O symetriach płaskich rozmaitości

Rafał Lutowski

Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego

II Północne Spotkania Geometryczne
Olsztyn, 23-24 czerwca 2008

Płaskie rozmaitości i grupy Bieberbacha

- X – zwarta, spójna rozmaitość Riemanna z krzywizną sekcyjną równą zero (płaska rozmaitość).
- $\Gamma = \pi_1(X)$ – grupa podstawowa X – grupa Bieberbacha.
- X jest izometryczne z $\mathbb{R}^n/\Gamma$.
- Γ wyznacza X z dokładnością do afinicznej równoważności.

Abstrakcyjna definicja grup Bieberbacha

Definicja

Grupa Bieberbacha to beztorsyjna grupa zdefiniowana przez krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

- G – grupa skończona (grupa holonomii Γ).
- M – wierna G-krata, tj. wierny i wolny $\mathbb{Z}G$-moduł, skończenie generowany jako grupa abelowa.
- Element $\alpha \in \mathrm{H}^2(G, M)$ odpowiadający powyższemu rozszerzeniu jest specjalny, tzn. $\mathrm{res}^G_H \alpha \neq 0$ dla każdej nietrywialnej podgrupy H grupy G.

Grupa odwzorowań afinicznych

- $\mathrm{Aff}(X)$ – grupa odwzorowań afinicznych X.
  - $\mathrm{Aff}(X)$ jest grupą Lie.
- $\mathrm{Aff}_0(X)$ – składowa identyczności $\mathrm{Aff}(X)$.
  - $\mathrm{Aff}_0(X)$ jest torusem.
  - Wymiar $\mathrm{Aff}_0(X)$ równa się $\beta_1(X)$ – pierwszej liczbie Bettiego X ($\beta_1(X) = \mathrm{rk} Z(\Gamma)$).

Twierdzenie (Charlap, Vasquez ’73)

$$\mathrm{Aff}(X)/\mathrm{Aff}_0(X) \cong \mathrm{Out}(\Gamma)$$

Skończone grupy odwzorowań afinicznych

Wniosek

$\mathrm{Aff}(X)$ *jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. $b_1(X) = 0$ *oraz*
2. $|\mathrm{Out}(\Gamma)| < \infty$.

Problem (Szczepański)

Które grupy skończone realizują się jako grupy automorfizmów zewnętrznych grup Bieberbacha z trywialnym centrum.

Wyznaczanie $\mathrm{Out}(\Gamma)$

Twierdzenie (Charlap, Vasquez '73)

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, M) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma) \longrightarrow N_\alpha/G \longrightarrow 1.$$

- N_α – stabilizator $\alpha \in \mathrm{H}^2(G, M)$ względem działania $N_{\mathrm{Aut}(M)}(G)$ zdefiniowanego następująco

$$n * a(g_1, g_2) = n \cdot a(n^{-1} g_1 n, n^{-1} g_2 n).$$

Płaskie rozmaitości ze skończonymi grupami odwzorowań afinicznych

- (Szczepański, Hiss '97)
  - C_2 – dwie płaskie rozmaitości.
  - $C_2 \times (C_2 \wr F)$, gdzie $F \subset S_{2k+1}$ jest grupą generowaną przez cykl $(1, 2, \dots, 2k+1)$, $k \geq 2$.
- (Waldmüller '03)
  - Płaska rozmaitość bez symetrii.
- (L.)
  - $C_2^n, n \geq 2$.

Element specjalny $\mathrm{H}^2(G, M)$

- $\alpha \in \mathrm{H}^2(G, M)$ jest specjalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{res}^G_H \alpha \neq 0$ dla każdej nietrywialnej podgrupy $H < G$.
- Przechodniość ograniczenia – wystarczy sprawdzić podgrupy rzędu pierwszego.
- Działanie normalizatora – wystarczy sprawdzić klasy sprzężoności tych grup.

Grupa holonomii

- $G = \mathrm{M}_{11}$ – grupa Mathieu (sporadyczna grupa prosta).
- $|G| = 7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.
- G ma prezentację

$$G = \langle a, b | a^2, b^4, (ab)^{11}, (ab^2)^6, ababab^{-1}abab^2ab^{-1}abab^{-1}ab^{-1} \rangle.$$

- Reprezentanty klas sprzężoności G:
    - rzędu 2: $\langle a \rangle$,
    - rzędu 3: $\langle (ab^2)^2 \rangle$,
    - rzędu 5,11: są to podgrupy Sylowa.

