O centralizatorach skończonych podgrup $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$

Rafał Lutowski

Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego

III Północne Spotkania Geometryczne
Olsztyn, 22-23 czerwca 2009

1. Wprowadzenie
   - Grupy podstawowe płaskich rozmaitości
   - Afiniczne równoważności płaskich rozmaitości
   - Skończone grupy automorfizmów zewnętrznych
   - Reprezentacje grup skończonych
2. Podgrupy centralizatorów w $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$
   - Twierdzenie
   - Lemat Schura
   - Dowód twierdzenia
3. Przykłady
   - Grupa alternująca A_5

Płaskie rozmaitości i grupy Bieberbacha

- X – zwarta, spójna rozmaitość Riemanna z krzywizną sekcyjną równą zero (płaska rozmaitość).
- $\Gamma = \pi_1(X)$ – grupa podstawowa X – grupa Bieberbacha.
- X jest izometryczne z $\mathbb{R}^n/\Gamma$.
- Γ wyznacza X z dokładnością do afinicznej równoważności.

Grupy Bieberbacha

Definicja

Grupa Bieberbacha to beztorsyjna grupa zdefiniowana przez krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

- G – skończona podgrupa $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$.
- G działa na $\mathbb{Z}^n$ przez mnożenie macierzy.
- Element $\alpha \in \mathrm{H}^2(G, M)$ odpowiadający powyższemu rozszerzeniu jest specjalny, tzn. $\mathrm{res}^G_H \alpha \neq 0$ dla każdej nietrywialnej podgrupy H grupy G.

Grupa odwzorowań afinicznych

- $\mathrm{Aff}(X)$ – grupa odwzorowań afinicznych X.
  - $\mathrm{Aff}(X)$ jest grupą Lie.
- $\mathrm{Aff}_0(X)$ – składowa identyczności $\mathrm{Aff}(X)$.
  - $\mathrm{Aff}_0(X)$ jest torusem.
  - Wymiar $\mathrm{Aff}_0(X)$ równa się $\beta_1(X)$ – pierwszej liczbie Bettiego X ($\beta_1(X) = \mathrm{rk} Z(\Gamma)$).

Twierdzenie (Charlap, Vasquez 1973)

$$\mathrm{Aff}(X)/\mathrm{Aff}_0(X) \cong \mathrm{Out}(\Gamma)$$

Skończone grupy odwzorowań afinicznych

Wniosek

$\mathrm{Aff}(X)$ *jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. $\beta_1(X) = 0$ *oraz*
2. $|\mathrm{Out}(\Gamma)| < \infty$.

Problem (Szczepański 2006)

Które grupy skończone realizują się jako grupy automorfizmów zewnętrznych grup Bieberbacha z trywialnym centrum.

Wyznaczanie $\mathrm{Out}(\Gamma)$

Twierdzenie (Charlap, Vasquez 1973)

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma) \longrightarrow N_\alpha/G \longrightarrow 1.$$

- N_α – stabilizator $\alpha \in \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z}^n)$ względem działania $N_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$ zdefiniowanego następująco

$$n * a(g_1,g_2) = n \cdot a(n^{-1}g_1n, n^{-1}g_2n).$$

- $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}^n)$ jest grupą skończoną.
- Indeks $[N_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G) \colon N_\alpha]$ jest skończony.

Wyznaczanie $\mathrm{Out}(\Gamma)$

Twierdzenie (Charlap, Vasquez 1973)

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma) \longrightarrow N_\alpha/G \longrightarrow 1.$$

- N_α – stabilizator $\alpha \in \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z}^n)$ względem działania $N_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$ zdefiniowanego następująco

$$n * a(g_1,g_2) = n \cdot a(n^{-1}g_1n, n^{-1}g_2n).$$

- $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}^n)$ jest grupą skończoną.
- Indeks $[N_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G) \colon N_\alpha]$ jest skończony.

Skończone grupy automorfizmów zewnetrznych

Przez *naturalną reprezentację* grupy $G < \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ będziemy rozumieli odwzorowanie $\tau = id_G$.

