną liczbę generatorów, oznaczmy je przez $f_1, \ldots, f_k$. Możemy wtedy znaleźć takie otwarte otoczenie U zbioru Ω, na którym określone są wszystkie funkcje f_i. Definiujemy *zbiór zer ideału* I jako kiełek w zbiorze Ω zbioru
$$\{x \in U \mid f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0\}.$$
Zbiór zer ideału I oznaczamy symbolem $V(I)$. Nie zależy on od wyboru generatorów ideału I.

Rzeczywiście, jeśli wybierzemy inny układ generatorów $f'_1, \ldots, f'_k$, to możemy znaleźć takie otwarte otoczenie U' zbioru Ω, na którym określone są wszystkie funkcje f'_i. Istnieją otwarte otoczenia $W, W' \subset U \cap U'$ zbioru Ω oraz takie funkcje $g_{ij}, h_{ij} \in \mathcal{O}(\Omega)$ określone odpowiednio na W oraz na W', że $f_i = \sum_{j=1}^{k} g_{ij} f'_j$ na W oraz $f'_i = \sum_{j=1}^{k} h_{ij} f_j$ na W'. Wtedy oczywiście
$$\{x \in W \cap W' \mid f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0\} =$$
$$= \{x \in W \cap W' \mid f'_1(x) = \ldots = f'_k(x) = 0\},$$
zatem mamy równość kiełków.

Zauważmy, że
$$\forall_{x \in \Omega \cap V(I)} \forall_{f \in I}\ f(x) = 0.$$

Ideałem podzbioru $S \subset \Omega$ nazywamy ideał
$$\mathcal{I}(S) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid \forall_{x \in S}\ f(x) = 0\}.$$

Uwaga 2.7 *Jeśli algebra $\mathcal{O}(\Omega)$ jest pierścieniem noetherowskim, to spełnia warunek (3) definicji algebry Ω–noetherowskiej.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy w dwóch krokach.

1. Pokażemy najpierw, że jeśli A, B są domkniętymi podzbiorami Ω, to
$$A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{I}(A) \supset \mathcal{I}(B).$$

Oczywiście $A \subset B \Rightarrow \mathcal{I}(A) \supset \mathcal{I}(B)$.

Niech $\mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(A)$. B jest domknięty, zatem istnieje taki podzbiór S w $\mathcal{O}(\Omega)$, że $B = \bigcap_{f \in S} f^{-1}(0) \cap \Omega = V(S)$, oczywiście $S \subset \mathcal{I}(B)$. Ponieważ $\mathcal{O}(\Omega)$ jest pierścieniem noetherowskim, to $\mathcal{I}(A)$ jest skończenie generowany i $V(\mathcal{I}(A))$ jest dobrze zdefiniowany. Mamy:

$$A \subset \Omega \cap V(\mathcal{I}(A)) \subset \Omega \cap V(\mathcal{I}(B)) \subset \Omega \cap V(S) = \Omega \cap \bigcap_{f \in S} f^{-1}(0) = B.$$

2. Niech $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_k \supset \ldots$ będzie ciągiem zstępującym zbiorów domkniętych w Ω z topologią indukowaną z $\mathrm{SM}(\mathcal{O}(\Omega))$. Wtedy $\mathcal{I}(D_1) \subset \mathcal{I}(D_2) \subset \ldots \subset \mathcal{I}(D_k) \subset \ldots$ stabilizuje się jako ciąg wstępujący ideałów w $\mathcal{O}(\Omega)$. Na mocy pierwszego kroku dowodu ciąg $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_k \supset \ldots$ też musi się stabilizować.

□

Jeśli $\mathcal{O}(\Omega)$ jest algebrą Ω–noetherowską, to para $(\mathcal{O}(\Omega), \Omega)$ spelnia warunki (a) i (b) podane w podrozdziale 2.1. Rzeczywiście, warunek (b) jest spełniony wprost z definicji, a dla każdego $\omega \in \Omega$ odwzorowanie $\mathcal{O}(\Omega)/p_\omega \longrightarrow \mathbf{k}$ dane wzorem $\mathcal{O}(\Omega)/p_\omega \ni f \mapsto f(\omega) \in \mathbf{k}$ jest izomorfizmem, zatem warunek (a) jest także spełniony.

Dla ideału $I \subset \mathcal{O}(\Omega)$ przez $\operatorname{Reg} V(I)$ będziemy oznaczać zbiór tych punktów $V(I)$, w otoczeniu których $V(I)$ jest podrozmaitością. Zbiór $\operatorname{Reg} V(I)$ jest gęsty w $V(I)$. Jeśli I jest generowany przez pojedynczy element f, to będziemy pisać $\operatorname{Reg} V(f)$.

Twierdzenie 2.8 ([18, Proposition 4]) *Niech $\mathcal{O}(\Omega)$ będzie podalgebrą algebry $\mathcal{A}(\Omega)$ (odp. $\mathcal{H}(\Omega)$) zawierającą pierścień wielomianów i zamkniętą ze względu na różniczkowanie. Jeśli dla każdego $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ zbiór $\operatorname{Reg} V(f)$ ma skończoną liczbę składowych spójności, to $\mathcal{O}(\Omega)$ jest algebrą Ω–noetherowską.*

Przytoczymy przykłady rodzin Ω–noetherowskich, podanych przez El Khadiri i Tougerona w [20] oraz El Khadiri i Hlala w [18].

Przykład 2.9 *Niech Ω będzie zwartym semianalitycznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Algebra $\mathcal{A}(\Omega)$ funkcji analitycznych określonych w otoczeniu Ω jest Ω–noetherowska.*

Przykład 2.10 *Niech Ω będzie otwartym semialgebraicznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Algebra $\mathcal{N}(\Omega)$ funkcji Nasha (tzn. funkcji analitycznych, których wykresy są zbiorami semialgebraicznymi) określonych na Ω jest Ω–noetherowska.*

Przykład 2.11 *Rozważmy algebrę $\mathbb{R}[x][f_1, \ldots, f_q]$, gdzie $\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ jest pierścieniem wielomianów na $\mathbb{R}^n$, $f_i = e^{Q_i}$, $Q_i \in \mathbb{R}[x]$ dla $i = 1, \ldots, q$. Algebra $\mathbb{R}[x][f_1, \ldots, f_q]$ jest $\mathbb{R}^n$–noetherowska.*

Oczywiście we wszystkich powyższych przykładach wielomiany o współczynnikach rzeczywistych zdefiniowane w (otoczeniu) Ω należą do danej algebry, algebry te są też zamknięta ze względu na różniczkowanie.

Algebry $\mathcal{A}(\Omega)$ i $\mathbb{R}[x][f_1, \ldots, f_q]$ są noetherowskie, zachodzi również następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.12 (J.J. Risler, zob. [7, Theorem 8.7.15]) *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie rozmaitością Nasha. Pierścień $\mathcal{N}(M)$ funkcji Nasha jest pierścieniem noetherowskim.*

Zatem na mocy uwagi 2.7 warunek (3) jest spełniony dla wszystkich podanych algebr.

Przykład 2.13 *Niech Ω będzie otwartym i ograniczonym subanalitycznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Algebra funkcji analitycznych f określonych na Ω i takich, że dla każdego $\omega \in \Omega$ kiełek f w punkcie ω jest algebraiczny nad $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, jest Ω–noetherowska (zob. [18, Lemme 1]).*

Przykład 2.14 *Niech Ω będzie otwartym subanalitycznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ relatywnie zwartym. Algebra* $\mathrm{Sub}(\Omega)$ *funkcji analitycznych i jednocześnie subanalitycznych (tzn. o wykresach subanalitycznych) określonych na Ω jest Ω–noetherowska na mocy twierdzenia 2.8.*

Rozdział 3

Własności rodzin noetherowskich

Jak już zostało wspomniane, główny wynik pracy (twierdzenie 4.13) jest prawdziwy dla podalgebr Ω–noetherowskich $\mathcal{O}(\Omega)$ algebry rzeczywistych funkcji analitycznych zdefiniowanych w pewnym otoczeniu zbioru lokalnie domkniętego Ω, spełniających dwa dodatkowe założenia (zob. 4.14). Dla ustalenia uwagi dowód tego twierdzenia przeprowadzimy dla algebry $\mathcal{A}(\Omega)$ z przykładu 2.9. Będziemy przy tym korzystać z pewnych szczególnych własności rodzin noetherowskich, które udowodnimy w tym rozdziale.

Załóżmy jak w przykładzie 2.9, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zwartym zbiorem semianalitycznym i rozważmy algebrę $\mathcal{A}(\Omega)$ rzeczywistych funkcji analitycznych zdefiniowanych w pewnym otwartym otoczeniu zbioru Ω. Możemy potraktować $\mathbb{R}^n$ jako podprzestrzeń $\mathbb{C}^n$, wtedy $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ i możemy oznaczyć przez $\mathcal{H}(\Omega)$ algebrę zespolonych funkcji analitycznych zdefiniowanych w pewnym otwartym otoczeniu zbioru Ω.

Dla $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ oraz $\omega \in \Omega$ oznaczamy

$$\tilde{f} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^{\alpha} f x^{\alpha}, \;\; \tilde{f}_{\omega} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^{\alpha} f(\omega) x^{\alpha}.$$

Oczywiście $\tilde{f} \in \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$.

