Spin struktury na prawie płaskich 4-rozmaitościach

Rafał Lutowski
wspólnie z N. Petrosyanem i A. Szczepańskim

Uniwersytet Gdański

XIII Północne Spotkania Geometryczne

Białystok, 17-18 czerwca 2019

- N – spójna i jednospójna nilpotentna grupa Liego.
- $\mathrm{Aff}(N) := N \rtimes \mathrm{Aut}(N)$ działa na N:
$$(n, \varphi) \cdot m = n\varphi(m),$$
gdzie $n, m \in N, \varphi \in \mathrm{Aut}(N)$.

Grupy prawie krystalograficzne

- N – spójna i jednospójna nilpotentna grupa Liego.
- $\mathrm{Aff}(N) := N \rtimes \mathrm{Aut}(N)$ działa na N:
$$(n, \varphi) \cdot m = n\varphi(m).$$
- C – maksymalna zwarta podgrupa $\mathrm{Aut}(N)$.

- N – spójna i jednospójna nilpotentna grupa Liego.
- $\mathrm{Aff}(N) := N \rtimes \mathrm{Aut}(N)$ działa na N:

$$(n, \varphi) \cdot m = n\varphi(m).$$

- C – maksymalna zwarta podgrupa $\mathrm{Aut}(N)$.

Definicja

- Dyskretną i kozwartą podgrupę Γ grupy $N \rtimes C$ nazywamy grupą prawie krystalograficzną (AC-grupą).

- N – spójna i jednospójna nilpotentna grupa Liego.
- $\mathrm{Aff}(N) := N \rtimes \mathrm{Aut}(N)$ działa na N:

$$(n, \varphi) \cdot m = n\varphi(m).$$

- C – maksymalna zwarta podgrupa $\mathrm{Aut}(N)$.

Definicja

- Dyskretną i kozwartą podgrupę Γ grupy $N \rtimes C$ nazywamy grupą prawie krystalograficzną (AC-grupą).
- Beztorsyjną AC-grupę nazywamy grupą prawie Bieberbacha (AB-grupą).

- N – spójna i jednospójna nilpotentna grupa Liego.
- $\mathrm{Aff}(N) := N \rtimes \mathrm{Aut}(N)$ działa na N:
$$(n,\varphi)\cdot m = n\varphi(m).$$
- C – maksymalna zwarta podgrupa $\mathrm{Aut}(N)$.

Definicja

- Dyskretną i kozwartą podgrupę Γ grupy $N \rtimes C$ nazywamy grupą prawie krystalograficzną (AC-grupą).
- Beztorsyjną AC-grupę nazywamy grupą prawie Bieberbacha (AB-grupą).
- Γ – AB-grupa. N/Γ – prawie płaska rozmaitość (modelowana na N).

Twierdzenie (Auslander 1960 – uogólniony Bieberbach I)

Niech $\Gamma \subset N \rtimes C$ *będzie AC-grupą. Wtedy mamy k.c.d.*

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1,$$

gdzie $\Lambda = \Gamma \cap N$ *jest kratą, a* F *– grupą skończoną.*

Twierdzenie (Auslander 1960 – uogólniony Bieberbach I)

Niech $\Gamma \subset N \rtimes C$ *będzie AC-grupą. Wtedy mamy k.c.d.*

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1,$$

gdzie $\Lambda = \Gamma \cap N$ *jest kratą, a* F *– grupą skończoną.*

Mamy $F \subset C \hookrightarrow \mathrm{O}(n)$ oraz:

- reprezentację holonomii $\varphi\colon F \to \mathrm{O}(n)$;
- reprezentację klasyfikującą $\varphi \circ \pi\colon \Gamma \to \mathrm{O}(n)$.