Krata

- Krata jest zadana poprzez reprezentację całkowitą grupy G, tzn. $M = \mathbb{Z}^n$ i G działa na M przez mnożenie macieży.
- M_i, dla $i = 1, 3, 4$, odpowiadają kratom z konstrukcji Waldmüllera o wymiarach odpowiednio $20, 44, 45$.
- M_2 jest podkratą indeksu 3 32-wymiarowej kraty z przykładu Waldmüllera.
- Właściwości krat:

i	St.	$\mathbb{C}$-irr	$\mathrm{H}^1(G, M_i)$	$\mathrm{H}^2(G, M_i)$	$\lvert\alpha_i\rvert$	H_i
1	20	Nie	1	C_6	6	$\langle (ab^2)^2 \rangle$
2	32	Nie	C_3	C_5	5	podgrupa rzędu 5
3	44	Tak	1	C_6	6	$\langle a \rangle$
4	45	Tak	1	C_{11}	11	podgrupa rzędu 11

- $\mathrm{H}^1(G, M) = \bigoplus_{i=1}^4 \mathrm{H}^1(G, M_i) = C_3$.

Beztorsyjne rozszerzenie

Stwierdzenie

Rozszerzenie Γ *–* M *przez* G *– zdefiniowane klasą kohomologii* $\alpha := \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_4 \in \mathrm{H}^2(G, M)$ *jest beztorsyjne.*

Następny krok w liczeniu $\mathrm{Out}(\Gamma)$

- Mamy krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, M) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma) \longrightarrow N_\alpha / G \longrightarrow 1.$$

- $\mathrm{H}^1(G, M) = C_3$.
- Następny krok: wyznaczyć N_α.

Wyznaczanie stabilizatora

- $C_{\mathrm{Aut}(M)}(G) = C_{\mathrm{Aut}(M_1)}(G) \times \ldots \times C_{\mathrm{Aut}(M_4)}(G)$.
- M_3, M_4 – absolutnie nieprzywiedlne, więc $C_{\mathrm{Aut}(M_k)}(G) = \langle -1 \rangle$, $k = 3, 4$.
- Dla $k = 1, 2$, $C_{\mathrm{Aut}(M_k)}(G)$ jest grupą jedności pierścienia $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(M_k)$, izomorficznego odpowiednio z $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ i $\mathbb{Z}[3\sqrt{-11}]$, więc $C_{\mathrm{Aut}(M_k)}(G) = \langle -1 \rangle$.
- $C_{\mathrm{Aut}(M)}(G)_\alpha = 1$.
- $\mathrm{Out}(G) = 1$, więc $N_\alpha = GC_{\mathrm{Aut}(M)}(G)_\alpha = G$.

Płaska rozmaitość z grupą symetrii nieparzystego rzędu

Wniosek

Jeżeli X *jest rozmaitością z grupą podstawową* Γ*, to* $\mathrm{Aff}(X) \cong C_3$.

Inne własności Γ

- $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ jest grupą Bieberbacha.
- $\mathrm{Out}(\mathrm{Aut}(\Gamma)) = 1$.

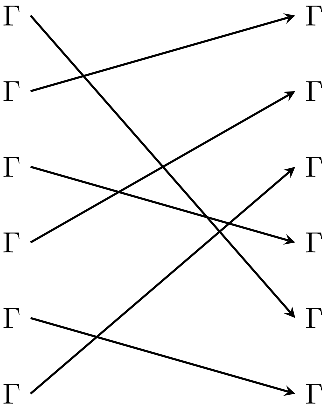
Działanie automorfizmów Γ^n

- Γ – produktowo nieprzywiedlna grupa Bieberbacha.
- $n \in \mathbb{N}$.
- $\Gamma^n := \underbrace{\Gamma \times \ldots \times \Gamma}_{n}$
- $\Gamma_i := \{e\}^{i-1} \times \Gamma \times \{e\}^{n-i}$, $i = 1, \ldots, n$.

