

1. Oblicz wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 5 \\ 8 & -4 & -5 & 14 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 13 & 7 & -10 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \\ 6 & 0 & -35 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 2 & 15 \\ -9 & -5 & 5 & -27 \\ 19 & 6 & 3 & 56 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & -1 & 3 \\ 2 & 56 & 6 & -19 \\ -3 & -85 & -9 & 29 \\ 0 & 12 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -40 & -15 & 7 \\ -1 & 6 & 2 & -6 \\ 1 & -7 & -3 & 12 \\ -1 & 7 & 3 & -11 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & -18 & 4 & 11 \\ -1 & 9 & -2 & -5 \\ 4 & -39 & 9 & 16 \\ -4 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -14 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & 0 & 16 \\ -57 & 4 & 1 & 16 \\ -9 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & -1 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -7 \\ -7 & 0 & -4 & 16 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -27 & 0 & -1 & 69 \\ 12 & 1 & -1 & -30 \\ -2 & 3 & 3 & 5 \\ 9 & 0 & 0 & -23 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -12 & -54 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Metodą Gaussa-Jordana policz macierz odwrotną do danej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 23 & -9 \\ 1 & -10 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 10 & 12 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 57 & -1 & -25 \\ -14 & -1 & 7 \\ -51 & 0 & 23 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -7 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 45 & -5 \\ 0 & 46 & -5 \\ 0 & -9 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \\ 0 & 17 & -1 \\ -6 & -10 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 10 & 1 \\ -5 & -15 & -2 \\ -3 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -19 & 24 \\ -18 & 38 & -47 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -10 & -11 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -29 & -11 \\ -1 & -5 & -2 \\ 0 & 79 & 30 \end{bmatrix}$$

3. Oblicz rzędy danych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & -5 \\ -6 & -31 & -36 & 18 \\ 8 & -5 & -81 & -14 \\ 3 & 14 & 18 & -9 \\ -8 & -24 & 3 & 20 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 & -10 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -19 & -3 & 3 & 49 \\ -1 & -12 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -24 & 1 & 1 & 7 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 7 & -7 & -14 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & 9 & 10 & -2 \\ -4 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -6 & 9 & -3 & -3 \\ -12 & -4 & -6 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 0 & 21 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & -7 & -3 & -9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & -12 & -13 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \\ -1 & 2 & -4 & 7 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 15 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 18 & 6 & 2 & -12 \\ 6 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 23 & -6 & -5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 & 1 \\ -13 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Dane są macierze rozszerzone układów równań o zmiennych x, y, z . Jeżeli są to układy Cramera, za pomocą wzorów Cramera wyznacz rozwiązanie. W przeciwnym wypadku, sprawdź, czy układy mają rozwiązanie (wyznaczając rzędy odpowiednich macierzy). Jeżeli tak, podaj ilość parametrów.

$$01 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -7 & -4 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -2 & -117 & 69 \\ -3 & 0 & -39 & 23 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 24 & 3 & -5 \\ -1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right]$$

$$02 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & -3 & 0 & 0 \\ -18 & -1 & -6 & 29 \\ 3 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 1 & 1 \\ -48 & 99 & -17 & 3 \\ -14 & 29 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

$$03 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 5 \\ 8 & -2 & -5 & 14 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -15 & -2 & 12 \\ -2 & 12 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 26 & 0 & -10 & -1 \\ 5 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$04 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 11 & 3 & -6 \\ -1 & 6 & 2 & -6 \\ 1 & -7 & -3 & 12 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -8 & -15 & 0 \end{array} \right]$$

$$05 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 & -3 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -18 & 4 & 11 \\ -1 & 9 & -2 & -5 \\ 1 & -9 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

$$06 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -7 \\ -7 & 0 & -4 & 16 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -9 & -5 & 5 & -27 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$07 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -27 & 0 & -1 & 69 \\ 12 & 1 & -1 & -30 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 27 & -14 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$08 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 0 & 5 \\ -8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 9 & 0 & 1 \\ 7 & -22 & 0 & -2 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & -3 & 4 \\ -1 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & -16 & -1 & 7 \end{array} \right]$$

$$09 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & -18 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 1 \\ -7 & -12 & 12 & 3 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -10 & -6 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 12 & 4 \end{array} \right]$$

$$10 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & -2 & 6 \\ -4 & -13 & -4 & 11 \\ 9 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & 0 & -5 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 0 \end{array} \right]$$

$$11 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -10 & -24 & 6 & 21 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & 2 \\ -10 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$12 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -1 & -9 & 11 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -6 & 1 \\ -2 & -43 & 19 & 1 \\ -1 & -8 & 5 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 51 & -20 & -22 \\ -3 & -28 & 11 & 12 \\ 0 & 5 & -2 & -3 \end{array} \right]$$

5. Metodą dopełnień algebraicznych wyznacz macierz odwrotną do danej:

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 27 & -7 & -1 \\ 11 & -2 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & -24 & 51 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -13 & 27 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 3 & -9 & -1 \\ -7 & 20 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 4 & 3 & -10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 8 & -13 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -20 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -9 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$