Twierdzenie (Auslander 1960 – uogólniony Bieberbach I)

Niech $\Gamma \subset N \rtimes C$ *będzie AC-grupą. Wtedy mamy k.c.d.*

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1,$$

gdzie $\Lambda = \Gamma \cap N$ *jest kratą, a* F *– grupą skończoną.*

Mamy $F \subset C \hookrightarrow \mathrm{O}(n)$ oraz:

- reprezentację holonomii $\varphi \colon F \to \mathrm{O}(n)$;
- reprezentację klasyfikującą $\varphi \circ \pi \colon \Gamma \to \mathrm{O}(n)$.

Γ – AB-grupa

N/Γ jest orientowalna $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{SO}(n)$.

Algebra Clifforda C_n:

Rzeczywista łączna algebra z 1, generowana przez $e_1, \ldots, e_n$, t. że

$$e_i^2 = -1 \text{ and } e_i e_j = -e_j e_i$$

dla $1 \leq i < j \leq n$.

Trzy inwolucje w C_n

Definicja

- ${}^*\colon C_n \to C_n$ zdefiniowana na bazie p. liniowej C_n:
$$(e_{i_1} \ldots e_{i_k})^* = e_{i_k} \ldots e_{i_1}$$
dla $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$.

Trzy inwolucje w C_n

Definicja

- $^*\colon C_n \to C_n$ zdefiniowana na bazie p. liniowej C_n:
$$(e_{i_1} \dots e_{i_k})^* = e_{i_k} \dots e_{i_1}$$
- $'\colon C_n \to C_n$ zdefiniowana na generatorach algebry C_n:
$$e_i' = -e_i$$
dla $1 \leq i \leq n$.

Trzy inwolucje w C_n

Definicja

- $^*\colon C_n \to C_n$ zdefiniowana na bazie p. liniowej C_n:
$$(e_{i_1} \ldots e_{i_k})^* = e_{i_k} \ldots e_{i_1}$$
- $'\colon C_n \to C_n$ zdefiniowana na generatorach algebry C_n:
$$e_i' = -e_i$$
- $\bar{}\colon C_n \to C_n$ zdefiniowana na bazie p. liniowej C_n:
$$\overline{e_{i_1} \ldots e_{i_k}} = (-e_{i_k}) \ldots (-e_{i_1})$$

dla $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

Trzy inwolucje w C_n

Definicja

- $^*: C_n \to C_n$ zdefiniowana na bazie p. liniowej C_n:
$$(e_{i_1} \dots e_{i_k})^* = e_{i_k} \dots e_{i_1}$$
- $': C_n \to C_n$ zdefiniowana na generatorach algebry C_n:
$$e_i' = -e_i$$
- $^-: C_n \to C_n$ zdefiniowana na bazie p. liniowej C_n:
$$\forall_{a \in C_n} \overline{a} = (a')^*.$$

Definicja

$$\mathrm{Spin}(n) := \{x \in C_n \mid x = x' \wedge x\overline{x} = 1\}$$

Definicja

$$\mathrm{Spin}(n) := \{x \in C_n \mid x = x' \wedge x\overline{x} = 1\}$$

Przykład

1. $\mathrm{Spin}(1) = \mathrm{O}(1) = \{\pm 1\}$
2. $\mathrm{Spin}(2) \simeq \mathrm{U}(1)$
3. $\mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)$
4. $\mathrm{Spin}(4) \simeq \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$
5. $\mathrm{Spin}(5) \simeq \mathrm{Sp}(2)$
6. $\mathrm{Spin}(6) \simeq \mathrm{SU}(4)$

Definicja

$$\mathrm{Spin}(n) := \{x \in C_n \mid x = x' \wedge x\overline{x} = 1\}$$

Stwierdzenie

Mamy następujący k.c.d.

