

Funkcje Analityczne I

Notatki do wykładu

1 Płaszczyzna zespolona

- $z = x + iy$ – liczba zespolona
- $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = i \cdot i = -1$
- $\operatorname{re} z = x$, $\operatorname{im} z = y$
- x – część rzeczywista
- y – część urojona
- \mathbb{C} – zbiór liczb zespolonych
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem
- $\bar{z} = x - iy$ – liczba sprzężona
- $-z = -x - iy$ – liczba przeciwna
- $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ – liczba odwrotna
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – moduł z , lub wartość bezwzględna z
- $|z|^2 = z \bar{z}$
- kąt ϕ taki, że

$$\cos \phi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \phi = \frac{y}{|z|}$$

nazywamy *argumentem* $z = x + iy \neq 0$

- $\arg z = \phi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- jeżeli $-\pi < \phi \leq \pi$ to $\phi = \operatorname{Arg} z$ – argument główny
- $z = x + iy = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$ – postać biegunowa z
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ – nierówność trójkąta
- $|z - z'| \leq |z| + |z'|$ – nierówność trójkąta
- $|z - z'|$ jest odległością pomiędzy z oraz z' na płaszczyźnie

- jeżeli $r > 0$ oraz $z_0 \in \mathbb{C}$ to
 $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ – koło otwarte o środku z_0 i promieniu r
- $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ – koło domknięte o środku z_0 i promieniu r
- $D'(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ – sąsiedztwo kołowe z_0 o promieniu r

Definicja. Szereg potęgowy o środku z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

$$R = \begin{cases} \infty & \text{jeżeli } \lambda = 0 \\ 0 & \text{jeżeli } \lambda = \infty \\ \frac{1}{\lambda} & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

- R – promień zbieżności szeregu potęgowego
- $D(z_0, R)$ – koło zbieżności szeregu potęgowego

Fakt 1.1 (a) Szereg potęgowy $f(z)$ jest bezwzględnie zbieżny gdy $|z - z_0| < R$, tzn. $z \in D(z_0, R)$.

(b) Szereg potęgowy $f(z)$ jest rozbieżny gdy $|z - z_0| > R$, tzn. $z \notin \bar{D}(z_0, R)$.

(c) Funkcja $f(z)$ jest ciągła na $D(z_0, R)$.

2 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Definicja. Funkcję wykładniczą definiujemy jako szereg potęgowy

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{dla } z \in \mathbb{C}.$$

Promień zbieżności tego szeregu jest równy ∞ , więc funkcja $\exp(z)$ jest zdefiniowana i ciągła na \mathbb{C} . Definiujemy

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Fakt 2.1 $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

Fakt 2.2 $e^0 = 1$.

Fakt 2.3 $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0, \quad e^{-z} = 1/e^z$.

Fakt 2.4 (Tożsamość Eulera) *Jeżeli $t \in \mathbb{R}$ to*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Wartości e^{it} "nawijają się" wokół okręgu jednostkowego w dodatnim kierunku.

Wniosek 2.5 (Tożsamość Eulera) *Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, to*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Fakt 2.6 $\exp(z)$ jest funkcją okresową o okresie $2\pi i$.

Fakt 2.7 $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

Fakt 2.8 *Jeżeli z jest liczbą zespoloną różną od zera to istnieje $w \in \mathbb{C}$, taka że $\exp(w) = z$.*

Fakt 2.9 *Jeżeli $\exp(w) = \exp(w')$ to $w' = w + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.*

Definicja. Niech $z \neq 0$ będzie liczbą zespoloną. Każdą liczbę zespoloną w spełniającą $\exp(w) = z$ nazywamy *logarytmem* liczby z i oznaczamy $w = \log z$. Więc

$$e^{\log z} = z$$

Uwaga. $\log 0$ nie istnieje, bo zawsze $\exp(w) \neq 0$.

Wniosek 2.10 *Jeżeli $w = \log z$ oraz $w' = \log z$ to $w = w' + 2k\pi i$.*

Definicja. Dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista a taka, że $e^a = x$. Oznaczamy

$$\ln x = a.$$

Fakt 2.11 *Jeżeli $z \neq 0$, $\phi = \arg z$ to*

$$\log z = \ln |z| + i\phi + 2k\pi i$$

3 Krzywe i drogi

Definicja. Odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ nazywamy *krzywą* w U ,

- $[a, b]$ – przedziałem parametru krzywej γ ,
- $\gamma^* = \gamma([a, b])$ – obrazem krzywej γ^* .

