

1

Zadanie 1.1. Wyznacz dziedzinę, miejsca zerowe i punkt przecięcia wykresu z osią y podanych niżej funkcji:

$$(a) f(x) = \sqrt{\sin x},$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(b) f(x) = \frac{x^3-1}{x-1},$$

$$(d) f(x) = \log_3(1 + |x|).$$

Zadanie 1.2. Dla podanych funkcji wyznacz: dziedzinę, obraz, ograniczoność, miejsca zerowe, monotoniczność, ekstremawklęstość i wypukłość oraz parzystość funkcji.

$$(a) f(x) = x^2,$$

$$(c) f(x) = \sqrt{x},$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$(g) f(x) = \sin x,$$

$$(b) f(x) = x^3,$$

$$(d) f(x) = x^{\frac{1}{3}},$$

$$(f) f(x) = \frac{1}{x},$$

$$(h) f(x) = \cos x.$$

Zadanie 1.3. Rozwiąż równania i nierówności:

$$(a) 2x^2 - x + 1 = 0,$$

$$(c) -x^2 - x + 12 \leq 0,$$

$$(e) 3^{x^2-16} = 1,$$

$$(g) 7^{6x-2} < 7,$$

$$(i) \log_4(x^2 - 2x) = \log_4 3,$$

$$(k) \log_3(2x + 7) < \log_3 9,$$

$$(m) \frac{x^2-4}{x^2-5x} < 0$$

$$(b) -x^2 - 3x = 0,$$

$$(d) -4x + 8 < -3x^2 + 5x + 2,$$

$$(f) 2^{x^2} = 4^{2x-2},$$

$$(h) \frac{1}{3}^{2x-1} \geq \frac{1}{3},$$

$$(j) \log_5 x + \log_5(x - 3) = \log_5 10,$$

$$(l) \log_{\frac{1}{2}}(x - 4) + 1 > \log_{\frac{1}{2}}(x - 6),$$

$$(n) \frac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15} \leq 2.$$

Zadanie 1.4. Wykaż z definicji, że podane funkcje są monotoniczne w podanych przedziałach:

$$(a) f(x) = \frac{1}{x^2}, (-\infty, 0),$$

$$(b) f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, [1, \infty),$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{2x+1}, [1, \infty).$$

Zadanie 1.5. Określ funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, gdzie:

$$(a) f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2,$$

$$(b) f(x) = \log_2 x, g(x) = 2^x,$$

$$(c) f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^4.$$

2

Zadanie 2.1. *Oblicz granice:*

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 5),$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{10}{x+1},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 - 18}{x^2 + 3x},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{8x},$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + x}.$$

Zadanie 2.2. *Oblicz granice jednostronne:*

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x^3}},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{sgn} x,$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{|2x - \pi|},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^7},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x^3}},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0^-} x \operatorname{sgn} x,$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{|2x - \pi|}.$$

Zadanie 2.3. *Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnij, że:*

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2} = 0.$$

Zadanie 2.4. *Oblicz granice:*

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x - 8,$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 4}{5x^2 - 2x - 3},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 3x - 7},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 3x^2}{x^3 - 1},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1}),$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x+3},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{2x^3 + 3x - 1},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 1},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x),$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}).$$

Zadanie 2.5. *Podaj dziedzinę i wyznacz równania asymptot podanych funkcji :*

$$(a) f(x) = \frac{3x-1}{x-2},$$

$$(c) f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+4},$$

$$(e) f(x) = \frac{3}{x+3},$$

$$(g) f(x) = \frac{3x^3+x^2-2}{x^2+2},$$

$$(b) f(x) = \frac{5+2x}{x+1},$$

$$(d) f(x) = \frac{-2x^2-2x}{x^2+1},$$

$$(f) f(x) = \frac{-4}{x-1},$$

$$(h) f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}.$$

Zadanie 2.6. Zbadaj ciągłość funkcji:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x+5}, & \text{jeżeli } x \neq -5 \\ 10, & \text{jeżeli } x = -5 \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{jeżeli } x \neq 2 \\ 2, & \text{jeżeli } x = 2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x+1}{x+1}, & \text{jeżeli } x \neq -1 \\ 0, & \text{jeżeli } x = -1 \end{cases} \quad (d) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}, & \text{jeżeli } x \neq 0 \\ \frac{1}{3}, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$$

3

Zadanie 3.1. (Uwaga przygotować na najbliższe zajęcia!) Korzystając z tabel matematycznych podaj pochodne funkcji elementarnych:

(a) $f(x) = c, c \in \mathbb{R},$	(b) $f(x) = ax, a \in \mathbb{R},$
(c) $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$	(d) $f(x) = \sqrt{x},$
(e) $f(x) = \sqrt[x]{x},$	(f) $f(x) = \sin x,$
(g) $f(x) = \cos x,$	(h) $f(x) = \operatorname{tg} x,$
(i) $f(x) = \operatorname{ctg} x,$	(j) $f(x) = a^x, a > 0,$
(k) $f(x) = e^x,$	(l) $f(x) = \ln x, x > 0$
(m) $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0,$	(n) $f(x) = \arcsin x,$
(o) $f(x) = \arccos x,$	(p) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x,$
(r) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x.$	

Zadanie 3.2. Oblicz pochodną funkcji f :