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{\lambda_n} \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 1$$

gdzie dla każdego $x \in \mathrm{Spin}(n), v \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda_n(x)v = xvx^{-1}.$$

Prawie płaskie rozmaitości – spin struktury

Twierdzenie (Gąsior, Petrosyan, Szczepański 2016)

$\Gamma \subset N \rtimes C$ – *AB-grupa,* $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{SO}(n)$ *reprezentacja klasyfikująca*

$$\left\{\textit{spin struktury } N/\Gamma\right\} \leftrightarrow \left\{\epsilon\colon \Gamma \to \mathrm{Spin}(n) \mid \lambda_n \epsilon = \rho\right\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\
\Gamma \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{SO}(n)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\ \Gamma \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

Algorytm

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\ \Gamma \arrow[r, "\rho"] \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

1. Skonstruuj skończoną prezentację $\langle S|R\rangle$ odpowiadającą

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

Algorytm

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\ \Gamma \arrow[r, "\rho"] \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

1. Skonstruuj skończoną prezentację $\langle S|R\rangle$ odpowiadającą

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

2. Dla każdego $s \in S$ znajdź $x_s \in \mathrm{Spin}(n)$ taki, że $\lambda_n(x_s) = \rho(s)$.

$$\lambda_n^{-1}(\rho(s)) = \{\pm x_s\}$$

Algorytm

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\ \Gamma \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

1. Skonstruuj skończoną prezentację $\langle S|R\rangle$ odpowiadającą

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

2. Dla każdego $s \in S$ znajdź $x_s \in \mathrm{Spin}(n)$ taki, że $\lambda_n(x_s) = \rho(s)$.

$$\lambda_n^{-1}(\rho(s)) = \{\pm x_s\}$$

3. Sprawdź, czy $\epsilon' \colon S \to \mathrm{Spin}(n), s \mapsto \pm x_s$ zachowuje relacje Γ:

$$s_1^{\alpha_1} \dots s_k^{\alpha_k} \in R \;\Rightarrow\; \epsilon'(s_1)^{\alpha_1} \dots \epsilon'(s_k)^{\alpha_k} = 1$$

dla $s_i \in S, \alpha_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, k$.

Uwaga: zachowywanie relacji

1. Γ – skończenie prezentowalna.

GAP: pakiet `AClib` autorstwa B. Eick i K. Dekimpe

Katalog 4-wymiarowych AC-grup jako grup macierzowych i policyklicznych.

1. Γ – skończenie prezentowalna.

   GAP: pakiet `AClib` autorstwa B. Eick i K. Dekimpe

   Katalog 4-wymiarowych AC-grup jako grup macierzowych i policyklicznych.

2. Możemy użyć dowolnego rozszerzenia równoważnego z:

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \lambda_n^{-1}(F) = \widetilde{F} \longrightarrow F \longrightarrow 1.$$

1. Γ – skończenie prezentowalna.

   GAP: pakiet `AClib` autorstwa B. Eick i K. Dekimpe

   Katalog 4-wymiarowych AC-grup jako grup macierzowych i policyklicznych.

2. Możemy użyć dowolnego rozszerzenia równoważnego z:

   $$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \lambda_n^{-1}(F) = \widetilde{F} \longrightarrow F \longrightarrow 1.$$

3. Zachowywanie prezentacji w GAP-ie:

   `GroupHomomorphismByImages(`Γ`, `$\widetilde{F}$`, `S`, `$\epsilon'(S)$`)`

Centralne rozszerzenie

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

1. $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii

Centralne rozszerzenie

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

1. $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii
2. Klasa izomorfizmu $\widetilde{F}$ wynika z klasy równoważności φ

Centralne rozszerzenie

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

1. $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii
2. Klasa izomorfizmu $\widetilde{F}$ wynika z klasy równoważności φ
3. Wystarczy sprawdzić, gdy F jest 2-grupą

Lemat (Gąsior, Petrosyan, Szczepański 2016)

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

Niech G będzie 2-podgrupą Sylowa grupy F. Wtedy

$$N/\Gamma \text{ ma spin-strukturę } \Leftrightarrow N/\pi^{-1}(G) \text{ ma spin-strukturę.}$$