Przykład. Niech $\gamma(t) = \exp(it) = \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.

- γ jest krzywą
- $[0, \pi]$ jest przedziałem parametru

Definicja. Jeżeli $\gamma(a) = \gamma(b)$ to krzywa γ jest *zamknięta*. Jeżeli ponadto γ jest różnowartościowa na $[a, b]$ to nazywamy ją *krzywą Jordana*.

Przykład. $\gamma(t) = 5 \exp(it)$, $0 \leq t \leq 4\pi$ jest zamknięta, ale nie jest krzywą Jordana.

Definicja. Dla $t \in [a, b]$ *pochoďną* nazywamy

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow t} \frac{\gamma(h) - \gamma(t)}{h - t}$$

o ile istnieje. (W końcach przedziału liczymy pochodne jednostronne.)

Przykład. Niech $\gamma(t) = \exp(it)$. Wtedy $\gamma'(t) = i \exp(it)$.

Definicja. Krzywa γ jest klasy C^1 , jeżeli $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ jest ciągła.

Definicja. Krzywą γ nazywamy *drogą*, jeżeli istnieje skończona rodzina punktów t_j , $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, takich że ograniczenie γ do każdego przedziału $[t_{j-1}, t_j]$ jest klasy C^1 . W punktach t_j pochodne lewostronne i prawostronne mogą się różnić.

Przykład.

$$\gamma(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{jeżeli } -2 \leq t \leq 0 \\ \exp(it) & \text{jeżeli } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

jest drogą Jordana.

4 Funkcje holomorficzne

Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym, niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją.

Definicja. Dla $z \in U$, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$$

to oznaczamy ją symbolem $f'(z)$ i nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie z .

Jeżeli $f'(z)$ istnieje dla każdego $z \in U$ to mówimy, że f jest funkcją *holomorficzną* (lub *analityczną*) w zbiorze U .

Zbiór wszystkich funkcji holomorficzych w U oznaczamy symbolem $H(U)$.

Jeżeli $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $\Omega \subset U$ dla pewnego otwartego zbioru $U \subset \mathbb{C}$, oraz istnieje funkcja $g \in H(U)$ która jest równa f na zbiorze Ω , wtedy powiemy że f jest *holomorficzną* w zbiorze Ω (piszemy $f \in H(\Omega)$).

Fakt 4.1 $f'(z)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall z' \in D'(z, r) \quad \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} - f'(z) \right| < \epsilon$$

- Jeżeli $f, g \in H(\Omega)$ to $f \pm g \in H(\Omega)$, $f \cdot g \in H(\Omega)$, oraz $f/g \in H(\Omega \setminus g^{-1}(0))$.
- Złożenie funkcji holomorficzych jest funkcją holomorficzną.
- Pochodne w powyższych przypadkach mają taką samą postać jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej.
- Wielomiany są funkcjami holomorficznymi.
- Jeżeli $P(z), Q(z)$ są wielomianami, to funkcja wymierna $f(z) = P(z)/Q(z)$ jest holomorficzną w $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(0)$.

Twierdzenie 4.2 Szereg potęgowy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ o promieniu zbieżności $R > 0$ jest funkcją holomorficzną w kole zbieżności $D(a, R)$. Ponadto

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Lemat 4.3 Jeżeli funkcja u jest ciągła i rosnąca, to

$$u(\limsup x_n) = \limsup u(x_n).$$

Wniosek 4.4 $(\exp(z))' = \exp(z)$, $(\cos(z))' = -\sin(z)$, $(\sin(z))' = \cos(z)$.

Wniosek 4.5 $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-a)^{n-k}$.

Wniosek 4.6 $f^{(k)}(a) = k! c_k$, więc

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

5 Równania Cauchy'ego–Riemanna

Jeżeli $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z = x + iy$, to oznaczamy

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv.$$

Twierdzenie 5.1 (Równania Cauchy'ego–Riemanna) Załóżmy, że $f'(z_0)$ istnieje ($z_0 = x_0 + iy_0$).

