Spin struktury na rozmaitościach i grupach
Ćwiczenia

dr Rafał Lutowski

1. Grupy macierzowe

1.1. Pokaż, że $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ jest otwartym podzbiorem $M_n(\mathbb{R})$. Zbiór macierzy kwadratowych rzeczywistych stopnia n ma topologię przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n^2}$.
Wskazówka: Wykorzystaj odwzorowanie „wyznacznik".

Niech $n \in \mathbb{N}$. Grupa macierzy ortogonalnych stopnia n jest zdefiniowana następująco:

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, AA^T = I\}.$$

1.2. Pokaż, że dowolna macierz ortogonalna zachowuje standardowy iloczyn skalarny.

1.3. Pokaż, że wyznacznik dowolnej macierzy ortogonalnej jest równy ± 1.

1.4. Pokaż, że $O(n)$ jest domkniętym podzbiorem $M_n(\mathbb{R})$ ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).
Wskazówka: Wykorzystaj odwzorowanie określone wzorem $A \mapsto A^T A$ (co można wziąć za dziedzinę i przeciwdziedzinę tak określonego odwzorowania?).

1.5. Wykorzystując twierdzenie Heinego-Borela pokaż, że $O(n)$ jest grupą zwartą.

1.6. Pokaż, że $O(n)$ nie jest grupą spójną. Składową spójności $O(n)$ zawierającą macierz jednostkową oznaczamy przez $SO(n)$. Pokaż, że $SO(n)$ jest zwartą podgrupą $O(n)$ ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).

Twierdzenie. *Niech $Q \in O(n), n \in \mathbb{N}$. Istnieje baza ortonormalna taka, że macierz odwzorowania liniowego zdefiniowanego przez Q ma postać*

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & R_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pm 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \pm 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $R_i \in SO(2) \setminus \{\pm I\}, i = 1, \dots, k$.

1.7.* Udowodnij powyższe twierdzenie.

1.8. Udowodnij, że każda macierz $Q \in SO(2)$ definiuje obrót. Wykorzystaj ten fakt i powyższe twierdzenie do pokazania, że dla dowolnej macierzy ortogonalnej $Q \in O(n)$ i dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}^n$

$$Qx = (f_1 \circ \ldots \circ f_l)(x),$$

gdzie f_i jest odbiciem względem pewnej hiperpłaszczyzny w $\mathbb{R}^n$ dla $i = 1, \ldots, l$..