Uwaga: przeciwobraz

Centralne rozszerzenie

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

1. $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii
2. Klasa izomorfizmu $\widetilde{F}$ wynika z klasy równoważności φ
3. Wystarczy sprawdzić, gdy F jest 2-grupą
4. F – 2-grupa: mamy $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n,\mathbb{Z}) = \mathrm{SO}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$

Lemat

φ is $\mathbb{R}$-równoważne z reprezentacją postaci $F \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$

Lemat (Putrycz, Lutowski 2015)

Każda wymierna reprezentacja 2-grupy F jest równoważna z reprezentacją postaci $F \to \mathrm{O}(n,\mathbb{Z}) = O(n) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$

Centralne rozszerzenie

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

1. $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii
2. Klasa izomorfizmu $\widetilde{F}$ wynika z klasy równoważności φ
3. Wystarczy sprawdzić, gdy F jest 2-grupą
4. F – 2-grupa: mamy $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n,\mathbb{Z}) = \mathrm{SO}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$
5. $\mathrm{SO}(n,\mathbb{Z})$ jest generowane przez $\lambda_n((1+e_pe_q)/\sqrt{2})$, $p<q$.

Przykład ($n=3$)

$$\lambda_3\left(\frac{1+e_1e_2}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Centralne rozszerzenie

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

1. $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii
2. Klasa izomorfizmu $\widetilde{F}$ wynika z klasy równoważności φ
3. Wystarczy sprawdzić, gdy F jest 2-grupą
4. F – 2-grupa: mamy $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n,\mathbb{Z}) = \mathrm{SO}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$
5. $\mathrm{SO}(n,\mathbb{Z})$ jest generowane przez $\lambda_n((1+e_pe_q)/\sqrt{2})$, $p<q$.

Przykład ($n=3$)

$$\lambda_3\left(\frac{1+e_1e_3}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Centralne rozszerzenie

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \longrightarrow F \longrightarrow 1$$

1. $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii
2. Klasa izomorfizmu $\widetilde{F}$ wynika z klasy równoważności φ
3. Wystarczy sprawdzić, gdy F jest 2-grupą
4. F – 2-grupa: mamy $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n,\mathbb{Z}) = \mathrm{SO}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$
5. $\mathrm{SO}(n,\mathbb{Z})$ jest generowane przez $\lambda_n((1+e_pe_q)/\sqrt{2})$, $p<q$.

Przykład ($n=3$)

$$\lambda_3\left(\frac{1+e_2e_3}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uwaga: prezentacja

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\
\Gamma \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{SO}(n)
\end{tikzcd}
$$

- Mamy

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\ \Gamma \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

- Mamy

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

- $\rho = \varphi\pi$, gdzie $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii

Uwaga: prezentacja

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\ \Gamma \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

- Mamy

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

- $\rho = \varphi\pi$, gdzie $\varphi \colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii
- $\Lambda^2 = \langle\langle \lambda^2 \mid \lambda \in \Lambda \rangle\rangle$

Uwaga: prezentacja

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\ \Gamma \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] \arrow[r, "\rho"'] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

- Mamy

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

- $\rho = \varphi\pi$, gdzie $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii
- $\Lambda^2 = \langle\langle \lambda^2 \mid \lambda \in \Lambda \rangle\rangle$
- Jeżeli ϵ istnieje, to $\Lambda^2 \subset \ker \epsilon$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\ \Gamma \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

- Mamy

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

- $\rho = \varphi\pi$, gdzie $\varphi\colon F \to \mathrm{SO}(n)$ – reprezentacja holonomii
- $\Lambda^2 = \langle\langle \lambda^2 \mid \lambda \in \Lambda \rangle\rangle$
- Jeżeli ϵ istnieje, to $\Lambda^2 \subset \ker \epsilon$. Tw. o izomorfizmie :

Istnieje $\epsilon \Leftrightarrow$ Istnieje ϵ_2

$$\begin{tikzcd}
\Gamma/\Lambda^2 \arrow[r, dashed, "\epsilon_2"] & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda_n"] \\
\Gamma \arrow[u] \arrow[ur, dashed, "\epsilon"] \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{SO}(n)
\end{tikzcd}$$

Istnieje $\epsilon \Leftrightarrow$ Istnieje ϵ_2

Klasyfikacja AC-grup w wymiarze 4:

Z dokładnością do izomorfizmu, w wymiarze 4 jest skończenie wiele grup postaci Γ/Λ^2.