Definiujemy $\tilde{f_{\omega}^{C}} : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$ jako $\tilde{f_{\omega}^{C}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^{\alpha} f(\omega) z^{\alpha}$, wtedy

$$\tilde{f^{C}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^{\alpha} f z^{\alpha} \in \mathcal{H}(\Omega)_c[[x]].$$

Twierdzenie 3.1 *Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Istnieje takie $N_0 > 0$, że dla każdego $N \geq N_0$ i $\omega \in \Omega$ istnieją takie $\epsilon_{\omega} > 0$ i $c_{\omega} > 0$, że jeśli $\epsilon \in (0; \epsilon_{\omega})$ i punkt $x \in S_{\epsilon}^{n-1} \setminus \tilde{f}_{\omega}^{-1}(0)$ jest punktem krytycznym odwzorowania $\tilde{f}_{\omega}|_{S_{\epsilon}^{n-1}}$, to*

$$|\tilde{f}_{\omega}(x)| \geq \frac{1}{c_{\omega}} ||x||^{2N}.$$

Dowód. Niech $r(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$ dla $z \in \mathbb{C}^n$. Definiujemy

$$M^{ij} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial z_i} & \frac{\partial r}{\partial z_j} \\ \frac{\partial \tilde{f}^C}{\partial z_i} & \frac{\partial \tilde{f}^C}{\partial z_j} \end{bmatrix}.$$

Wtedy $M^{ij} \in \mathcal{H}(\Omega)_c[[x]]$, M^{ij}_ω są kiełkami w zerze funkcji holomorficznych. Niech $\mathcal{G}_\omega = V((M^{ij}_\omega)_{i<j})$ dla $\omega \in \Omega$. Na mocy lematu 1.17 dla każdego $\omega \in \Omega$ istnieją $p(\omega)$, $l(\omega)$ oraz taki rozkład na składowe nierozkładalne

$$\mathcal{G}_\omega = \mathcal{G}_{1,\omega} \cup \ldots \cup \mathcal{G}_{p(\omega),\omega} \cup \ldots \cup \mathcal{G}_{l(\omega),\omega},$$

że $\mathcal{G}'_\omega := \overline{\mathcal{G}_\omega \setminus (\tilde{f^C_\omega})^{-1}(0)} = \mathcal{G}_{1,\omega} \cup \ldots \cup \mathcal{G}_{p(\omega),\omega}$.

Mamy $I(\mathcal{G}_\omega) = I(\mathcal{G}_{1,\omega}) \cap \ldots \cap I(\mathcal{G}_{p(\omega),\omega}) \cap \ldots \cap I(\mathcal{G}_{l(\omega),\omega})$ oraz $I(\mathcal{G}'_\omega) = I(\mathcal{G}_{1,\omega}) \cap \ldots \cap I(\mathcal{G}_{p(\omega),\omega})$. Oznaczmy przez $J_{j,\omega} = I(\mathcal{G}_{j,\omega})$. $\mathcal{G}_{j,\omega}$ jest składową nierozkładalną kiełka zbioru analitycznego w $\mathbb{C}^n$, zatem z lematu 1.13 $J_{j,\omega}$ są ideałami pierwszymi i

$$I(\mathcal{G}_\omega) = J_{1,\omega} \cap \ldots \cap J_{l(\omega),\omega}$$

jest nieskracalnym rozkładem prymarnym.

Oznaczmy przez $\mathcal{J}$ ideał w $\mathcal{H}(\Omega)_c[[x]]$ generowany przez M^{ij}, $i < j$, wtedy $\mathcal{J}_\omega = ((M^{ij}_\omega)_{i<j})$. Zatem na mocy lokalnego twierdzenia Hilberta o zerach 1.12, $\operatorname{rad}(\mathcal{J}_\omega) = I(\mathcal{G}_\omega)$.

Z twierdzenia 2.4 istnieją zmiana parametryzacji $\phi : (\mathcal{H}(\Omega), \Omega) \longrightarrow (A, \Gamma)$, skończony podział $(\Gamma_i)_{i \in I}$ zbioru Γ, ideały $p_1, \ldots p_s$ w $A_c[[x]]$ i stałe $s_i \leq s$, $i \in I$ takie, że dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_i$, jeśli $\omega = \phi_*(\gamma)$, to $p_{1,\gamma}, \ldots, p_{s_i,\gamma}$ są ideałami pierwszymi stowarzyszonymi z $\mathcal{J}_\omega$, czyli

$$\operatorname{rad}(\mathcal{J}_\omega) = p_{1,\gamma} \cap \ldots \cap p_{s_i,\gamma}.$$

Ponieważ $J_{1,\omega} \cap \ldots \cap J_{l(\omega),\omega}$ jest nieskracalnym rozkładem prymarnym $\operatorname{rad}(\mathcal{J}_\omega)$, to dla każdego $j \in \{1, \ldots, l(\omega)\}$ istnieje takie $q \in \{1, \ldots, s_i\}$, że $J_{j,\omega} = p_{q,\gamma}$.

Z twierdzenie 2.5 istnieje zmiana parametryzacji $\phi : (A, \Gamma) \longrightarrow (\overline{A}, \overline{\Gamma})$ oraz ideały $\overline{N}^Q$ w $\overline{A}_c[[x]]$, $Q \subset \{1, \ldots, s\}$, takie, że dla $\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}_i$, $i \in I$, jeśli $\gamma = \phi_*(\bar{\gamma})$, to $\overline{N}^Q_{\bar{\gamma}} = \bigcap_{j \in Q} p_{j,\gamma}$.

Skończona suma rodzin noetherowskich jest rodziną noetherowską, zatem niech $K \subset \overline{A}[[x]]$ będzie takim ideałem, że $\mathcal{K} = (K_{\bar{\gamma}})_{\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}}$ jest rodziną noetherowską zawierającą wszystkie rodziny $(\overline{N}^Q_{\bar{\gamma}})_{\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}}$, $Q \subset \{1, \ldots, s\}$. Wtedy do $\mathcal{K}$ należą wszystkie ideały $I(\mathcal{G}'_\omega)$, $\omega \in \Omega$. Niech $M \subset \overline{A}[[x]]$ oznacza taki ideał, że $(M_{\bar{\gamma}})_{\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}}$ jest rodziną noetherowską $(\tilde{f^C_\omega})_{\omega \in \Omega}$ po zmianie parametryzacji $\phi' : (\mathcal{H}(\Omega), \Omega) \longrightarrow (\overline{A}, \overline{\Gamma})$ (która jest złożeniem zmian parametryzacji). Ponieważ $K + M$ jest ideałem w $\overline{A}[[x]]$, to $(K_{\bar{\gamma}} + M_{\bar{\gamma}})_{\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}}$ jest rodziną noetherowską ideałów sparametryzowaną przez $(\overline{A}, \overline{\Gamma})$. Na mocy twierdzenia 2.2

$$\exists_{N_0 > 0} \; \forall_{\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}} \; (\operatorname{rad}(K_{\bar{\gamma}} + M_{\bar{\gamma}}))^{N_0} \subset (K_{\bar{\gamma}} + M_{\bar{\gamma}}).$$

Wniosek 1.22 implikuje, że $V(I(\mathcal{G}'_\omega)+(r)) = \mathcal{G}'_\omega \cap r^{-1}(0) = \mathcal{G}'_\omega \cap (\tilde{f}^C_\omega)^{-1}(0) = V(I(\mathcal{G}'_\omega) + (\tilde{f}^C_\omega))$ dla $\omega \in \Omega$. Z lokalnego twierdzenia Hilberta o zerach 1.12 mamy

$$\operatorname{rad}(I(\mathcal{G}'_\omega) + (r)) = \operatorname{rad}(I(\mathcal{G}'_\omega) + (\tilde{f}^C_\omega)).$$

Ponieważ $I(\mathcal{G}'_\omega) \in \mathcal{K}$, $\tilde{f}^C_\omega \in (M_{\bar{\gamma}})_{\bar{\gamma}\in\overline{\Gamma}}$ i $\phi'_*|_{\overline{\Gamma}}$ odwzorowuje $\overline{\Gamma}$ na Ω, to dla każdego $\omega \in \Omega$ istnieje takie $\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, że $\omega = \phi'_*(\bar{\gamma})$ i możemy przyjąć $I(\mathcal{G}'_\omega) = K_{\bar{\gamma}}$, $\tilde{f}^C_\omega = M_{\bar{\gamma}}$. Mamy zatem

$$(I(\mathcal{G}'_\omega) + (r))^{N_0} \subset (\operatorname{rad}(I(\mathcal{G}'_\omega) + (r)))^{N_0} = (\operatorname{rad}(I(\mathcal{G}'_\omega) + (\tilde{f}^C_\omega)))^{N_0} =$$

$$= (\operatorname{rad}(K_{\bar{\gamma}} + M_{\bar{\gamma}}))^{N_0} \subset (K_{\bar{\gamma}} + M_{\bar{\gamma}}) = (I(\mathcal{G}'_\omega) + (\tilde{f}^C_\omega)).$$

Niech $g_{i,\omega}$ będą generatorami $I(\mathcal{G}'_\omega)$. Wtedy $r^{N_0} = a_\omega \tilde{f}^C_\omega + \sum_i c_{i,\omega} g_{i,\omega}$ dla pewnych kiełków funkcji holomorficznych a_ω, $c_{i,\omega}$.

Niech $0 < \epsilon_\omega \ll 1$ będzie takie, że reprezentanty kiełków $\tilde{f}^C_\omega$, a_ω oraz $c_{i,\omega}$, $g_{i,\omega}$ są zdefiniowane w zbiorze $\{z \in \mathbb{C}^n \mid ||z|| < \epsilon_\omega\}$. Jeśli $0 < \epsilon < \epsilon_\omega$ i x jest takim punktem krytycznym $\tilde{f}_\omega|_{S^{n-1}_\epsilon}$, że $x \notin \tilde{f}_\omega^{-1}(0)$, to $x \in \mathcal{G}'_\omega$ i dla każdego i mamy $g_{i,\omega}(x) = 0$. Zatem $r^{N_0}(x) = a_\omega(x)\tilde{f}_\omega(x)$, czyli

$$\exists_{c_\omega > 0}\, \forall_{N \geq N_0}\; r^N(x) \leq r^{N_0}(x) = |a_\omega(x)||\tilde{f}_\omega(x)| \leq c_\omega |\tilde{f}_\omega(x)|.$$

Ponieważ $x \in \mathbb{R}^n$, to $r(x) = \|x\|^2$ i mamy

$$|\tilde{f}_\omega(x)| \geq \frac{1}{c_\omega} r^N(x) = \frac{1}{c_\omega}||x||^{2N}.$$

$\square$

Wniosek 3.2 *Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Wtedy istnieje takie $\alpha = 2N_0 + 1$, że dla każdego $\omega \in \Omega$ istnieje takie $0 < \epsilon_\omega \ll 1$, że jeśli $0 < \epsilon < \epsilon_\omega$ i $x \in S^{n-1}_\epsilon \setminus \tilde{f}_\omega^{-1}(0)$ jest punktem krytycznym $\tilde{f}_\omega|_{S^{n-1}_\epsilon}$, to*

$$|\tilde{f}_\omega(x)| \geq ||x||^\alpha.$$

Rozdział 4

Rodziny kiełków rzeczywistych funkcji analitycznych

Wykorzystując m. in. argumenty z [40] i własności rodzin noetherowskich pokażemy, że pewne rodziny kiełków rzeczywistych funkcji analitycznych można zastąpić przez inne rodziny kiełków o takim samym lokalnym stopniu topologicznym w 0, które mają w punkcie 0 zero algebraicznie izolowane. Udowodnimy, że lokalny stopień topologiczny takich kiełków można przedstawić za pomocą sumy znaków funkcji analitycznych. Pokażemy również, że charakterystykę Eulera ogniwa zbioru punktów, w których funkcja analityczna jest niedodatnia, można zareprezentować za pomocą lokalnego stopnia topologicznego pewnego odwzorowania. Korzystając z tych faktów udowodnimy główny wynik pracy.