(a) $f(x) = \frac{3}{4}x^2,$	(b) $f(x) = \frac{-5}{x},$
(c) $f(x) = 3x + 4,$	(d) $f(x) = 5x^2 + 4x - 19,$
(e) $f(x) = x^2 + \sqrt{x},$	(f) $f(x) = -5x^2 + 3\sqrt{2} - \frac{23}{x},$
(g) $f(x) = \frac{3}{4}x^{-8} + 5x^6 - \frac{2}{3}x^{-3} + 4x^{-1} + \pi,$	(h) $f(x) = 2x(3x + 5),$
(i) $f(x) = (-5x + 2)(2x^2 - 4x),$	(j) $f(x) = 3x\sqrt{x},$
(k) $f(x) = (x^2 - 3x + 4)(x^{-2} + x^{\frac{6}{5}}),$	(l) $f(x) = \frac{x}{3x-5},$
(m) $f(x) = \frac{1-4x}{2x+7},$	(n) $f(x) = \frac{x-7}{2x^2+4x},$
(o) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^4-7x+9},$	(p) $f(x) = -4(3x - 8),$
(r) $f(x) = \frac{2}{3}(x^2 + 5x - 3),$	(s) $f(x) = 3 \cos x - \operatorname{ctg} x,$
(t) $f(x) = \sqrt{2} \cos x - 7 \cos x,$	(u) $f(x) = \sqrt{x} \cos x,$
(w) $f(x) = x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x,$	(y) $f(x) = \frac{x^3}{\operatorname{ctg} x},$
(z) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}.$	

Zadanie 3.3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

(a) $f(x) = x^2, x_0 = 2,$

(c) $f(x) = x^3 - 4, x_0 = 2,$

(b) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4,$

(d) $f(x) = \frac{2}{x+3}, x_0 = 3.$

Zadanie 3.4. Dla każdej z podanych funkcji f znajdź funkcje g i h tak, aby $f(x) = g(h(x))$, ponadto oblicz pochodną funkcji f :

(a) $f(x) = (3x + 1)^2,$

(c) $f(x) = \sqrt{7x - 3},$

(e) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin x},$

(g) $f(x) = (7x^3 + 2x)^5,$

(i) $f(x) = (5x - 3)^{\frac{3}{4}},$

(k) $f(x) = \arcsin(x^2 - 3),$

(b) $f(x) = \cos(5x),$

(d) $f(x) = \operatorname{tg}^3,$

(f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4x-1}},$

(h) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^7},$

(j) $f(x) = \operatorname{ctg}(3x - 5),$

(l) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}.$

Zadanie 3.5. Oblicz pochodne drugiego rzędu :

(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 6,$

(c) $f(x) = \frac{1}{x},$

(e) $f(x) = \arccos x,$

(b) $f(x) = \sin x,$

(d) $f(x) = 5 \sin^2 x,$

(f) $f(x) = x^5 + 4x^2 - 6x^{\frac{11}{8}}.$

4

Zadanie 4.1. Korzystając z różniczki funkcji oblicz przybliżone wartości podanych wyrażeń:

(a) $\sqrt[3]{7,999},$

(c) $\ln \frac{2001}{2000},$

(e) $\frac{1}{\sqrt{3,98}},$

(g) $\arcsin 0,51,$

(i) $\ln 0,9993.$

(b) $e^{0,04},$

(d) $\arccos 0,499,$

(f) $\operatorname{tg} 44^\circ 55',$

(h) $e^{-0,07},$

1

Zadanie 4.2. Korzystając z reguły de L'Hospitala oblicz podane granice:

$$\begin{array}{ll}
(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x} & (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sin \frac{\pi}{2}x}{\ln x} \\
(c) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} & (d) \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} x \\
(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2} & (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}
\end{array}$$

Zadanie 4.3. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f :

$$\begin{array}{ll}
(a) f(x) = x^3 - 3x, & (b) f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \\
(c) f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3, & (d) f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}, \\
(e) f(x) = x\sqrt{1-x}, & (f) f(x) = x \ln x.
\end{array}$$

Zadanie 4.4. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f :

$$\begin{array}{ll}
(a) f(x) = (x-3)\sqrt{x}, & (b) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}, \\
(c) f(x) = x - \sqrt{x}, & (d) f(x) = x^3 - 4x^2, \\
(e) \frac{x^3}{8-2x^2}, & (f) x^2(x-1)^2.
\end{array}$$

Zadanie 4.5. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale:

$$\begin{array}{ll}
(a) f(x) = x + \frac{4}{x}; [1, 3], & (b) f(x) = x - 2\sqrt{x}; [\frac{1}{4}, 4], \\
(c) f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x; [0, 2\pi], & (d) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1-x}{1+x}; [0, 1], \\
(e) f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8; [-3, 6], & (f) f(x) = x^4 - x^2; [-1, 2].
\end{array}$$

Zadanie 4.6. Wyznacz punkty przegięcia oraz przedziały wypukłości funkcji f :

$$\begin{array}{ll}
(a) f(x) = 3x - x^3, & (b) f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}, \\
(c) f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}, & (d) f(x) = x\sqrt{4-x^2}, \\
(e) f(x) = \operatorname{tg} x, & (f) f(x) = \ln(1+x^2).
\end{array}$$

Zadanie 4.7. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji f i następnie sporządzić ich wykresy:

$$\begin{array}{ll}
(a) f(x) = x \ln x, & (b) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}, \\
(c) f(x) = \frac{x^3}{x-1}, & (d) f(x) = \sin x - \sin^2 x, \\
(e) f(x) = x^2 e^{-x}, & (f) f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x}.
\end{array}$$