AB-grupy w wymiarze 4

B. Putrycz i A. Szczepański, 2010:

Klasyfikacja spin-struktur dla grup Bieberbacha (wymiaru 4).

AB-grupy w wymiarze 4

B. Putrycz i A. Szczepański, 2010:

Klasyfikacja spin-struktur dla grup Bieberbacha (wymiaru 4).

Dekimpe 1996. Dla AB-grup (nie B-grup) wymiaru 4 mamy:

AB-grupy w wymiarze 4

B. Putrycz i A. Szczepański, 2010:

Klasyfikacja spin-struktur dla grup Bieberbacha (wymiaru 4).

Dekimpe 1996. Dla AB-grup (nie B-grup) wymiaru 4 mamy:

1. 9 grup holonomii (izomorfizm);

AB-grupy w wymiarze 4

B. Putrycz i A. Szczepański, 2010:

Klasyfikacja spin-struktur dla grup Bieberbacha (wymiaru 4).

Dekimpe 1996. Dla AB-grup (nie B-grup) wymiaru 4 mamy:

1. 9 grup holonomii (izomorfizm);
2. 9 reprezentacji holonomii (równoważność)
    - jedna reprezentacja na każdą grupę;

B. Putrycz i A. Szczepański, 2010:

Klasyfikacja spin-struktur dla grup Bieberbacha (wymiaru 4).

Dekimpe 1996. Dla AB-grup (nie B-grup) wymiaru 4 mamy:

1. 9 grup holonomii (izomorfizm);
2. 9 reprezentacji holonomii (równoważność)
   - jedna reprezentacja na każdą grupę;
3. 43 nieskończone rodziny AB-grup; w każdej rodzinie:
   - istnieje m takie, że
   - każda grupa Γ jest zdefiniowana przez ciąg liczb naturalnych $(k_1, \ldots, k_m)$ oraz
   - Γ/Λ^2 zależy tylko od $(k_1, \ldots, k_m) \bmod 2$;

B. Putrycz i A. Szczepański, 2010:

Klasyfikacja spin-struktur dla grup Bieberbacha (wymiaru 4).

Dekimpe 1996. Dla AB-grup (nie B-grup) wymiaru 4 mamy:

1. 9 grup holonomii (izomorfizm);
2. 9 reprezentacji holonomii (równoważność)
    - jedna reprezentacja na każdą grupę;
3. 43 nieskończone rodziny AB-grup; w każdej rodzinie:
    - istnieje m takie, że
    - każda grupa Γ jest zdefiniowana przez ciąg liczb naturalnych $(k_1, \ldots, k_m)$ oraz
    - Γ/Λ^2 zależy tylko od $(k_1, \ldots, k_m) \bmod 2$;
4. 127 grup postaci Γ/Λ^2 (izomorfizmu w rodzinie);

AB-grupy w wymiarze 4

Dekimpe 1996. Dla AB-grup (nie B-grup) wymiaru 4 mamy:

4. 127 grup postaci Γ/Λ^2 (izomorfizmu w rodzinie);
5. 127 nieskończonych rodzin AB-grup z taką samą „spin-strukturą” (ϵ_2)

Dekimpe 1996. Dla AB-grup (nie B-grup) wymiaru 4 mamy:

5. 127 nieskończonych rodzin AB-grup z taką samą „spin-strukturą” (ϵ_2)

liczba rodzin	15	16	42	44	10
liczba spin struktur	0	2	4	8	16

Przykład. Rodzina 103: prezentacja

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d, \alpha, \beta \;\middle|\; \begin{array}{lll} [b,a] = d^{k_1} & [c,a] = 1 & [d,a] = 1 \\ [c,b] = 1 & [d,b] = 1 & [d,c] = 1 \\ \alpha^4 = d^{k_4} & \alpha a = b\alpha d^{k_2} & \alpha b = a^{-1}\alpha d^{k_3} \\ \alpha c = c\alpha & \alpha d = d\alpha & \\ \beta^2 = cd^{k_5} & \beta a = a\beta d^{k_2+k_3} & \beta b = b^{-1}\beta \\ \beta c = c\beta d^{-2k_5} & \beta d = d^{-1}\beta & \alpha\beta = \beta\alpha^3 d^{-k_4} \end{array} \right\rangle$$

Przykład. Rodzina 103: prezentacja

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

$$\Gamma = \langle a, b, c, d, \alpha, \beta \mid \begin{array}{lll} [b,a] = d^{k_1} & [c,a] = 1 & [d,a] = 1 \\ [c,b] = 1 & [d,b] = 1 & [d,c] = 1 \\ \alpha^4 = d^{k_4} & \alpha a = b\alpha d^{k_2} & \alpha b = a^{-1}\alpha d^{k_3} \\ \alpha c = c\alpha & \alpha d = d\alpha & \\ \beta^2 = cd^{k_5} & \beta a = a\beta d^{k_2+k_3} & \beta b = b^{-1}\beta \\ \beta c = c\beta d^{-2k_5} & \beta d = d^{-1}\beta & \alpha\beta = \beta\alpha^3 d^{-k_4} \end{array} \rangle$$

- $\Lambda = \langle a, b, c, d \rangle$
- $F = \langle \overline{\alpha} = \pi(\alpha), \overline{\beta} = \pi(\beta) \rangle$

Przykład. Rodzina 103: prezentacja

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d, \alpha, \beta \;\middle|\; \begin{array}{lll} [b,a] = d^{k_1} & [c,a] = 1 & [d,a] = 1 \\ [c,b] = 1 & [d,b] = 1 & [d,c] = 1 \\ \alpha^4 = d^{k_4} & \alpha a = b\alpha d^{k_2} & \alpha b = a^{-1}\alpha d^{k_3} \\ \alpha c = c\alpha & \alpha d = d\alpha & \\ \beta^2 = cd^{k_5} & \beta a = a\beta d^{k_2+k_3} & \beta b = b^{-1}\beta \\ \beta c = c\beta d^{-2k_5} & \beta d = d^{-1}\beta & \alpha\beta = \beta\alpha^3 d^{-k_4} \end{array} \right\rangle$$

- $\Lambda = \langle a, b, c, d \rangle$
- $F = \langle \overline{\alpha} = \pi(\alpha), \overline{\beta} = \pi(\beta) \rangle$
- $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ dla AB-grup:

$$\left. \begin{array}{l} \forall k > 0, k \equiv 0 \bmod 2, (k, 0, 0, 1, 0) \\ \forall k > 0, k \equiv 0 \bmod 4, (k, 0, 0, 3, 0) \end{array} \right\} \equiv (0, 0, 0, 1, 0) \bmod 2$$

Przykład. Rodzina 103: prezentacja

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 1$$

$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d, \alpha, \beta \;\middle|\; \begin{array}{lll} [b,a] = 1 & [c,a] = 1 & [d,a] = 1 \\ [c,b] = 1 & [d,b] = 1 & [d,c] = 1 \\ \alpha^4 = d & \alpha a = b\alpha & \alpha b = a^{-1}\alpha \\ \alpha c = c\alpha & \alpha d = d\alpha & \\ \beta^2 = c & \beta a = a\beta & \beta b = b^{-1}\beta \\ \beta c = c\beta & \beta d = d^{-1}\beta & \alpha\beta = \beta\alpha^3 d^{-1} \end{array} \right\rangle$$