4.1 Lokalny stopień topologiczny rodziny kiełków odwzorowań analitycznych

Niech $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ lub $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ i niech $\mathbf{m}$ będzie ideałem maksymalnym w $\mathbf{k}[[x]] = \mathbf{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Niech $\mathcal{F}_p = \oplus_p \mathbf{m} \subset \mathbf{k}[[x]]^p$. Jeśli $g \in \mathcal{F}_p$, to $g = (g_1, \ldots, g_p)$, gdzie

$$g_j = \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{a_j^\alpha}{\alpha!} x^\alpha \text{ (tzn. } a_j^\alpha = \mathrm{D}^\alpha\, g_j(0) \text{).}$$

Niech $\Psi_1, \ldots \Psi_s$ będą szeregami formalnymi zmiennych x o współczynnikach, które zależą wielomianowo od a_j^α. Dla $g = (g_1, \ldots, g_p) \in \mathcal{F}_p$ oznaczamy przez $\Psi_{i,g}$ szereg formalny otrzymany przez podstawienie $a_j^\alpha = \mathrm{D}^\alpha\, g_j(0)$ w Ψ_i. Niech I_g będzie ideałem w $\mathbf{k}[[x]]$ generowanym przez $\Psi_{1,g}, \ldots, \Psi_{s,g}$.

Oznaczmy przez W_h zbiór $\{g \in \mathcal{F}_p \mid \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[[x]]/I_g) > h\}$. Wtedy

$$W_h = \left\{ g \in \mathcal{F}_p \mid \dim_{\mathbf{k}}(I_g + \mathbf{m}^{h+1}/\mathbf{m}^{h+1}) < \binom{n+h}{n} - h \right\}$$

(zob. [48, Corollary II 5.2]). Rozważamy skończenie wymiarową przestrzeń afiniczną $\mathbf{k}[[x]]+\mathbf{m}^{h+1}/\mathbf{m}^{h+1}$ oraz jej podprzestrzeń wektorową $I_g+\mathbf{m}^{h+1}/\mathbf{m}^{h+1}$ generowaną przez $x^\alpha\Psi_{i,g}$, gdzie $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $0\le|\alpha|\le h$.

Twierdzenie 4.1 ([48, Lemma VII 5.3]) *Zbiory W_h są algebraiczne oraz*

$$\{g\in\mathcal{F}_p \mid \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[[x]]/I_g)<\infty\}=\mathcal{F}_p\setminus\bigcap_{h=0}^{\infty}W_h.$$

Uwaga 4.2 *Niech $\Psi_{i,g}^{\alpha,\beta}$, $|\beta|\le h, |\alpha|\le h$ będą współczynnikami przy x^β w szeregu $x^\alpha\Psi_{i,g}$.*

Zbiór W_h jest algebraiczny w następującym sensie: jest on zbiorem tych $g\in\mathcal{F}_p$, dla których wszystkie minory macierzy $(\Psi_{i,g}^{\alpha,\beta})$ stopnia $\binom{n+h}{n}-h$ się zerują ((i,α) jest tu indeksem wiersza, β — kolumny).

Niech $D\subset\Omega$ będzie zbiorem domkniętym, $J=\{f\in\mathcal{A}(\Omega)\,|\,f|_D\equiv 0\}$. Definiujemy

$$\mathcal{A}(D):=\mathcal{A}(\Omega)/J.$$

Jeśli D jest nierozkładalny, to J jest ideałem pierwszym, zatem $\mathcal{A}(D)$ jest dziedziną całkowitości.

Oznaczmy przez $\mathcal{S}_n(D)$ zbiór takich rodzin kiełków w zerze odwzorowań analitycznych $\{F_\omega=(F_\omega^1,\dots,F_\omega^n):(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)\}_{\omega\in D}$, że

$$\forall_{1\le i\le n}\ \exists_{f_i\in\mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]}\ \forall_{\omega\in D}\ F_\omega^i(x)=f_i(\omega,x).$$

W szczególności jeśli

$$\forall_{1\le i\le n}\ \exists_{h_i\in\mathcal{A}(\Omega)}\ \forall_{\omega\in D}\ F_\omega^i(x)=h_i(x+\omega),$$

to $\{F_\omega\}_{\omega\in D}\in\mathcal{S}_n(D)$. Jako f_i wystarczy wtedy wziąć $\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}^\alpha h_i(\omega)x^\alpha$.

Lemat 4.3 *Załóżmy, że podzbiór $D\subset\Omega$ jest domknięty i nierozkładalny, $\{F_\omega\}_{\omega\in D}\in\mathcal{S}_n(D)$ i $0\in\mathbb{R}^n$ jest izolowane w $F_\omega^{-1}(0)$ dla każdego $\omega\in D$. Wtedy istnieją właściwy domknięty podzbiór $\Sigma\subset D$ i rodzina $\{G_\omega\}_{\omega\in D}\in\mathcal{S}_n(D)$ takie, że*

(i) $\forall_{\omega\in D\setminus\Sigma}$ *G_ω ma w 0 zero algebraicznie izolowane,*

(ii) $\forall_{\omega\in D}\ \deg_0 F_\omega=\deg_0 G_\omega$.

Dowód. Dla $\omega \in D$ definiujemy kiełek G_ω:

$$G_\omega(x) = F_\omega(x) + a(x_1^k, \ldots, x_n^k),$$

gdzie k jest liczbą naturalną, $a \neq 0$. Mamy $G_\omega^i(x) = f_i(\omega, x) + a x_i^k$, zatem G_ω^i jest kiełkiem funkcji analitycznej. Niech $c_{i\alpha} \in \mathcal{A}(D)$ będzie klasą abstrakcji funkcji $\omega \mapsto \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^\alpha G_\omega^i(0)$ należącej do $\mathcal{A}(\Omega)$. Definiujemy odpowiadający kiełkowi G_ω^i szereg formalny

$$P_i(\omega, x) = \sum_\alpha c_{i\alpha}(\omega) x^\alpha \in \mathcal{A}(D)[[x]].$$

Na mocy twierdzenia 4.1

$$\{\omega \in D \mid \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[[x]]/(P_1(\omega,\cdot), \ldots, P_n(\omega,\cdot))) < \infty\} = D \setminus \bigcap_{h=0}^{\infty} \Sigma_h,$$

gdzie $\Sigma_h = \{\omega \in D \mid \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[[x]]/(P_1(\omega,\cdot), \ldots, P_n(\omega,\cdot))) > h\}$. Zbiór Σ_h jest domknięty w D ponieważ jest przekrojem zbioru zer funkcji $c_{i\alpha}$ złożonych z wielomianami (zob. uwaga 4.2). Zatem $\Sigma = \bigcap_{h=0}^{\infty} \Sigma_h$ jest takim domkniętym podzbiorem D, że 0 jest zerem algebraicznie izolowanym w $G_\omega^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ dla $\omega \in D \setminus \Sigma$.

Używając podobnych argumentów jak w dowodzie [45, Lemma 1.3] możemy pokazać, że Σ jest właściwym podzbiorem D. Mamy

$$P_i(\omega, x) = G_\omega^i(x) = F_\omega^i(x) + a x_i^k = f_i(\omega, x) + a x_i^k$$

dla x dostatecznie blisko 0. Ustalmy $\omega_0 \in D$. Zbiór

$$A = \left\{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \dim_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}[[x]]/(f_1(\omega_0, x) + a x_1^k, \ldots, f_n(\omega_0, x) + a x_n^k)\right) > h\right\}$$

jest skończony dla dostatecznie dużych h.

Rzeczywiście, oznaczmy $H_a^i(x) = a f_i(\omega_0, x) + x_i^k$ dla $a \in \mathbb{R}$. Wtedy $H_0^i = x_i^k$ oraz $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[[x]]/(x_1^k, \ldots, x_n^k)) = k^n$. Zatem na mocy twierdzenia 4.1 zbiór

$$A' = \left\{a \in \mathbb{R} \mid \dim_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}[[x]]/(H_a^1, \ldots, H_a^n)\right) > h\right\}$$

jest algebraiczny i $0 \notin A'$ dla $h > k^n$, czyli A' jest skończony dla $h > k^n$. Jeśli $a \neq 0$, to mamy $H_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{1}{a} P_i(\omega_0, x)$, zatem A jest także skończony dla $h > k^n$.

Weźmy $a \notin A$ w definicji G_ω, wtedy

$$\omega_0 \notin \Sigma_h = \{\omega \in D \mid \dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}[[x]]/(P_1(\omega,\cdot), \ldots, P_n(\omega,\cdot))) > h\},$$

zatem $\Sigma_h \neq D$ dla h dostatecznie dużych i Σ jest właściwym podzbiorem D.

Niech $I_\omega \subset \mathbb{R}\{x\}$ będzie ideałem generowanym przez kiełki $F_\omega^1, \ldots, F_\omega^n$. Z twierdzenia 2.3 rodzina wykładników Łojasiewicza dla I_ω jest ograniczona:

$$\exists_M \ \forall_{\omega \in D} \ \alpha_\omega = \inf\{\alpha \mid \exists_{c>0} \sum_{i=1}^n |F_\omega^i(x)| \geq c\, \varrho(x, V(I_\omega))^\alpha\} \leq M.$$

Ponieważ punkt 0 jest izolowany w zbiorze zer F_ω, to

$$\exists_M \ \forall_{\omega \in D} \ \exists_{c_\omega > 0} \ \sum_{i=1}^{n} |F_\omega^i(x)| \geq c_\omega \varrho(x, V(I_\omega))^{\alpha_\omega} = c_\omega \varrho(x, \{0\})^{\alpha_\omega} \geq c_\omega ||x||^M$$

dla x blisko 0.