Twierdzenie (Szczepański '96)

Następujące warunki są równoważne:

1. *Grupa* $\mathrm{Out}(\Gamma)$ *jest nieskończona.*
2. *Normalizator* $N_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$ *grupy* G *w* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ *jest nieskończony.*
3. $\mathbb{Q}$*-rozkład reprezentacji* τ *zawiera dwie izomorficzne składowe lub istnieje* $\mathbb{Q}$*-nieprzywiedlna składowa, rozkładalna nad* $\mathbb{R}$*.*

Skończone grupy automorfizmów zewnetrznych

Przez *naturalną reprezentację* grupy $G < \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ będziemy rozumieli odwzorowanie $\tau = id_G$.

Twierdzenie (Szczepański '96)

Następujące warunki są równoważne:

1. *Grupa* $\mathrm{Out}(\Gamma)$ *jest nieskończona.*
2. *Centralizator* $C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$ *grupy* G *w* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ *jest nieskończony.*
3. $\mathbb{Q}$*-rozkład reprezentacji* τ *zawiera dwie izomorficzne składowe lub istnieje* $\mathbb{Q}$*-nieprzywiedlna składowa, rozkładalna nad* $\mathbb{R}$*.*

Reprezentacje grup skończonych

- R – pierścień $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, G – grupa skończona.
- Homomorfizm $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(n,R)$ nazywamy *reprezentacją* grupy G.
- Reprezentacje ϱ,τ nazywamy R-*izomorficznymi*, jeżeli

$$\exists_{Q\in\mathrm{GL}(n,R)}\forall_{g\in G}\; Q\varrho(g)=\tau(g)Q.$$

- Reprezentacja ϱ jest *przywiedlna*, jeżeli jest izomorficzna z reprezentacją postaci

$$\varrho_1\oplus\ldots\oplus\varrho_k.$$

- R^n – $R[G]$-moduł.

Reprezentacje grup skończonych

- R – pierścień $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, G – grupa skończona.
- Homomorfizm $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(n,R)$ nazywamy *reprezentacją* grupy G.
- Reprezentacje ϱ, τ nazywamy R-*izomorficznymi*, jeżeli

$$\exists_{Q\in\mathrm{GL}(n,R)}\ Q\varrho = \tau Q.$$

- Reprezentacja ϱ jest *przywiedlna*, jeżeli jest izomorficzna z reprezentacją postaci

$$\varrho_1 \oplus \ldots \oplus \varrho_k.$$

- R^n – $R[G]$-moduł.

Charaktery

- *Charakterem* reprezentacji ϱ nazywamy funkcję $\chi_\varrho \colon G \to R$

$$\forall_{g \in G} \chi_\varrho(g) = \mathrm{Tr}(\varrho(g)).$$

- $R = \mathbb{C}$ – charaktery klasyfikują reprezentacje.

Pytania

- Mamy krótki ciąg dokładny

$$0 \to \mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) \to \mathrm{Out}(\Gamma) \to N_\alpha/G \to 1$$

- Czy N_α/G może być dowolną grupą?
- Niech

$$C_\alpha = N_\alpha \cap C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$$

Czy $C_\alpha \cdot G/G \cong C_\alpha/Z(G)$ może być dowolną grupą?

- Czy istnieje grupa, która nie realizuje się jako podgrupa skończonego centralizatora dowolnej podgrupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$?

Pytania

- Mamy krótki ciąg dokładny

$$0 \to \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}^n) \to \mathrm{Out}(\Gamma) \to N_\alpha/G \to 1$$

- Czy N_α/G może być dowolną grupą?
- Niech

$$C_\alpha = N_\alpha \cap C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$$

  Czy $C_\alpha \cdot G/G \cong C_\alpha/Z(G)$ może być dowolną grupą?
- Czy istnieje grupa, która nie realizuje się jako podgrupa skończonego centralizatora dowolnej podgrupy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$?

Pytania

- Mamy krótki ciąg dokładny

$$0 \to \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}^n) \to \mathrm{Out}(\Gamma) \to N_\alpha/G \to 1$$

- Czy N_α/G może być dowolną grupą?
- Niech

$$C_\alpha = N_\alpha \cap C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$$

  Czy $C_\alpha \cdot G/G \cong C_\alpha/Z(G)$ może być dowolną grupą?
- Czy istnieje grupa, która nie realizuje się jako podgrupa skończonego centralizatora dowolnej podgrupy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$?