Wtedy pochodne cząstkowe $\partial u/\partial x(x_0, y_0), \dots, \partial v/\partial y(x_0, y_0)$ istnieją, oraz spełnione są równania Cauchy'ego–Riemanna:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Twierdzenie 5.2 Jeżeli $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ jest taką funkcją, że pochodne cząstkowe $\partial u/\partial x, \dots, \partial v/\partial y$ istnieją, są ciągłe w U , oraz spełniają równania Cauchy'ego–Riemanna w każdym punkcie w U , to funkcja $f(z)$ jest holomorficzną w U .

6 Całkowanie wzdłuż dróg

Definicja. Załóżmy, że $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ jest drogą, zaś $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ funkcja ciągła.

Całkę z funkcji f wzdłuż drogi γ definiujemy jako

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Jeżeli droga jest zamknięta to można użyć symbolu \oint .

Przykład. Jeżeli $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, to

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z}dz = 2\pi i.$$

Fakt 6.1 Załóżmy, że $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczłą, rosnącą klasy C^1 (wtedy $\phi(a_1) = a$, $\phi(b_1) = b$). Przyjmijmy $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$.

Wtedy γ_1 jest drogą o przedziale parametru $[a_1, b_1]$ oraz

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta.$$

Wniosek 6.2 Niech γ_1, γ_2 będą drogami. Jeżeli koniec drogi γ_1 pokrywa się z początkiem drogi γ_2 , to można ustalić przedział parametru tak aby γ_1 oraz γ_2 tworzyły jedną drogę γ . Ponadto

$$\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta.$$

Definicja. Załóżmy, że $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczłą, malejącą klasy C^1 (wtedy $\phi(a_1) = b$, $\phi(b_1) = a$). Drogę $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$, nazywamy drogą przeciwną. Będziemy ją oznaczać symbolem $-\gamma$.

Fakt 6.3 $\gamma^* = (-\gamma)^*$. Początkiem $-\gamma$ jest koniec γ , końcem $-\gamma$ jest początek γ .

$$\int_{-\gamma} f(\zeta)d\zeta = - \int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta.$$

Definicja. Jeżeli $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ jest drogą, to $|\gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ nazywamy *długością drogi* γ .

Jeżeli $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, to $|\gamma| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$.

Wniosek 6.4 Jeżeli $\sup_{z \in \gamma^*} |f(z)| \leq M < \infty$ to

$$\left| \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \right| \leq M |\gamma|.$$

Przykład. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Drogę $\gamma(t) = z_0 + r \exp(it)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, nazywamy *dodatnio zorientowanym okręgiem* o środku z_0 i promieniu r . Będziemy tą drogę oznaczać symbolem $O(z_0, r)$. Ponadto

$$\oint_{O(z_0, r)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Twierdzenie 6.5 Niech γ będzie drogą zamkniętą. Przyjmijmy

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

dla $z \notin \gamma^*$. ($\text{Ind}_{\gamma}(z)$ nazywamy indeksem z względem γ .)

Wtedy $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ jest funkcją o wartościach całkowitych na $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, stałą na każdej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, i równą zero na składowej nieograniczonej zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Wartość $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ jest równa ilości nawinięć γ wokół z w dodatnim kierunku.

Twierdzenie 6.6 (Lokalne Twierdzenie Cauchy'ego) Załóżmy, że $F \in H(U)$ oraz $f = F'$ jest funkcją ciągłą w U . Wtedy

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

dla dowolnej drogi $\gamma : [a, b] \rightarrow U$. Więc

$$\oint_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$$

dla dowolnej drogi zamkniętej γ zawartej w U .

Wniosek 6.7 Jeżeli $n \neq -1$ jest liczbą całkowitą, zaś γ taką drogą zamkniętą że $z_0 \notin \gamma^*$, to

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0.$$

Wniosek 6.8

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z_0).$$

7 Twierdzenie Cauchy'ego

Definicja. Załóżmy, że Ω jest zwartym podzbiorem płaszczyzny \mathbb{C} ograniczonym przez skończoną rodzinę rozłącznych dróg Jordana.

Symbolem $\partial\Omega$ będziemy oznaczać zorientowany brzeg zbioru Ω .

Twierdzenie 7.1 (Tw. Cauchego dla trójkąta) Załóżmy, że

- (a) Δ jest trójkątem domkniętym zawartym w otwartym zbiorze U ,
- (b) $p \in U$,
- (c) f jest ciągłą w U , $f \in H(U \setminus \{p\})$.