Stąd jeśli weźmiemy $k > M$ w definicji G_ω, to istnieje takie $c_\omega > 0$, że

$$||tG_\omega(x) + (1-t)F_\omega(x)|| = ||F_\omega(x) + at(x_1^k, \ldots, x_n^k)|| \geq$$

$$\geq c_\omega ||x||^M - at||(x_1^k, \ldots, x_n^k)|| \geq \frac{c_\omega}{2} ||x||^M,$$

gdzie $0 \leq t \leq 1$, x jest blisko 0 (zob. [40]).

Dla dostatecznie małego $\epsilon > 0$ mamy $0 \notin [tG_\omega + (1-t)F_\omega](S_\epsilon^{n-1})$, zatem na mocy twierdzenia 1.28 $\deg_0 F_\omega = \deg_0 G_\omega$.

□

Zanim sformułujemy następny lemat, przypomnimy pojęcie i własności diagramu wykładników wiodących ideału w $A[[x]]$ (zob. [25] i [5]).

Niech $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ lub $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, niech A będzie $\mathbf{k}$–algebrą, która jest dziedziną całkowitości, i niech I będzie ideałem w $A[[x]]$ (odp. $\mathbf{k}[[x]]$), $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Stowarzyszymy z nim zbiór $\mathcal{D}(I) \subset \mathbb{N}^n$, gdzie $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

Jeśli $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, to oznaczamy $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. W zbiorze skończonych ciągów o $(n+1)$ elementach $(\beta_1, \ldots, \beta_n, |\beta|)$, gdzie $\beta \in \mathbb{N}^n$, wprowadzamy prawostronny porządek leksykograficzny. Indukuje to liniowy porządek w $\mathbb{N}^n$.

Niech $f \in A[[x]]$ (odp. $\mathbf{k}[[x]]$), $f = \sum_\beta f_\beta x^\beta$. Wprowadzamy oznaczenie $\operatorname{supp} f = \{\beta \in \mathbb{N}^n \mid f_\beta \neq 0\}$. Niech $\nu(f)$ oznacza najmniejszy element $\operatorname{supp} f$. Przez $\operatorname{in} f$ będziemy oznaczać $f_{\nu(f)} x^{\nu(f)}$.

Definiujemy *diagram wykładników wiodących* $\mathcal{D}(I)$ jako zbiór

$$\{\nu(f) \mid f \in I \setminus \{0\}\}.$$

Oczywiście $\mathcal{D}(I) + \mathbb{N}^n = \mathcal{D}(I)$.

Niech $W \subset \mathbb{N}^n$ będzie takie, że $W + \mathbb{N}^n = W$. Najmniejszy taki skończony podzbiór $V \subset W$, że $W = V + \mathbb{N}^n$, nazywamy *zbiorem wierzchołków* W.

Dla ideału $I \subset A[[x]]$ definiujemy

$$\Delta = \mathbb{N}^n \setminus \mathcal{D}(I).$$

Niech $V = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ będzie zbiorem wierzchołków diagramu $\mathcal{D}(I)$. Wybierzmy takie $g^1, \ldots, g^s \in I$, że $\beta_i = \nu(g^i)$ dla $i = 1, \ldots, s$. Niech $\operatorname{in} g^i = g^i_{\beta_i} y^{\beta_i}$, wtedy $g^i_{\beta_i} \neq 0$. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

A_0 — ciało ułamków A,

S — multiplikatywny podzbiór A generowany przez $g^i_{\beta_i}$,

$S^{-1}A$ — odpowiadająca zbiorowi S lokalizacja algebry A, tzn. podpierścień A_0 zawierający ułamki o mianownikach z S

$S^{-1}I[[x]]$ — ideał generowany przez I w $S^{-1}A[[x]]$.

Mamy $S^{-1}A[[x]] \subset A_0[[x]]$. $S^{-1}A[[x]]/S^{-1}I[[x]]$ jest skończenie generowany wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór Δ jest skończony, i wtedy $S^{-1}A[[x]]/S^{-1}I[[x]]$ jest wolnym $S^{-1}A$–modułem. Jako bazę przyjmujemy jednomiany x^β, $\beta \in \Delta$.

Lemat 4.4 *Przy założeniach lematu 4.3 istnieją* $q_1, \ldots, q_t \in \mathcal{A}(\Omega)$ *oraz właściwy domknięty podzbiór* $\Sigma \subset D$ *takie, że dla* $\omega \in D \setminus \Sigma$

$$\deg_0 F_\omega = \operatorname{sgn} q_1(\omega) + \ldots + \operatorname{sgn} q_t(\omega).$$

Dowód. Na mocy lematu 4.3 możemy założyć, że $\{F_\omega\}_{\omega\in D}$ jest rodziną należącą do $\mathcal{S}_n(D)$, dla której istnieje domknięty właściwy podzbiór $\Sigma' \subset D$ taki, że F_ω ma w 0 algebraicznie izolowane zero dla $\omega \in D \setminus \Sigma'$.

Przyjmując $\mathcal{A} = \mathcal{A}(D)$ (dziedzina całkowitości) możemy powtórzyć argumenty z [40, rozdział 2 i Lemma 3.3].

Niech $f_i \in \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$ będą takie, że $F^i_\omega(x) = f_i(\omega, x)$. Oznaczmy przez

J — ideał w $\mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$ generowanym przez $f_1, \ldots, f_n$ (wtedy J_ω są ideałami w $\mathbb{R}[[x]]$ generowanymi przez $F^1_\omega, \ldots, F^n_\omega$),

$Q_\omega = \mathbb{R}[[x]]/J_\omega$,

$\Delta = \mathbb{N}^n \setminus \mathcal{D}(J)$

$\Delta_\omega = \mathbb{N}^n \setminus \mathcal{D}(J_\omega)$,

$\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ — zbiór wierzchołków diagramu $\mathcal{D}(J)$,

$g^1, \ldots, g^s$ — takie elementy ideału J, że $\beta_i = \nu(g^i)$ dla $i = 1, \ldots, s$,

$g^i_{\beta_i} y^{\beta_i} = \operatorname{in} g^i$,

S — multiplikatywny podzbiór $\mathcal{A}(D)$ generowany przez $g^i_{\beta_i}$.

Ponieważ $\dim_\mathbb{R} Q_\omega < +\infty$ dla $\omega \in D \setminus \Sigma'$, to dla $\omega \in D \setminus \Sigma'$ zbiór Δ_ω jest skończony i $\Delta_\omega = \Delta$ (zob. [6]). Niech $\bar\beta$ będzie największym elementem w Δ. Przyjmijmy

$$\Sigma = \Sigma' \cup \bigcup_{i=1}^{t} \{\omega \in D \mid g^i_{\beta_i}(\omega) = 0\}.$$

Wtedy Σ jest właściwym domkniętym podzbiorem D i klasa abstrakcji $x^{\bar\beta}$ w Q_ω jest niezerowa dla $\omega \in D \setminus \Sigma$.

Definiujemy odwzorowanie liniowe $\phi_\omega : Q_\omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Na elementach bazowych przyjmujemy:

$$\phi_\omega(x^{\bar\beta}) = 1,$$

$$\phi_\omega(x^{\beta}) = 0 \text{ dla } \beta \in \Delta \setminus \{\bar\beta\}$$

i rozszerzamy ϕ_ω liniowo na Q_ω. Niech $\Phi_\omega : Q_\omega \times Q_\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odpowiadającym mu symetrycznym odwzorowaniem dwuliniowym danym wzorem

$$\Phi_\omega(f,g) = \phi_\omega(fg).$$

Przez M_ω oznaczać będziemy macierz odwzorowania Φ_ω w bazie złożonej z jednomianów x^β, $\beta \in \Delta$. Wtedy istnieje taka macierz symetryczna M o elementach z $S^{-1}\mathcal{A}(D)$, że $M_\omega = M(\omega)$.

Oznaczmy przez Jac jakobian $\frac{\partial(F^1,\ldots,F^n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$. Na mocy [40, Lemma 2.6]) istnieje takie $\lambda \in S^{-1}\mathcal{A}(D)$, że dla $\omega \in D \setminus \Sigma$ mamy $\mathrm{Jac}_\omega = \lambda(\omega)x^{\bar\beta}$ w Q_ω.

Odwzorowanie liniowe $\psi_\omega = \lambda(\omega)\phi_\omega : Q_\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia na $D \setminus \Sigma$ założenia twierdzenia Eisenbuda–Levine'a 1.29.

Rzeczywiście, $\psi_\omega(\mathrm{Jac}_\omega) = \lambda(\omega)\phi_\omega(\mathrm{Jac}_\omega) = \lambda(\omega)^2\phi_\omega(x^{\bar\beta}) = \lambda(\omega)^2 > 0$ oraz ψ_ω jest niezdegenerowane (zob. [17]).

Zatem na mocy tego twierdzenia stowarzyszona z nim symetryczna forma kwadratowa Ψ_ω jest niezdegenerowana oraz lokalny stopień topologiczny w zerze odwzorowania F_ω jest równy sygnaturze tej formy.

Macierz formy Ψ_ω można sprowadzić do postaci diagonalnej przez zamianę zmiennych i pomnożenie elementów powstałej macierzy przez kwadraty mianowników. Powiększmy Σ w ten sposób, żeby zera mianowników należały do Σ. Otrzymujemy taką macierz symetryczną T o elementach z $\mathcal{A}(D)$, że dla każdego $\omega \in D \setminus \Sigma$ macierz $T(\omega)$ jest niezdegenerowana i $\deg_0 F_\omega$ jest równy sygnaturze macierzy $T(\omega)$. Niech $\tilde q_1, \ldots, \tilde q_t \in \mathcal{A}(D)$ będą elementami na przekątnej. Przyjmijmy takie $g_i \in \mathcal{A}(\Omega)$, że $\tilde g_i$ są klasami abstrakcji g_i, $i = 1, \ldots t$. Wtedy

$$\deg_0 F_\omega = \operatorname{sgn} q_1(\omega) + \ldots + \operatorname{sgn} q_t(\omega)$$

dla $\omega \in D \setminus \Sigma$.

□

W dalszej części rozdziału będziemy korzystać z następującego faktu (zob. [40]):

Uwaga 4.5 *Jeśli funkcja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ i domknięty podzbiór $D \subset \Omega$ spełniają następujące warunki: istnieje taki właściwy domknięty podzbiór $\Sigma \subset D$, że*

(i) $f|_{D\setminus\Sigma}$ daje się wyrazić na $D \setminus \Sigma$ przez sumę znaków funkcji z $\mathcal{A}(\Omega)$,

(ii) $f|_\Sigma$ daje się wyrazić na Σ przez sumę znaków funkcji z $\mathcal{A}(\Omega)$,

to f daje się też wyrazić na D przez sumę znaków funkcji z $\mathcal{A}(\Omega)$.