Struktura skończonych centralizatorów

- Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę grup skończonych, bez grupy trywialnej, taką że dla każdego $A \in \mathcal{A}$ mamy
  - A ma dokładnie jedną $\mathbb{C}$-nieprzywiedlną reprezentację stopnia 1.
  - Każda $\mathbb{C}$-nieprzywiedlna reprezentacja A może być zrealizowana nad $\mathbb{R}$.
- $\{A_n\}_{n \geq 5} \subset \mathcal{A}$ (Riese, 2002).

Twierdzenie

Niech $G < \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ będzie grupą skończoną, taką że $C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$ jest skończony. Wtedy

$$\forall_{A < C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)} A \notin \mathcal{A}.$$

Lemat Schura

Niech R oznacza pierścień, M i N – lewe R-moduły.

Lemat

Niech $f\colon M \to N$ będzie homomorfizmem R-modułów. Jeżeli M i N są proste, to f jest izomorfizmem, bądź $f = 0$. Ponadto, jeżeli $M = N$ oraz $R = \mathbb{C}[G]$ jest pierścieniem grupowym, dla pewnej grupy skończonej G, to f jest homotetią, tzn.

$$\exists_{\lambda \in \mathbb{C}} \forall_{m \in M} f(m) = \lambda m.$$

Wniosek

Niech M i N będą półprostymi modułami, które nie mają izomorficznych podmodułów. Wtedy

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) = 0.$$

Izomorfizmy reprezentacji

- $\mathbb{K}$ – ciało charakterystyki 0.
- G – grupa skończona.
- $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ – reprezentacja grupy G o następującym rozkładzie nad $\mathbb{K}$
$$\varrho = \bigoplus_{i=1}^{k} m_i \varrho_i.$$
- $\varrho_i\colon G \to \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{K})$ – nieprzywiedlne, parami nieizomorficzne.
- $m_i \varrho_i = \bigoplus_{j=1}^{m_i} \varrho_i$.
- $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ wyznacza izomorfizm ϱ:
$$B\varrho = \varrho B.$$

Izomorfizmy reprezentacji

Lemat

B jest blokową macierzą diagonalną

$$B = \bigoplus_{i=1}^{k} B_i,$$

gdzie $B_i \in \mathrm{GL}(m_i n_i, \mathbb{K})$ wyznaczają izomorfizmy reprezentacji $m_i \varrho_i$.

Szkic dowodu

- Załóżmy, że $A < C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$ oraz $A \in \mathcal{A}$. Pokażemy, że $C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$ jest nieskończony.
- Niech $\tau = id_G$, $\varrho = id_A$ będą naturalnymi reprezentacjami grup odpowiednio G i A.
- Niech $\varrho' = \bigoplus_{i=1}^{k} m_i \varrho_i$ będzie rozkładem ϱ nad $\mathbb{Q}$, tzn.

$$\exists_{Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})}\ \varrho' = Q^{-1} \varrho Q.$$

- $\tau' = Q^{-1} \tau Q$.
- Ponieważ $\tau' \varrho' = \varrho' \tau'$, więc $\tau' = \bigoplus_{i=1}^{k} \tau_i$, gdzie $\tau_i(m_i \varrho_i) = (m_i \varrho_i)\tau_i$.

Szkic dowodu

Założenie: ϱ_1 nie jest trywialna.
Przypadek 1: ϱ_1 jest $\mathbb{C}$-nieprzywiedlna. Wtedy

$$\tau_1 = np$$

gdzie $n > 1$ oznacza stopień reprezentacji ϱ_1,
a $p\colon G \to \mathrm{GL}(m_1, \mathbb{Q})$ jest reprezentacją grupy G.
Przypadek 2: ϱ_1 jest $\mathbb{R}$-przywiedlna. Wtedy mamy rozkład τ_1 nad $\mathbb{R}$:

$$\tau_1 = \bigoplus_{i=1}^{s} d_i p_i.$$

Jeżeli dla pewnego $1 \leq j \leq s$, p_j nie jest reprezentacją wymierną, to τ_1 zawiera $\mathbb{Q}$-nieprzywiedlną, ale $\mathbb{R}$-przywiedlną reprezentację.