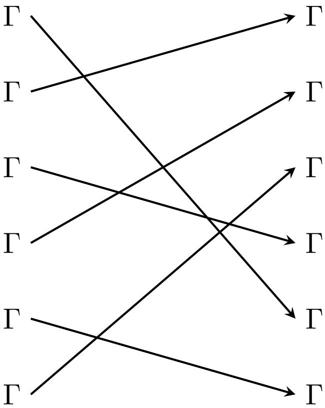
Lemat

$$\forall_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\Gamma^n)} \; \exists_{\sigma \in S_n} \; \forall_{1 \leqslant i \leqslant n} \; \varphi(\Gamma_i) = \Gamma_{\sigma(i)}$$

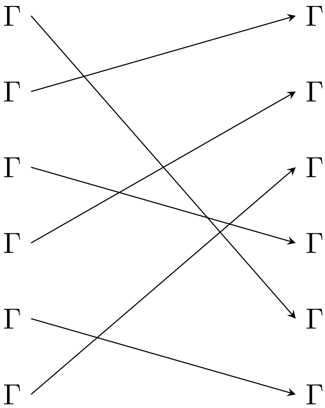
Dobrze



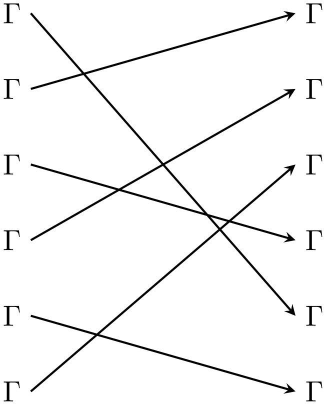
Dobrze



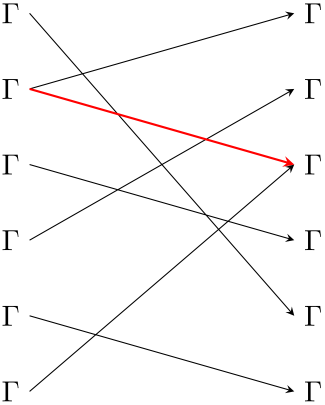
Dobrze



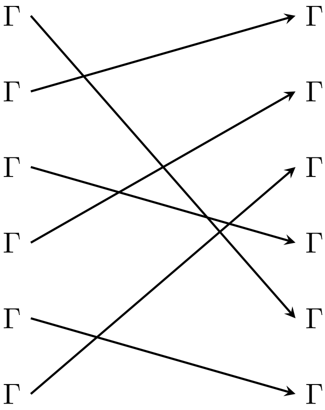
Dobrze



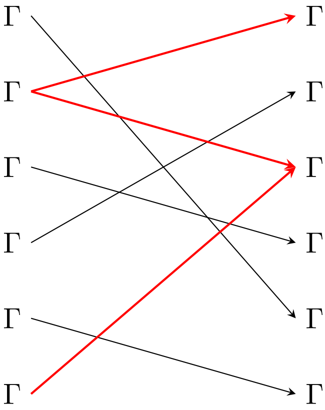
Źle



Dobrze



Źle



Wniosek z lematu

Wniosek

Niech Γ będzie produktowo nieprzywiedlną grupą Bieberbacha z trywialnym centrum i $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\mathrm{Aut}(\Gamma^n) = \mathrm{Aut}(\Gamma) \wr S_n,$$

stąd

$$\mathrm{Out}(\Gamma^n) = \mathrm{Out}(\Gamma) \wr S_n.$$

- Z przykładu Waldmüllera otrzymujemy: S_n realizuje się jako grupa automorfizmów zewnętrznych pewnej grupy Bieberbacha z trywialnym centrum.

Uogólnienie lematu

Twierdzenie

Niech Γ_i, $i = 1, \dots, k$, *będą parami nieizomorficznymi i produktowo nieprzywiedlnymi grupami Bieberbacha z trywialnym centrum. Niech* $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$. *Wtedy*

$$\mathrm{Out}(\Gamma_1^{n_1} \times \ldots \times \Gamma_k^{n_k}) \cong \mathrm{Out}(\Gamma_1) \wr S_{n_1} \times \ldots \times \mathrm{Out}(\Gamma_k) \wr S_{n_k}.$$

- Istnieje grupa Bieberbacha z trywialnym centrum i grupą automorfizmów zewnętrznych nieparzystego rzędu.
- Grupy automorfizmów grup Bieberbacha mogą być grupami Bieberbacha.
- Grupa automorfizmów (zewnętrznych) grupy Bieberbacha zależy od czynników produktu.

Dziękuję za uwagę!