Ponieważ Ω jest przestrzenią noetherowską, to $\mathcal{I}(\Sigma)$ jest generowany przez skończoną liczbę elementów z $\mathcal{A}(\Omega)$. Niech $h \in \mathcal{A}(\Omega)$ będzie sumą kwadratów tych elementów, wtedy h jest nieujemne i $h^{-1}(0) \cap D = \Sigma$. Mamy zatem dla $v_i \in \mathcal{A}(\Omega)$

$$\sum \operatorname{sgn} h(\omega) v_i(\omega) = \sum \operatorname{sgn} v_i(\omega)$$

dla $\omega \in D \setminus \Sigma$ i

$$\sum \operatorname{sgn} h(\omega) v_i(\omega) = 0$$

dla $\omega \in \Sigma$.

Podobnie, niech $p_1, \ldots, p_r \in \mathcal{A}(\Omega)$, wtedy

$$\sum \operatorname{sgn} p_j(\omega) + \sum \operatorname{sgn}(-h(\omega) p_j(\omega)) = 0$$

dla $\omega \in D \setminus \Sigma$ i

$$\sum \operatorname{sgn} p_j(\omega) + \sum \operatorname{sgn}(-h(\omega) p_j(\omega)) = \sum \operatorname{sgn} p_j(\omega)$$

dla $\omega \in \Sigma$.

Otrzymujemy

$$\sum \operatorname{sgn} h(\omega) v_i(\omega) + \sum \operatorname{sgn} p_j(\omega) + \sum \operatorname{sgn}(-h(\omega) p_j(\omega)) =$$

$$= \begin{cases} \sum \operatorname{sgn} v_i(\omega), & \omega \in D \setminus \Sigma \\ \sum \operatorname{sgn} p_j(\omega), & \omega \in \Sigma \end{cases}.$$

Zatem jeśli pewna funkcja z Ω w $\mathbb{Z}$ daje się wyrazić przez sumę znaków funkcji z $\mathcal{A}(\Omega)$ na $D \setminus \Sigma$ oraz na Σ, to daje się też wyrazić przez sumę znaków funkcji z $\mathcal{A}(\Omega)$ na D.

Lemat 4.6 *Jeśli $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$, $D \subset \Omega$ jest zbiorem domkniętym i dla każdego domkniętego nierozkładalnego podzbioru $D' \subset \Omega$ istnieją właściwy domknięty podzbiór $\Sigma \subset D'$ oraz $q_1, \ldots, q_t \in \mathcal{A}(\Omega)$ takie, że*

$$\forall_{\omega \in D' \setminus \Sigma} \; g(\omega) = \sum_{i=1}^{t} \operatorname{sgn} q_i(\omega),$$

to istnieją takie $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{A}(\Omega)$, że

$$\forall_{\omega \in D} \; g(\omega) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn} g_i(\omega).$$

W szczególności lemat jest prawdziwy dla $D = \Omega$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy w dwóch krokach.

1. Pokażemy, że dla każdego domkniętego podzbioru $D \subset \Omega$ istnieje domknięty podzbiór właściwy $\Sigma \subset D$ i takie funkcje $u_i \in \mathcal{A}(\Omega)$, że

$$\forall_{\omega \in D \setminus \Sigma}\ g(\omega) = \sum_{i=1}^{t} \operatorname{sgn} u_i(\omega).$$

Niech $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_m$ będzie rozkładem D na składowe nierozkładalne. Oznaczmy $\hat{D} = D_2 \cup \ldots \cup D_m$. Niech $h \in \mathcal{A}(\Omega)$ będzie nieujemne i takie, że

$$h \equiv 0 \text{ na } \hat{D},\ \ h \not\equiv 0 \text{ na } D_1.$$

Na mocy założenia istnieją $q_1, \ldots, q_t \in \mathcal{A}(\Omega)$ i właściwy domknięty podzbiór $\Sigma' \subset D_1$ taki, że dla $\omega \in D_1 \setminus \Sigma'$ mamy

$$g(\omega) = \operatorname{sgn} q_1(\omega) + \ldots + \operatorname{sgn} q_t(\omega).$$

Niech $\Sigma = \Sigma' \cup \hat{D} \cup (h^{-1}(0) \cap D_1)$. Ponieważ D_1 jest nierozkładalny, to $\Sigma' \cup (h^{-1}(0) \cap D_1) \neq D_1$, zatem $D \setminus \Sigma \neq \emptyset$ i

$$g(\omega) = \sum_{i=1}^{t} \operatorname{sgn} h(\omega) q_i(\omega)$$

dla $\omega \in D \setminus \Sigma$. Przyjmujemy $u_i(\omega) = h(\omega) q_i(\omega)$ dla $i = 1, \ldots t$. Dla zbioru domkniętego $D \subset \Omega$ wskazaliśmy jego domknięty podzbiór właściwy Σ i takie funkcje $u_i \in \mathcal{A}(\Omega)$, że

$$\forall_{\omega \in D \setminus \Sigma}\ g(\omega) = \sum_{i=1}^{t} \operatorname{sgn} u_i(\omega).$$

2. Na mocy pierwszego kroku dowodu istnieją właściwy domknięty podzbiór $\Sigma_1 \subset D$ i $u_1, \ldots, u_{s(1)} \in \mathcal{A}(\Omega)$ takie, że dla $\omega \in D \setminus \Sigma_1$

$$g(\omega) = \operatorname{sgn} u_1(\omega) + \ldots + \operatorname{sgn} u_{s(1)}(\omega).$$

Rozważmy zbiór Σ_1, stosując ponownie krok 1., otrzymujemy $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$ i $w_1, \ldots, w_{s(2)} \in \mathcal{A}(\Omega)$ takie, że dla $\omega \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_2$

$$g(\omega) = \operatorname{sgn} w_1(\omega) + \ldots + \operatorname{sgn} w_{s(2)}(\omega).$$

Kontynuując tę konstrukcję, otrzymujemy zstępujący ciąg właściwych domkniętych podzbiorów

$$D \supset \Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \ldots$$

Ω jest przestrzenią noetherowską, zatem ten ciąg musi się stabilizować i dla pewnego naturalnego k mamy $\Sigma_k = \emptyset$. Zatem g jest sumą znaków funkcji z $\mathcal{A}(\Omega)$ na każdym ze zbiorów $D \setminus \Sigma_1, \Sigma_1 \setminus \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{k-2} \setminus \Sigma_{k-1}, \Sigma_{k-1}$.

Stosując uwagę 4.5 do zbiorów Σ_{k-2} i Σ_{k-1}, następnie Σ_{k-3} i Σ_{k-2} itd. aż do D i Σ_1 otrzymujemy, że g jest sumą znaków funkcji z $\mathcal{A}(\Omega)$ na D.

□

Lematy 4.4 i 4.6 implikują następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.7 *Niech $\{F_\omega\}_{\omega\in\Omega} \in \mathcal{S}_n(\Omega)$, $\Sigma \subset \Omega$ będzie zbiorem domkniętym i niech dla każdego $\omega \in \Sigma$ punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ będzie izolowany w $F_\omega^{-1}(0)$. Wtedy istnieją takie $v_1, \ldots, v_s \in \mathcal{A}(\Omega)$, że dla $\omega \in \Sigma$*

$$\deg_0 F_\omega = \operatorname{sgn} v_1(\omega) + \ldots + \operatorname{sgn} v_s(\omega).$$

Przypomnijmy, że dla $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ oznaczamy $\tilde{f} = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^\alpha f x^\alpha \in \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$, a dla $h = \sum_\alpha h_\alpha x^\alpha \in \mathcal{A}(\Omega)[[x]]$ i $\omega \in \Omega$ oznaczamy $h_\omega = \sum_\alpha h_\alpha(\omega) x^\alpha$.

Niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\Omega)$. Dla każdego $\omega \in \Omega$ niech $I_\omega \subset \mathbb{R}\{x\} = \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ oznacza ideał generowany przez $\left\{\tilde{f}_\omega \mid f \in \mathcal{F}\right\}$ i niech X_ω oznacza reprezentanta kiełka w zerze $V(I_\omega)$. Pokażemy, że istnieje takie $h \in \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$, że $X_\omega = V(h_\omega)$.

Lemat 4.8 *Istnieją takie $h_1, h_2, \ldots, h_q \in \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$, że dla $\omega \in \Omega$*

$$X_\omega = V(h_{1,\omega}, \ldots h_{q,\omega}).$$

Dowód. Oznaczmy przez I ideał w $\mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$ generowany przez $\{\tilde{f} \mid f \in \mathcal{F}\}$. Z twierdzenia 2.1 istnieje taki skończenie generowany ideał $I' = (h_1, \ldots, h_q) \subset \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$, że

$$\forall_{\omega\in\Omega}\ I_\omega = I'_\omega,$$

gdzie $I'_\omega = (h_{1,\omega}, \ldots, h_{q,\omega})$. Mamy

$$X_\omega = V(I_\omega) = V(I'_\omega) = V(h_{1,\omega}, \ldots, h_{q,\omega}).$$

□

Wniosek 4.9 *Istnieje takie $h = h_1^2 + \ldots + h_q^2 \in \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$, że $X_\omega = V(h_\omega)$ dla każdego $\omega \in \Omega$.*

4.2 Charakterystyka Eulera ogniw rodziny zbiorów semianalitycznych i analitycznych

Weźmy $h \in \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$. Wtedy $\Sigma = \{\omega \in \Omega \mid h(0) = 0\}$ jest zbiorem domkniętym. Pokażemy, że istnieje takie $k > 0$, że dla $\omega \in \Sigma$

$$g_\omega(x) = h_\omega(x) - (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^k$$

ma w 0 izolowany punkt krytyczny oraz

$$\chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \leq 0\})) = 1 - \deg_0 \nabla g_\omega,$$

gdzie $\nabla g_\omega = \left(\frac{\partial g_\omega}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g_\omega}{\partial x_n}\right) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.

Powtórzymy argumentację z dowodu [44, Theorem 1].