Wniosek – reprezentacje centralizatorów

Wniosek: Centralizator $C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$ jest nieskończony.

$\square$

Wniosek

$\mathbb{R}$-nieprzywiedlna podreprezentacja reprezentacji naturalnej podgrupy skończonego centralizatora jest albo trywialna, bądź $\mathbb{C}$-przywiedlna.

Wniosek – reprezentacje centralizatorów

Wniosek: Centralizator $C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$ jest nieskończony.

$\square$

Wniosek

$\mathbb{R}$-nieprzywiedlna podreprezentacja reprezentacji naturalnej podgrupy skończonego centralizatora jest albo trywialna, bądź $\mathbb{C}$-przywiedlna.

Realizacja A_5 jako $\mathrm{Out}(\Gamma)$

- Γ – grupa Bieberbacha zdefiniowana przez krótki ciąg dokładny
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$
- $\alpha \in \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z}^n)$ – klasa definiująca Γ.
- $(\mathbb{Z}^n)^G = \{z \in \mathbb{Z}^n | \forall_{g\in G}\, gz = z\} = 0$ – centrum Γ jest trywialne.
- $N_\alpha = \{n \in N_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G) | n * \alpha = \alpha\}$.
- $C_\alpha = N_\alpha \cap C_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})}(G)$.

Stwierdzenie

Jeżeli $\mathrm{Out}(\Gamma) \cong A_5$, *to*
$$C_\alpha = Z(G).$$

Izomorfizm $\mathrm{Out}(\Gamma)$ z A_5

- Mamy krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma) \longrightarrow N_\alpha/G \longrightarrow 1.$$

- $\mathrm{Out}(\Gamma) \cong A_5$ jest grupą prostą, więc:
  - $\mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) = 0$.
  - $N_\alpha/G \cong A_5$.
- Możliwe są tylko dwa przypadki:
  - $C_\alpha = Z(G)$.
  - $N_\alpha = G \cdot C_\alpha$.

Izomorfizm $\mathrm{Out}(\Gamma)$ z A_5

- Mamy krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma) \longrightarrow N_\alpha/G \longrightarrow 1.$$

- $\mathrm{Out}(\Gamma) \cong A_5$ jest grupą prostą, więc:
  - $\mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) = 0$.
  - $N_\alpha/G \cong A_5$.
- Możliwe są tylko dwa przypadki:
  - $C_\alpha = Z(G)$.
  - $N_\alpha = G \cdot C_\alpha$.

Centralne rozszerzenie przez A_5

- Mamy krótki ciąg dokładny

$$1 \longrightarrow Z(G) \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow A_5 \longrightarrow 1.$$

- C_α – cetralne rozszerzenie centrum grupy G przez A_5 – zależy tylko od klasy kohomologii $\beta \in \mathrm{H}^2(A_5, Z(G))$ definiującej powyższy ciąg.
- Niech $\mathbb{Z}_{p^q}$ będzie trywialnym A_5-modułem, gdzie p jest liczbą pierwszą, $q \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\mathrm{H}^2(A_5, \mathbb{Z}_{p^q}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & p = 2 \\ 0, & p \geq 3 \end{cases}$$

- Jeżeli $\mathbb{Z}_2 \not\hookrightarrow Z(G)$ lub $\beta = 0$, to $C_\alpha = Z(G) \times A_5$, co jest niemożliwe.

Grupa $\mathrm{SL}(2,5)$

- Jeżeli $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Z(G)$ oraz $\beta \neq 0$, to
$$\varrho\colon \mathrm{SL}(2,5) \hookrightarrow C_\alpha.$$
- $SL(2,5) = \langle a,b,c | a^2c, b^3, (ab)^5, [a,c], [b,c], c^2 \rangle$.
- $Z(SL(2,5)) = \langle c \rangle$.
- Tablica charakterów $\mathrm{SL}(2,5)$