- $\Lambda = \langle a, b, c, d \rangle$
- $F = \langle \overline{\alpha} = \pi(\alpha), \overline{\beta} = \pi(\beta) \rangle$
- $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ dla AB-grup:

$$\left.\begin{array}{l} \forall k > 0, k \equiv 0 \bmod 2, (k, 0, 0, 1, 0) \\ \forall k > 0, k \equiv 0 \bmod 4, (k, 0, 0, 3, 0) \end{array}\right\} \equiv (0, 0, 0, 1, 0) \bmod 2$$

Przykład. Rodzina 103: przeciwobraz w $\mathrm{Spin}(4)$

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \xrightarrow{\lambda_4} F \longrightarrow 1$$

- Reprezentacja holonomii $F \to \mathrm{SO}(4, \mathbb{Z})$

$$\overline{\alpha} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{\beta} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład. Rodzina 103: przeciwobraz w $\mathrm{Spin}(4)$

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \xrightarrow{\lambda_4} F \longrightarrow 1$$

- Reprezentacja holonomii $F \to \mathrm{SO}(4, \mathbb{Z})$

$$\overline{\alpha} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{\beta} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\widetilde{F} = \langle A, B, C \rangle$ gdzie $C = -1$ oraz

$$A = (1 + e_2 e_3)/\sqrt{2}, B = e_1 e_3$$

Przykład. Rodzina 103: przeciwobraz w $\mathrm{Spin}(4)$

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{F} \xrightarrow{\lambda_4} F \longrightarrow 1$$

- Reprezentacja holonomii $F \to \mathrm{SO}(4,\mathbb{Z})$

$$\overline{\alpha} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{\beta} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\widetilde{F} = \langle A, B, C \rangle$ gdzie $C = -1$ oraz

$$A = (1 + e_2 e_3)/\sqrt{2}, B = e_1 e_3$$

$$\widetilde{F} = \langle A, B, C \mid C^2 = [C, A] = [C, B] = 1, A^4 = B^2 = (AB)^2 = C \rangle \simeq Q_{16}$$

Przykład. Rodzina 103: relacje

- $S = \{a, b, c, d, \alpha, \beta\}$
- Dla każdej funkcji $\epsilon' : S \to \widetilde{F}$ spełniającej

$$\begin{aligned} \epsilon'(a), \epsilon'(b), \epsilon'(c), \epsilon'(d) &\in \{1, C\} \\ \epsilon'(\alpha) &\in \{A, AC\} \\ \epsilon'(\beta) &\in \{B, BC\} \end{aligned}$$

  sprawdzamy zachowywanie relacji Γ w $\widetilde{F}$.

- $S = \{a, b, c, d, \alpha, \beta\}$
- Dla każdej funkcji $\epsilon' \colon S \to \widetilde{F}$ spełniającej

$$
\begin{aligned}
\epsilon'(a), \epsilon'(b), \epsilon'(c), \epsilon'(d) &\in \{1, C\} \\
\epsilon'(\alpha) &\in \{A, AC\} \\
\epsilon'(\beta) &\in \{B, BC\}
\end{aligned}
$$

sprawdzamy zachowywanie relacji Γ w $\widetilde{F}$.

Spośród 64 takich funkcji, 8 zachowuje relacje.

Przykład. Rodzina 103: relacje

- $S = \{a, b, c, d, \alpha, \beta\}$
- Dla każdej funkcji $\epsilon' : S \to \widetilde{F}$ spełniającej

$$\begin{aligned} \epsilon'(a), \epsilon'(b), \epsilon'(c), \epsilon'(d) &\in \{1, C\} \\ \epsilon'(\alpha) &\in \{A, AC\} \\ \epsilon'(\beta) &\in \{B, BC\} \end{aligned}$$

sprawdzamy zachowywanie relacji Γ w $\widetilde{F}$.

Spośród 64 takich funkcji, 8 zachowuje relacje.

Wniosek

Każda prawie płaska rozmaitość z grupą podstawową należącą do rodziny 103 posiada 8 spin-struktur.

Dziękuję za uwagę!