Oznaczmy $r(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Załóżmy, że h_ω, r są reprezentantami kiełków zdefiniowanymi w otwartym otoczeniu U punktu 0. Definiujemy

$$V_\omega = \{(x, \epsilon, y) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, r(x) = \epsilon^2,\ \operatorname{rank}(\mathrm{d}r(x), \mathrm{d}h_\omega(x)) \leq 1,\ y = h_\omega(x)\}.$$

Wtedy x i y są odpowiednio punktami i wartościami krytycznymi funkcji h_ω na sferze o promieniu ϵ.

Niech $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie rzutem na dwie ostatnie współrzędne. V_ω jest zbiorem analitycznym (nierówność w definicji można zastąpić przyrównaniem odpowiednich minorów do zera, otrzymamy wtedy skończoną liczbę równań) i $\pi : V_\omega \longrightarrow \pi(V_\omega)$ jest w pewnym otoczeniu zera odwzorowaniem właściwym. Stąd $\pi(V_\omega)$ jest domknięty i subanalityczny w pewnym otoczeniu zera.

Oznaczmy $Y_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $Y_2^\omega = \overline{\pi(V_\omega) \setminus Y_1}$. Wtedy Y_2^ω jest zbiorem subanalitycznym. Jeśli $\epsilon \neq 0$, to

$$\pi(V_\omega) \cap \{\epsilon\} \times \mathbb{R} = \{\epsilon\} \times \{\text{zbiór wartości krytycznych } h_\omega|_{S_\epsilon^{n-1}}\}.$$

Na mocy wniosku 3.2 istnieje taka stała $\alpha > 0$, że dla $\omega \in \Omega$

$$|y| = |h_\omega(x)| \geq ||x||^\alpha = \epsilon^\alpha$$

dla każdej takiej pary $(\epsilon, y) \in Y_2^\omega$, że $\epsilon < \epsilon_\omega$ i y jest dostatecznie bliski 0. Weźmy liczbę całkowitą $k > \alpha$. Definiujemy $g_\omega(x) = h_\omega(x) - r^k(x)$.

Niech

$$V'_\omega = \{(x, \epsilon, y) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, r(x) = \epsilon^2,\ \operatorname{rank}(\mathrm{d}r(x), \mathrm{d}g_\omega(x)) \leq 1,\ y = g_\omega(x)\}.$$

Ponieważ $\operatorname{rank}(\mathrm{d}r(x), \mathrm{d}g_\omega(x)) = \operatorname{rank}(\mathrm{d}r(x), \mathrm{d}h_\omega(x))$, to

$$V'_\omega = \{(x, \epsilon, y) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, r(x) = \epsilon^2,\ \operatorname{rank}(\mathrm{d}r(x), \mathrm{d}h_\omega(x)) \leq 1,\ y = h_\omega(x) - \epsilon^{2k}\}.$$

Definiujemy $G(\epsilon, y) = (\epsilon, y - \epsilon^{2k})$. Wtedy $\pi(V'_\omega) = G(\pi(V_\omega))$, zatem mamy

$$\pi(V'_\omega) \cap \mathbb{R} \times \{0\} = \{(0, 0)\}$$

w odpowiednio małym otoczeniu zera. Stąd, jeśli $\epsilon \neq 0$ jest dostatecznie blisko 0, to 0 jest wartością regularną $g_\omega|_{S_\epsilon^{n-1}}$, zatem g_ω ma w 0 izolowany punkt krytyczny.

Rzeczywiście, gdyby punkt krytyczny g_ω w 0 nie był izolowany, to z lematu o wyborze łuku 1.4 istniałaby taka krzywa $\gamma(t)$, że $\nabla g(\gamma(t)) \equiv 0$. Jeżeli $x \in S_\epsilon^{n-1}$ i $\nabla g_\omega(x) = 0$, to x jest punktem krytycznym $g_\omega|_{S_\epsilon^{n-1}}$. Mamy

$$\frac{d}{dt} g_\omega(\gamma(t)) = \left\langle \nabla g_\omega(\gamma(t)), \frac{d}{dt}\gamma(t) \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial g_\omega}{\partial x_1}(\gamma(t))\frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \ldots + \frac{\partial g_\omega}{\partial x_n}(\gamma(t))\frac{d\gamma_n}{dt}(t) \equiv 0,$$

gdzie $\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$ dla $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Zatem g_ω byłaby stała na krzywej γ, a ponieważ $\gamma(0) = 0$, to $g_\omega(\gamma(t)) \equiv 0$. Jest to sprzeczne z tym, że $\pi(V'_\omega) \cap \mathbb{R} \times \{0\} = \{(0, 0)\}$.

[44, Lemma 1] implikuje, że dla każdego $\omega \in \Sigma$ i dla dostatecznie małego $\epsilon = \epsilon(\omega)$

$$\chi(S^{n-1}_\epsilon \cap \{h_\omega \le 0\}) = 1 - \deg_0 \nabla g_\omega.$$

Zauważmy, że dla $\omega \in \Omega$ i dostatecznie małych $\epsilon > 0$ jeśli $h_\omega(0) \neq 0$, to mamy $\chi(S^{n-1}_\epsilon \cap \{h_\omega \le 0\}) = 0$ dla n parzystych i $\chi(S^{n-1}_\epsilon \cap \{h_\omega \le 0\}) = 1 + \operatorname{sgn}(-h_\omega(0))$ dla n nieparzystych. Zatem na $\Omega \setminus \Sigma$

$$\chi(S^{n-1}_\epsilon \cap \{h_\omega \le 0\}) = \begin{cases} 0, & n \text{ parzyste} \\ 1 + \operatorname{sgn}(-h_\omega(0)), & n \text{ nieparzyste} \end{cases}.$$

Stosując twierdzenie 4.7 oraz uwagę 4.5, otrzymujemy:

Twierdzenie 4.10 *Dla $h \in \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$ istnieją takie $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathcal{A}(\Omega)$, że dla $\omega \in \Omega$*

$$\chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \le 0\}) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn} v_i(\omega).$$

Następny lemat będzie odgrywał kluczową rolę w dowodach twierdzeń 4.13 i 5.2.

Lemat 4.11 *Dla $h \in \mathcal{A}(\Omega)_c[[x]]$ istnieją takie $h_1, h_2, \ldots, h_s \in \mathcal{A}(\Omega)$, że dla $\omega \in \Omega$*

$$\frac{1}{2}(\chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \ge 0\})) \pm \chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \le 0\}))) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn} h_i(\omega).$$

Dowód. Definiujemy $g(\omega, t, x) = th(\omega, x)$ dla ω z pewnego otoczenia zbioru Ω, $t \in [-1; 1]$. Zbiór $\Omega \times [-1, 1]$ jest zwarty i semianalityczny, zatem g należy do $\mathcal{A}(\Omega \times [-1, 1])_c[[x]]$.

Wtedy dla $\omega \in \Omega$, $t \in [-1; 1]$ mamy $g_{\omega,t} \ge 0$ jeśli $h_\omega \ge 0$ i $t \ge 0$ lub $h_\omega \le 0$ i $t \le 0$.

Niech dla $t > 0$ i ustalonego $\omega \in \Omega$

$$A_1 = \{(x, \tau) \in S^n_{(0,t),\epsilon} \mid g_{\omega,\tau}(x) \ge 0 \text{ i } \tau \ge t\}$$

$$A_2 = \{(x, \tau) \in S^n_{(0,t),\epsilon} \mid g_{\omega,\tau}(x) \ge 0 \text{ i } \tau \le t\}.$$

Wtedy dla ϵ dostatecznie małych $S^n_{(0,t),\epsilon} \cap \{g_{\omega,t} \ge 0\} = A_1 \cup A_2$ oraz

$$A_1 \cap A_2 = \{(x, \tau) \in S^n_{(0,t),\epsilon} \mid g_{\omega,\tau}(x) \ge 0 \text{ i } \tau = t\} = \{(x, t) \in S^n_{(0,t),\epsilon} \mid h_\omega(x) \ge 0\}.$$

Zbiory A_1 i A_2 są homeomorficzne ze zbiorem $\{x \in \mathbb{R}^n \mid h_\omega(x) \geq 0, \|x\| \leq \epsilon\}$, który dla małych $\epsilon > 0$ jest homeomorficzny ze stożkiem. Ponieważ A_1 i A_2 są ściągalne do punktu, to $\chi(A_1) = \chi(A_2) = 1$ i dla $t > 0$ i dostatecznie małych $\epsilon > 0$ mamy

$$\chi(S^n_{(0,t),\epsilon} \cap \{g_{\omega,t} \geq 0\}) = 2 - \chi(S^{n-1}_\epsilon \cap \{h_\omega \geq 0\}).$$

Analogicznie

$$\chi(S^n_{(0,-t),\epsilon} \cap \{g_{\omega,t} \geq 0\}) = 2 - \chi(S^{n-1}_\epsilon \cap \{h_\omega \leq 0\})$$

dla $t > 0$ i dostatecznie małych ϵ.

Na mocy twierdzenia 4.10 istnieją takie $g_1, g_2, \ldots, g_s \in \mathcal{A}(\Omega \times [-1;1])$, że

$$\forall_{(\omega,t)\in\Omega\times[-1;1]}\ \chi(\mathrm{lk}(0, \{g_{\omega,t} \geq 0\})) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn} g_i(\omega, t).$$

Otrzymujemy

$$\frac{1}{2}(\chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \geq 0\})) - \chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \leq 0\}))) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} (2 - \chi(\mathrm{lk}(0, \{g_{\omega,t} \geq 0\})) - 2 + \chi(\mathrm{lk}(0, \{g_{\omega,t} \geq 0\}))) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} (\chi(\mathrm{lk}(0, \{g_{\omega,-t} \geq 0\})) - \chi(\mathrm{lk}(0, \{g_{\omega,t} \geq 0\}))) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} \sum_{i=1}^{s} (\operatorname{sgn} g_i(\omega, -t) - \operatorname{sgn}\ g_i(\omega, t)).$$