	1	b	a	ba	b^2a	c	cb	$(ba)^2$	$c(ba)^2$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{2a}	2	-1	0	$-\omega-\omega^4$	$\omega+\omega^4$	-2	1	$\omega^2+\omega^3$	$-\omega^2-\omega^3$
χ_{2b}	2	-1	0	$-\omega^2-\omega^3$	$\omega^2+\omega^3$	-2	1	$\omega+\omega^4$	$-\omega-\omega^4$
χ_{3a}	3	0	-1	$-\omega^2-\omega^3$	$-\omega^2-\omega^3$	3	0	$-\omega-\omega^4$	$-\omega-\omega^4$
χ_{3b}	3	0	-1	$-\omega-\omega^4$	$-\omega-\omega^4$	3	0	$-\omega^2-\omega^3$	$-\omega^2-\omega^3$
χ_{4a}	4	1	0	-1	-1	4	1	-1	-1
χ_4	4	1	0	1	-1	-4	-1	-1	1
χ_5	5	-1	1	0	0	5	-1	0	0
χ_6	6	0	0	-1	1	-6	0	1	-1

- $c \mapsto -I$.

Grupa $\mathrm{SL}(2, 5)$

- Jeżeli $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Z(G)$ oraz $\beta \neq 0$, to
$$\varrho \colon \mathrm{SL}(2,5) \hookrightarrow C_\alpha.$$
- $SL(2,5) = \langle a, b, c | a^2c, b^3, (ab)^5, [a,c], [b,c], c^2 \rangle$.
- $Z(SL(2,5)) = \langle c \rangle$.
- Tablica charakterów $\mathrm{SL}(2,5)$

	1	b	a	ba	b^2a	c	cb	$(ba)^2$	$c(ba)^2$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{2a}	2	-1	0	$-\omega-\omega^4$	$\omega+\omega^4$	-2	1	$\omega^2+\omega^3$	$-\omega^2-\omega^3$
χ_{2b}	2	-1	0	$-\omega^2-\omega^3$	$\omega^2+\omega^3$	-2	1	$\omega+\omega^4$	$-\omega-\omega^4$
χ_{3a}	3	0	-1	$-\omega^2-\omega^3$	$-\omega^2-\omega^3$	3	0	$-\omega-\omega^4$	$-\omega-\omega^4$
χ_{3b}	3	0	-1	$-\omega-\omega^4$	$-\omega-\omega^4$	3	0	$-\omega^2-\omega^3$	$-\omega^2-\omega^3$
χ_{4a}	4	1	0	-1	-1	4	1	-1	-1
χ_4	4	1	0	1	-1	-4	-1	-1	1
χ_5	5	-1	1	0	0	5	-1	0	0
χ_6	6	0	0	-1	1	-6	0	1	-1

- $c \mapsto -I$.

Grupa $\mathrm{SL}(2,5)$

- Jeżeli $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Z(G)$ oraz $\beta \neq 0$, to
$$\varrho \colon \mathrm{SL}(2,5) \hookrightarrow C_\alpha.$$
- $SL(2,5) = \langle a, b, c | a^2c, b^3, (ab)^5, [a,c], [b,c], c^2 \rangle$.
- $Z(SL(2,5)) = \langle c \rangle$.
- Tablica charakterów $\mathrm{SL}(2,5)$

	1	b	a	ba	b^2a	c	cb	$(ba)^2$	$c(ba)^2$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{2a}	2	-1	0	$-\omega-\omega^4$	$\omega+\omega^4$	-2	1	$\omega^2+\omega^3$	$-\omega^2-\omega^3$
χ_{2b}	2	-1	0	$-\omega^2-\omega^3$	$\omega^2+\omega^3$	-2	1	$\omega+\omega^4$	$-\omega-\omega^4$
χ_{3a}	3	0	-1	$-\omega^2-\omega^3$	$-\omega^2-\omega^3$	3	0	$-\omega-\omega^4$	$-\omega-\omega^4$
χ_{3b}	3	0	-1	$-\omega-\omega^4$	$-\omega-\omega^4$	3	0	$-\omega^2-\omega^3$	$-\omega^2-\omega^3$
χ_{4a}	4	1	0	-1	-1	4	1	-1	-1
χ_4	4	1	0	1	-1	-4	-1	-1	1
χ_5	5	-1	1	0	0	5	-1	0	0
χ_6	6	0	0	-1	1	-6	0	1	-1

- $c \mapsto -I$.

