Kolokwium z Matematyki

dla studentów I roku Geografii, 2009/2010

Zestaw I

1. Obliczyć granicę:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3 + \operatorname{tg} x}.$$

2. Dobrać stałą A tak, aby funkcja f dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin^2 x}{x} & dla \quad x < 0 \\ A & dla \quad x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}} & dla \quad x > 0 \end{cases}$$
była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

3. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2$ w punkcie o odciętej $x_0 = 3$.

Odp.: **1.** 0; **2.** $A = 0$; **3.** $y = \frac{3\sqrt{10}}{10}x + \frac{\sqrt{10}}{10} - 2$.

Zestaw II

1. Obliczyc granicę:
$$\lim_{x \to 0^+} [\ln x - \ln(\sin 2x)].$$

2. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji
$$f(x) = \frac{3x^3}{2x^2 + x}.$$

3. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[3]{2\ln x + e^x}$.

Odp.: **1.** $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$; **2.** Asymptota pionowa (obustronna): $x = \frac{1}{2}$, ukośna (w $\pm\infty$): $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$; **3.** $\frac{(\frac{2}{x}+e^x)\sqrt[3]{2\ln x + e^x}}{2\ln x + e^x}$.

Zestaw III

W zadaniach 1-3 funkcja f zadana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji f oraz obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0^+} f(x).$$
2. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji f.
3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f.
4. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\cos(1\frac{1}{2})$. Przyjąć $\pi \approx 3,14$.

Odp.: **1.** $D_f\,:\,(0,1)\cup(1,\infty) = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, 0$; **2.** Asymptota pionowa (obustronna): $x = 1$, ukośnej nie ma; **3.** $f \searrow$: $(0,1) \vee (1,e)$, $f \nearrow$: $[e,\infty)$, min.lokalne: (e,e); **4.** $0,07$.

Zestaw IV

1. Obliczyc granicę
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sqrt{1+3x}-1}.$$
2. Wyznaczyc stałą A tak, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{A} & dla \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{Ax}{e^x - 1} & dla \quad x > 0 \end{cases}$$
była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.
3. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = (\ln x \cdot \operatorname{tg} x)^2$.
4. Wyznaczyć dziedzinę i ekstrema funkcji
$$f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}.$$

Odp.: **1.** $\frac{10}{3}$; **2.** $A = 1$ lub $A = -1$; **3.** $2\ln x \operatorname{tg} x(\frac{\operatorname{tg} x}{x} + \frac{\ln x}{\cos^2 x})$; **4.** $D_f : \mathbb{R}\setminus\{0\}$, min.lokalne w punkcie $(-1,-e)$.

Zestaw V

1. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}\right).$$

2. Znaleźć asymptoty pionowe oraz asympototę ukośną w $-\infty$ funkcji
$$f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x-1}.$$

3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$ w punkcie $(0,f(0))$.

4. Wyznaczyć dziedzinę i monotoniczności funkcji
$$f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}.$$

Odp.: **1.** 0; **2.** Asymptota pionowa (obustronna): $x=0$, ukośna w $-\infty$: $y=0$; **3.** $y=x$; **4.** $D_f:\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f\searrow$: $[-1,0)$, $f\nearrow(-\infty,-1)\vee(0,\infty)$.

Zestaw VI

1. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+7^x)}{\ln(1+6^x)}.$$

2. Wyznaczyć asymptoty pionowe funkcji
$$f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}.$$

3. Dobrać parametr A tak, aby funkcja określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases} A\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x & \text{dla } x>\frac{\pi}{4}\\ 1+\operatorname{tg}x & \text{dla } x\leqslant\frac{\pi}{4},\end{cases}$$
była ciągła w punkcie $x_0=\frac{\pi}{4}$.

4. Wyznacz dziedzinę oraz przedziały monotoniczności funkcji
$$f(x)=\frac{1}{x}e^x.$$

Odp.: **1.** $\frac{\ln 7}{\ln 6}$; **2.** Asymptota pionowa (lewostronna): $x=0$; **3.** $A=\frac{\sqrt{2}}{2}$; **4.** $D_f:\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f\searrow$: $(-\infty,0)\vee(0,1)$, $f\nearrow[1,\infty)$.

Zestaw VII

1. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}.$$

2. Wyznaczyć asymptotę ukośną w $+\infty$ funkcji
$$f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}.$$

3. Dobrać parametr A tak, aby funkcja określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\sin Ax}{x} & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$
była ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

4. Wyznacz dziedzinę oraz ekstrema lokalne funkcji
$$f(x) = \frac{1}{x}e^x.$$

Odp.: **1.** $\frac{1}{9}$; **2.** $y = 0$; **3.** $A = 1$; **4.** $D_f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$, min.lokalne w punkcie $(1, e)$.