Niech D będzie domkniętym podzbiorem nierozkładalnym Ω. Możemy założyć, że $g_i \not\equiv 0$ na $D \times [-1; 1]$. Dla $i = 1, \ldots, s$ istnieją $h_i \in \mathcal{A}(\Omega \times [-1; 1])$ i nieujemne liczby całkowite k_i takie, że $g_i(\omega, t) = t^{k_i} h_i(\omega, t)$ oraz $h_i \not\equiv 0$ na $D \times \{0\}$. Niech

$$\Sigma := \{\omega \in D \mid \exists_{i\in\{1,\ldots,s\}}\ h_i(\omega, 0) = 0\},$$

wtedy Σ jest właściwym domkniętym podzbiorem D. Dla $\omega \in D \setminus \Sigma$

$$\frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} \sum_{i=1}^{s} (\operatorname{sgn}\ g_i(\omega, -t) - \operatorname{sgn} g_i(\omega, t)) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn} h'_i(\omega),$$

gdzie $h'_i(\omega) = -h_i(\omega, 0)$ jeśli k_i jest nieparzyste, a $h'_i(\omega) = 0$ jeśli k_i jest parzyste. Oczywiście $h'_i \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Z drugiej strony

$$\frac{1}{2}(\chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \geq 0\})) + \chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \leq 0\}))) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} (2 - \chi(\mathrm{lk}(0, \{g_{\omega,t} \geq 0\})) + 2 - \chi(\mathrm{lk}(0, \{g_{\omega,-t} \geq 0\}))) =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} (4 - \chi(\mathrm{lk}(0, \{g_{\omega,-t} \geq 0\})) - \chi(\mathrm{lk}(0, \{g_{\omega,t} \geq 0\}))) =$$
$$= 2 - \frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} \sum_{i=1}^{s} (\operatorname{sgn} g_i(\omega, -t) + \operatorname{sgn} g_i(\omega, t))$$

i dla $\omega \in D \setminus \Sigma$ otrzymujemy jak wyżej

$$\frac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} \sum_{i=1}^{s} (\operatorname{sgn} g_i(\omega, -t) + \operatorname{sgn} g_i(\omega, t)) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn} h_i''(\omega),$$

gdzie $h_i''(\omega) = h_i(\omega, 0)$ jeśli k_i jest parzyste, a $h_i''(\omega) = 0$ jeśli k_i jest nieparzyste.

Pokazaliśmy, że $\frac{1}{2}(\chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \geq 0\})) \pm \chi(\mathrm{lk}(0, \{h_\omega \leq 0\})))$ jest sumą znaków funkcji analitycznych na $D \setminus \Sigma$. Zastosowanie lematu 4.6 kończy dowód. □

Wniosek 4.12 *Dla $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ istnieją takie $g_1, g_2, \ldots, g_q \in \mathcal{A}(\Omega)$, że dla $\omega \in \Omega$*

$$\frac{1}{2}\chi(\mathrm{lk}(\omega, V(f))) = \frac{1}{2}\chi(\mathrm{lk}(0, V(\tilde{f}_\omega))) = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} g_i(\omega),$$

gdzie $V(f)$ jest kiełkiem w ω, a $V(\tilde{f}_\omega)$ kiełkiem w 0.

Dowód. Mamy

$$\chi(S_\epsilon^{n-1} \cap V(\tilde{f}_\omega)) = \chi(S_\epsilon^{n-1} \cap \{\tilde{f}_\omega \leq 0\}) + \chi(S_\epsilon^{n-1} \cap \{\tilde{f}_\omega \geq 0\}) - \chi(S_\epsilon^{n-1}),$$

zatem na mocy lematu 4.11

$$\frac{1}{2}\chi(S_\epsilon^{n-1} \cap V(\tilde{f}_\omega)) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn} h_i(\omega) - \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}.$$

□

Wnioski 4.9 i 4.12 implikują:

Twierdzenie 4.13 *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zwartym zbiorem semianalitycznym i niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną rodziną funkcji zawartą w $\mathcal{A}(\Omega)$. Dla $\omega \in \Omega$ oznaczmy przez I_ω ideał generowany w $\mathbb{R}\{x\} = \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ przez zbiór $\left\{\tilde{f}_\omega \mid f \in \mathcal{F}\right\}$, a przez X_ω reprezentanta kiełka w zerze zbioru $V(I_\omega)$. Wtedy istnieją takie $v_1, v_2, \ldots, v_q \in \mathcal{A}(\Omega)$, że*

$$\forall_{\omega\in\Omega}\ \frac{1}{2}\chi(\mathrm{lk}(0, X_\omega)) = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} v_i(\omega).$$

Uwaga 4.14 *Śledząc dowód lematu 4.11 można sprawdzić, że wynik ten jest prawdziwy także w przypadku, gdy zamiast $\mathcal{A}(\Omega)$ będziemy rozpatrywać taką algebrę Ω–noetherowską $\mathcal{O}(\Omega)$ (gdzie Ω jest lokalnie domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^n$), że*

1) *istnieje taki podzbiór $I \subset \mathbb{R}$ zawierający otoczenie 0, że $\mathcal{O}(\Omega \times I)$ jest $(\Omega \times I)$–noetherowska oraz istnieje naturalne włożenie $\mathcal{O}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{O}(\Omega \times I)$*

2) *dla $g \in \mathcal{O}(\Omega \times I)$ i składowej nierozkładalnej D zbioru Ω takich, że $g \not\equiv 0$ na $D \times I$, istnieją $h \in \mathcal{O}(\Omega \times I)$ i nieujemne całkowite k takie, że $g(\omega, t) = t^k h(\omega, t)$ dla $\omega \in D$ i t dostatecznie blisko 0, $h(\cdot, 0) \in \mathcal{O}(\Omega)$ oraz $h \not\equiv 0$ na $D \times \{0\}$.*

Algebra funkcji Nasha na otwartym zbiorze semialgebraicznym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ z przykładu 2.10 oraz algebry z przykładów 2.13, 2.14 spełniają te warunki. Dla przykładu podamy argumentację dla algebry funkcji Nasha (dla pozostałych analogicznie).

Możemy przyjąć $I = (-1; 1)$. Niech $g \in \mathcal{N}(\Omega \times I)$, $g \not\equiv 0$ na $D \times I$, gdzie D jest składową nierozkładalną Ω. Jeśli $g \equiv 0$ na $D \times \{0\}$ (w przeciwnym wypadku przyjmujemy $h = g$), to:

$$g(x,t) = g(x,t) - g(x,0) = \int_0^1 \frac{d}{ds} g(x, st)\, ds =$$

$$= \int_0^1 t \frac{\partial g}{\partial t}(x, st)\, ds = t \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t}(x, st)\, ds,$$

czyli $g(x,t) = tf(x,t)$. Pokażemy, że $f(x,t) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t}(x, st)\, ds \in \mathcal{N}(\Omega \times I)$. Skorzystamy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.15 *([7, Proposition 8.1.8]) Niech U będzie otwartym semialgebraicznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Funkcja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją Nasha wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją analityczną, spełniającą nietrywialne równanie algebraiczne na U.*

Innymi słowy funkcja f jest Nasha wtedy i tylko wtedy, gdy jest analityczna oraz istnieje taki wielomian $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, y] = \mathbb{R}[x, y]$, $P \not\equiv 0$, że $P(x, f(x)) = 0$ na U.

Niech $P \in \mathbb{R}[x, t, y]$ będzie takim wielomianem dla funkcji g, tzn. na $\Omega \times I$ mamy $P(x, t, g(x,t)) = 0$. Przyjmijmy $P' \in \mathbb{R}[x, t, y]$, $P'(x, t, y) = P(x, t, ty)$, wtedy $P' \not\equiv 0$. Funkcja $f(x,t) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t}(x, st)\, ds$ jest funkcją analityczną oraz spełnia równanie $P'(x, t, f(x,t)) = P(x, t, tf(x,t)) = P(x, t, g(x,t)) = 0$ na $\Omega \times I$, zatem jest funkcją Nasha na $\Omega \times I$.

Jeśli $f \equiv 0$ na $D \times \{0\}$, to powtarzamy dla f wcześniejszy rachunek, po skończonej liczbie kroków otrzymamy h o żądanych własnościach.

Algebra $\mathbb{R}[x][f_1, \ldots, f_q]$ (przykład 2.11) także spełnia powyższe warunki. Możemy bowiem zdefiniować algebrę $\mathbb{R}[x,t][F_1, \ldots, F_q]$, dla której odwzorowania $F_i : \mathbb{R}^n \times [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ są dane wzorami $F_i(x,t) = f_i(x)$. Jest to algebra $\mathbb{R}^n \times [-1;1]$–noetherowska i $F_1, \ldots, F_q$ nie zależą od ostatniej zmiennej, analogicznie jak w przypadku funkcji Nasha można pokazać, że posiada ona własność 2).

Rozdział 5

Sumy znaków rzeczywistych funkcji analitycznych

Niech $Y \subset \mathbb{R}^n$ będzie rzeczywistym zwartym zbiorem semianalitycznym. Załóżmy, że funkcję $\phi : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ posiada reprezentację jako skończona suma

$$\phi = \sum_i m_i \mathbf{1}_{Y_i},$$

gdzie m_i są liczbami całkowitymi, Y_i są semianalitycznymi podzbiorami Y, a $\mathbf{1}_{Y_i}$ oznaczają funkcje charakterystyczne zbiorów Y_i.

Możemy tak wybrać Y_i, żeby były zwartymi semianalitycznymi podzbiorami Y. Zgodnie z [33] i [12] definiujemy całkę Eulera, operator linku Λ i operator dualny D:

$$\int_Y \phi = \sum_i m_i \chi(Y_i),$$

$$\Lambda\phi(y) = \int_Y \phi \mathbf{1}_{S^{n-1}_{y,\epsilon}},$$

gdzie $\epsilon = \epsilon(y)$ jest dostatecznie mały,

$$\mathrm{D}\,\phi(y) = \phi(y) - \Lambda\phi(y).$$

Niech Ω będzie jak wyżej zwartym semianalitycznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Będziemy mówić, że funkcja $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ jest *sumą znaków funkcji analitycznych na* Ω, jeśli istnieją takie $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathcal{A}(\Omega)$, że $g(\omega) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{sgn} v_i(\omega)$. Wtedy g jest w rzeczywistości zdefiniowana na zwartym semianalitycznym otoczeniu Y zbioru Ω, na którym zdefiniowane są wszystkie funkcje v_i. W tym przypadku dla $\omega \in \operatorname{int} Y \supset \Omega$ mamy:

$$\Lambda g(\omega) = \int_Y g \mathbf{1}_{S^{n-1}_{\omega,\epsilon}} = \int_{S^{n-1}_{\omega,\epsilon}} g = \sum_{i=1}^{s} \left(\chi(\{v_i \geq 0\} \cap S^{k-1}_{\omega,\epsilon}) - \chi(\{v_i \leq 0\} \cap S^{k-1}_{\omega,\epsilon})\right),$$

gdzie ϵ jest dostatecznie mały.