Centrum G

- Z dokładnością do izomorfizmu, istnieją trzy $\mathbb{Z}$-nieprzywiedlne reprezentacje grupy $\mathbb{Z}_2$, dane przez obraz generatora a tej grupy:

$$(1)\ a \mapsto \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \qquad (2)\ a \mapsto \begin{bmatrix}-1\end{bmatrix} \qquad (3)\ a \mapsto \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

- Reprezentacja ϱ zawiera podreprezentację trywialną. W przeciwnym wypadku $\varrho(c) = -I \in G$, a więc grupa Γ nie jest beztorsyjna.
- Element $\varrho(c) \in Z(G)$ jest macierzą blokową postaci

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Elementy grupy G

- Niech $g \in G$. W postaci blokowej g ma postać:

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}.$$

- $g \cdot \varrho(c) = \varrho(c) \cdot g$, więc

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{21} & g_{23} & g_{22} & -g_{24} \\ 0 & g_{42} & -g_{42} & g_{44} \end{bmatrix}.$$

Elementy grupy G

- Niech $g \in G$. W postaci blokowej g ma postać:

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}.$$

- $g \cdot \varrho(c) = \varrho(c) \cdot g$, więc

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}.$$

Grupy kohomololgii

Pokażemy, że $\mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) \neq 0$.

- $\mathrm{H}^2(G, \mathbb{Z}^n) \cong \mathrm{H}^1(G, \mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)$.
- Centrum grupy Γ jest trywialne, więc
  - $\mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) \cong \mathrm{H}^0(G, \mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n) = (\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)^G = \{v \in \mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n | gv = v\}$.
- Niech $\gamma \in \mathrm{H}^1(G, \mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)$ odpowiada klasie $\alpha \in \mathrm{H}^2(G, \mathbb{Z}^n)$, $h \in \gamma$. Dla dowolnego $g \in G$ mamy
$$(\varrho(c) - 1)h(g) = (g - 1)h(\varrho(c)).$$
- Otrzymujemy

$$\varrho(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(g) \\ h_2(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} - 1 & 0 \\ 0 & g_{22} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(\varrho(c)) \\ h_2(\varrho(c)) \end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$0 \neq \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)^G \Rightarrow \mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) \neq 0$$

Grupy kohomololgii

Pokażemy, że $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}^n)\neq 0$.

- $\mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z}^n)\cong \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)$.
- Centrum grupy Γ jest trywialne, więc
  - $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}^n)\cong \mathrm{H}^0(G,\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)=(\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)^G=\{v\in\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n | gv=v\}$.
- Niech $\gamma\in \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)$ odpowiada klasie $\alpha\in \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z}^n)$, $h\in\gamma$. Dla dowolnego $g\in G$ mamy
$$(\varrho(c)-1)h(g)=(g-1)h(\varrho(c)).$$
- Otrzymujemy

$$\varrho(c)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1(g)\\h_2(g)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_{11}-1&0\\0&g_{22}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\0\end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$0\neq\begin{bmatrix}v\\0\end{bmatrix}\in(\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)^G\Rightarrow \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}^n)\neq 0$$

Reprezentacje $\mathrm{SL}(2,5)$ oraz G

- Niech ϱ' będzie rozkładem ϱ nad $\mathbb{Q}$ postaci

$$\varrho' = 1 \oplus \varrho_1,$$

  gdzie ϱ_1 nie zawiera reprezentacji trywialnej.
- $\tau = id_G$ – naturalna reprezentacja G.
- Niech $\tau' = Q^{-1}\tau Q$, gdzie $\varrho' = Q^{-1}\varrho Q$. Otrzymujemy

$$\tau' = \tau_0 \oplus \tau_1,$$

  gdzie $\tau_1\varrho_1 = \varrho_1\tau_1$.

Macierz sprzężenia

- Niech
$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}$$
będzie postacią blokową Q odpowiadającą postaci $\varrho(c)$.
- $Q\varrho'(c) = \varrho(c)Q$, więc
$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{21} & q_{22} & -q_{23} & -q_{24} \\ 0 & 0 & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}.$$

Macierz sprzężenia

- Niech

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}$$

  będzie postacią blokową Q odpowiadającą postaci $\varrho(c)$.