Wykorzystując twierdzenie 4.13, lemat 4.11 i argumentację podobną do przeprowadzonej w [40, Corollary 6.3 i Theorem 6.4] pokażemy, jak otrzymać wynik analogiczny do głównego twierdzenia [16].

Jeśli $a \neq 0 \neq b$, to mamy $\operatorname{sgn} a + \operatorname{sgn} b = 1 + \operatorname{sgn} ab \mod 4$.

Załóżmy, że $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Wtedy $X = f^{-1}(0)$ jest zbiorem analitycznym zdefiniowanym w otoczeniu Ω.

Na mocy twierdzenia 4.13 istnieją takie funkcje $v_1, v_2, \ldots, v_q \in \mathcal{A}(\Omega)$, że $\frac{1}{2}\chi(\mathrm{lk}(0, X_\omega)) = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} v_i(\omega)$. Niech $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \Omega_m$ będzie rozkładem na składowe nierozkładalne. Załóżmy, że $v_i \not\equiv 0$ na Ω_1 dla $i = 1, \ldots, l \leq q$. Przyjmując $v = v_1 v_2 \ldots v_l$ i $\Sigma = \{\omega \in \Omega_1 \mid v(\omega) = 0\} \cup \bigcup_{i=2}^{m} \Omega_i$ otrzymujemy

Wniosek 5.1 *Istnieją właściwy domknięty podzbiór $\Sigma \subset \Omega$, stała całkowita $\mu = l - 1$ i funkcja analityczna $v \in \mathcal{A}(\Omega)$ takie, że v jest różna od zera na $\Omega \setminus \Sigma$ i dla $\omega \in \Omega \setminus \Sigma$*

$$\frac{1}{2}\chi(\mathrm{lk}(0, X_\omega)) = \mu + \operatorname{sgn} v(\omega) \mod 4.$$

W szczególności dla takich ω

$$\frac{1}{2}\chi(\mathrm{lk}(0, X_\omega)) = \mu + 1 \mod 2.$$

Lemat 4.11 implikuje też twierdzenie analogiczne jak w [33]:

Twierdzenie 5.2 *Jeśli $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ jest sumą znaków funkcji analitycznych $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathcal{A}(\Omega)$ na Ω (w szczególności jeśli $g(\omega) = \frac{1}{2}\chi(\mathrm{lk}(0, X_\omega))$), to funkcje $\frac{1}{2}\Lambda g$ i $\frac{1}{2}(g + \mathrm{D}\, g)$ mają wartości całkowite i są sumami znaków funkcji analitycznych na Ω.*

Dowód. Mamy

$$\frac{1}{2}\Lambda g(\omega) = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2}\left(\chi(\{v_i(\omega) \geq 0\} \cap S^{n-1}_{\omega,\epsilon}) - \chi(\{v_i(\omega) \leq 0\} \cap S^{n-1}_{\omega,\epsilon})\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2}(\chi(\mathrm{lk}(\omega, \{v_i \geq 0\})) - \chi(\mathrm{lk}(\omega, \{v_i \leq 0\}))$$

dla dostatecznie małego ϵ, zatem teza wynika z lematu 4.11.

$\square$

Bibliografia

[1] Akbulut, S., King, H.: The topology of real algebraic sets. Enseign. Math. 29 (1983), 221–261.

[2] Akbulut, S., King, H.: Topology of real algebraic sets. MSRI Publ. 25, Springer – Verlag, New York, 1992.

[3] Balcerzyk, S., Jozefiak, T.: Pierścienie przemienne. PWN Warszawa (1985).

[4] Benedetti, R., Dedò, M.: The topology of two – dimensional real algebraic varieties. Annali Math. Pura Appl. 127 (1981), 141–171

[5] Bierstone, E., Milman, D.: Semianalytic and subanalytic sets. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 67 (1988), 5–42.

[6] Bierstone, E., Milman, D.: Relations among analytic functions. Ann. Inst. Fourier 37 (1987), 187–239.

[7] Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.–F.: Real algebraic geometry. Berlin: Springer – Verlag (1998).

[8] Bonnard, I.: Nash constructible functions. Manuscripta Math. 112 (2003), no. 1, 55–75.

[9] Bonnard, I.: Combinatorial characterizations of algebraic sets. Algorithmic and quantitative real algebraic geometry (Piscataway, NJ, 2001), 23–33, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 60, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[10] Bonnard, I.: Description of algebraically contructible functions. Adv. Geom. 3 (2003), no. 2, 145–161.

[11] Bonnard, I.: Un critére pour reconâitre les fonctions algébriquement constructibles. J. Reine Angew. Math. 526 (2000), 61–88.

[12] Bonnard, I., Pieroni, F.: Constructible functions on 2–dimensional analytic manifolds. (preprint)

[13] Coste, M.: Sous–ensembles algébriques réels de codimension 2. Real Analytic and Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. 1420, Springer – Verlag (1990), 111–120.

[14] Coste, M.: Reconnâitre effectivement les ensembles algébriques réels. Bull. IREM, Rennes (1990).

[15] Coste, M., Kurdyka, K.: On the link of a stratum in a real algebraic set. Topology 31 (1992), no. 2, 323–336.

[16] Coste, M., Kurdyka, K.: Le discriminant d'un morphisme de variétés algébriques réelles. Topology 37 (1998), no. 2, 393–399.

[17] Eisenbud, D., Levine, H. I.: An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ. Ann. of Math., 106 (1977), 19–44.

[18] El Khadiri, A., Hlal, M.: Noethérianité de certaines algébres de fonctions analytiques et applications. Ann. Polon. Math. 75 (2000), no. 3, 247–256.

[19] El Khadiri, A., Tougeron, J.–Cl.: Familles noethériennes de modules sur $k[[x]]$ et applications. (preprint, 1984)

[20] El Khadiri, A., Tougeron, J.–Cl.: Familles noethériennes de modules sur $k[[x]]$ et applications. Bull. Sci. math. 120 (1996), 253–292.

[21] El Khadiri, A., Tougeron, J.–Cl.: Familles noethériennes de sous–modules de $k[[x]]^p$ et applications. I. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 301 (1985), no. 9, 423–426.

[22] El Khadiri, A., Tougeron, J.–Cl.: Familles noethériennes de sous–modules de $k[[x]]^p$ et applications. II. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 301 (1985), no. 10, 475–478.

[23] Hermite, C.: Remarques sur le théorème de Sturm. C. R. Acad. Sci. Paris 36 (1853), 52–54.

[24] Hermite, C.: Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées. Oeuvres de Charles Hermite, Tome 3, ed. E. Picard, Edition Paris, Gauthier – Villars, 1912, 1–34.

[25] Galligo, A.: Théorème de division et stabilité en géometrié analytique locale. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29 (1979), 107–184.

[26] Khimshiashvili, G. M.: On the local degree of a smooth map. Soobshch. Akad. Nauk. Gruz. SSR, 85 (1977), 309–311.

[27] Kurdyka, K.: Ensembles semi–algébriques symétriques par arcs. Math. Ann. 282 (1988), 445–462.

[28] Łojasiewicz, S.: Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej. Biblioteka Matematyczna, 68. Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warszawa, 1988.

[29] Łojasiewicz, S.: Ensembles semi–analytiques, IHES 1965.

[30] Łojasiewicz, S.: Triangulation of semi–analytic sets. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 18 (1964), 449–474.

[31] Massey, W. S.: A basic course in algebraic topology. Springer – Verlag, New York (1991).

[32] Mather, J.: Stratifications and mappings. Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador,1971), Academic Press, New York, 1973, 195–232.

[33] McCrory, C., Parusiński, A.: Algebraically constructible functions, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. (4) 30 (1997), 527–552.

[34] McCrory, C., Parusiński, A.: Complex monodromy and the topology of real algebraic sets. Compositio Math. 106, (1997), 211–233.

[35] McCrory, C., Parusiński, A.: Topology of real algebraic sets of dimension 4: necessary conditions. Topology 39 (2000),495–523.

[36] Milnor, J. W.: Topologia z różniczkowego punktu widzenia. PWN Warszawa (1969).

[37] Narasimhan, R.: Introduction to the theory of analytic spaces. Lecture Notes in Mathematics, No. 25 Springer – Verlag, Berlin – New York 1966.

[38] Nirenberg, L.: Topics in nonlinear functional analysis. With a chapter by E. Zehnder. Notes by R. A. Artino. Lecture Notes, 1973–1974. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1974.

[39] Nowel, A.: Topological invariants of analytic sets associated with Noetherian families. (ukaże się w: Annales de l'Institut Fourier 55, 2005).

[40] Parusiński, A., Szafraniec, Z.: Algebraically constructible functions and signs of polynomials. Manuscripta Math. 93 (1997), no.4, 443–456.

[41] Parusiński, A., Szafraniec, Z.: On the Euler characteristic of fibres of real polynomial maps. Singularities Symposium – Łojasiewicz 70 (Kraków, 1996; Warsaw, 1996), 175–182, Banach Center Publ., 44, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998.

[42] Sullivan, D.: Combinatorial invariants of analytic spaces. Proc. Liverpool Singularities Symposium I, Lecture Notes in Math. 192, Springer – Verlag (1971), 127–138.

[43] Sylvester, J. J.: On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to theory of Sturm's functions. Philos. Trans. Roy. Soc. London 143 (1853).

[44] Szafraniec, Z.: On the Euler characteristic of analytic and algebraic sets. Topology 25 (1986), no. 4, 411–414.

[45] Szafraniec, Z.: On the Euler characteristic of complex algebraic varieties. Math. Ann. 280 (1988), 177–183.

[46] Teissier, B.: Varietes polaires II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney. Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, France, "Laboratoire Associé au C.N.R.S. No 169", 1980.

[47] Tougeron, J.–Cl.: Algébres analytiques topologiquement noethériennes. Théorie de Khovanskiĭ. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41 (1991), no. 4, 823–840.

[48] Tougeron, J.–Cl.: Idéaux de fonctions différentiables. Springer – Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.

[49] Tougeron, J.–Cl.: Sur certaines algébres de fonctions analytiques. Séminaire sur la géométrie algébrique réelle, Tome I, II, 35–121, Publ. Math. Univ. Paris VII, 24, Univ. Paris VII, Paris, 1986.

[50] Whitney, H.: Tangents to an analytic variety. Ann. of Math. 81 (1965), 496–549.