- $Q\varrho'(c) = \varrho(c)Q$, więc

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{21} & q_{22} & -q_{23} & -q_{24} \\ 0 & 0 & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}.$$

Pierwsza grupa kohomologii

- $\tau' = Q^{-1}\tau Q = \tau_0 \oplus \tau_1$.
- $\tau'(G) < \langle \tau_0(g) \oplus 1, 1 \oplus \tau_1(g) | g \in G \rangle = Q^{-1}G'Q$.
- $G < G'$ oraz
$$(\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)^{G'} < (\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n)^{G}.$$
- Otrzymujemy

$$G' = \left\langle \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & -1-g_{23} & g_{23} & 0 \\ g_{21} & g_{23} & -1-g_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-g'_{23} & g'_{23} & g'_{24} \\ 0 & g'_{23} & 1-g'_{23} & -g'_{24} \\ 0 & g'_{42} & -g'_{42} & g'_{44} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Pierwsza grupa kohomologii

- $\tau' = Q^{-1}\tau Q = \tau_0 \oplus \tau_1$.
- $\tau'(G) < \langle \tau_0(g) \oplus 1, 1 \oplus \tau_1(g) | g \in G\rangle = Q^{-1}G'Q$.
- $G < G'$ oraz
$$\mathrm{H}^1(G', \mathbb{Z}^n) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n).$$
- Otrzymujemy

$$G' = \left\langle \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & -1-g_{23} & g_{23} & 0 \\ g_{21} & g_{23} & -1-g_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-g'_{23} & g'_{23} & g'_{24} \\ 0 & g'_{23} & 1-g'_{23} & -g'_{24} \\ 0 & g'_{42} & -g'_{42} & g'_{44} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Pierwsza grupa kohomologii

- $0 \neq v \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^k/\mathbb{Z}^k$, $k = \deg(g_{23})$. Mamy

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & -1 - g_{23} & g_{23} & 0 \\ g_{21} & g_{23} & -1 - g_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v \\ -v \\ -v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - g'_{23} & g'_{23} & g'_{24} \\ 0 & g'_{23} & 1 - g'_{23} & -g'_{24} \\ 0 & g'_{42} & -g'_{42} & g'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Otrzymujemy

$$\mathrm{H}^1(G', \mathbb{Z}^n) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) \neq 0.$$

Pierwsza grupa kohomologii

- $0 \neq v \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^k/\mathbb{Z}^k$, $k = \deg(g_{23})$. Mamy

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & -1 - g_{23} & g_{23} & 0 \\ g_{21} & g_{23} & -1 - g_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - g'_{23} & g'_{23} & g'_{24} \\ 0 & g'_{23} & 1 - g'_{23} & -g'_{24} \\ 0 & g'_{42} & -g'_{42} & g'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Otrzymujemy

$$\mathrm{H}^1(G', \mathbb{Z}^n) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^n) \neq 0.$$

Podsumowanie

- Nie każda grupę skończoną można zrealizować jako centralizator pewnej podgrupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$.
- Nie każda grupę skończoną można zrealizować jako podgrupę skończonego centralizatora pewnej podgrupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$.
- Jeżeli A_5 da się zrealizować jako grupa automorfizmów zewnętrznych pewnej grupy Bieberbacha z trywialnym centrum, to $N_\alpha \setminus G$ nie zawiera elementów przemiennych z G.

Podsumowanie

- Nie każda grupę skończoną można zrealizować jako centralizator pewnej podgrupy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$.
- Nie każda grupę skończoną można zrealizować jako podgrupę skończonego centralizatora pewnej podgrupy $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$.
- Jeżeli A_5 da się zrealizować jako grupa automorfizmów zewnętrznych pewnej grupy Bieberbacha z trywialnym centrum, to $N_\alpha \setminus G$ nie zawiera elementów przemiennych z G.

Podsumowanie

- Nie każda grupę skończoną można zrealizować jako centralizator pewnej podgrupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$.
- Nie każda grupę skończoną można zrealizować jako podgrupę skończonego centralizatora pewnej podgrupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$.
- Jeżeli A_5 da się zrealizować jako grupa automorfizmów zewnętrznych pewnej grupy Bieberbacha z trywialnym centrum, to $N_\alpha \setminus G$ nie zawiera elementów przemiennych z G.

Dziękuję za uwagę!