Wtedy

$$\oint_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Uwaga. Jeżeli $f \in H(U)$, to tym bardziej $f \in H(U \setminus \{p\})$ oraz f jest ciągła na U , więc założenia powyższego twierdzenia są wtedy spełnione.

Twierdzenie 7.2 (Tw. Cauchy’ego dla wieloboku) *Jeżeli Ω jest zwartym wielobokiem ograniczonym przez skończoną rodzinę dróg Jordana, zawartym w zbiorze otwartym U , oraz $f \in H(U \setminus \{p\})$ jest ciągła na U , to*

$$\oint_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

W szczególności twierdzenie jest spełnione jeżeli $f \in H(U)$.

Definicja. Zbiór spójny otwarty U nazywamy *jednospójnym*, jeżeli dla każdej łamanej zamkniętej zawartej w U zbiór ograniczony przez tę łamaną jest zawarty w U .

Twierdzenie 7.3 (Twierdzenie Jordana) *Zbiór otwarty ograniczony przez drogę Jordana jest jednospójny.*

Twierdzenie 7.4 *Każdy wypukły zbiór otwarty jest jednospójny.*

Twierdzenie 7.5 *Załóżmy, że U jest zbiorem jednospójnym. Jeżeli γ_1, γ_2 są łamanymi mającymi wspólny początek i wspólny koniec, oraz $f \in H(U \setminus \{p\})$ jest ciągła na U , to*

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta.$$

Lemat 7.6 *Niech f będzie funkcją ciągłą na zbiorze otwartym U . Weźmy $z_0 \in U$ oraz koło $D(z_0, r) \subset U$. Dla $z \in D(z_0, r)$ niech $[z_0, z]$ będzie zorientowanym odcinkiem od z_0 do z , oraz niech*

$$G(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Wtedy $G'(z_0) = f(z_0)$.

Twierdzenie 7.7 (Tw. o istnieniu funkcji pierwotnej) Załóżmy, że U jest zbiorem jednospójnym, $f \in H(U \setminus \{p\})$ jest ciągła na U .

Wówczas istnieje $F \in H(U)$ taka, że $F' = f$.

Twierdzenie 7.8 (Tw. Cauchy'ego dla zbioru jednospójnego) Jeżeli U jest zbiorem jednospójnym, $f \in H(U \setminus \{p\})$ jest ciągła na U oraz γ jest drogą zamkniętą w U , to

$$\oint_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Jeżeli γ_1, γ_2 są drogami w U mającymi wspólny początek i wspólny koniec, to

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta.$$

Twierdzenie 7.9 (Twierdzenie Cauchy'ego) Załóżmy, że Ω jest zbiorem zwartym, ograniczonym przez skończoną rodzinę rozłącznych dróg Jordana.

Załóżmy, że $f \in H(\Omega)$. Wtedy

$$\oint_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Wniosek 7.10 Niech γ_1, γ_2 będą takimi rozłącznymi, dodatnio zorientowanymi drogami Jordana, że jedna z nich leży wewnątrz drugiej. Niech Ω będzie zbiorem zwartym ograniczonym przez te krzywe.

Jeżeli $f \in H(\Omega)$, to

$$\oint_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \oint_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta.$$

Twierdzenie 7.11 (Wzór Cauchy'ego dla zbioru jednospójnego) Załóżmy, że γ jest drogą zamkniętą w otwartym zbiorze jednospójnym U , oraz $f \in H(U)$.

Jeżeli $z \in U$ oraz $z \notin \gamma^*$, to

$$f(z) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wniosek 7.12 Jeżeli γ jest dodatnio zorientowaną drogą Jordana w zbiorze jednospójnym U oraz $f \in H(U)$, to wtedy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & , \text{ jeżeli } z \text{ leży wewnątrz } \gamma \\ 0 & , \text{ jeżeli } z \text{ leży na zewnątrz } \gamma \end{cases}$$

Wniosek 7.13 Wartości funkcji $f(z)$ wewnątrz krzywej γ są jednoznacznie wyznaczone przez wartości na γ^* .

Wniosek 7.14 Załóżmy, że γ jest drogą zamkniętą w otwartym zbiorze jednospójnym U , oraz $f \in H(U)$.

Jeżeli $z \in U$ oraz $z \notin \gamma^*$, to

$$f^{(n)}(z) \cdot \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Przykład.

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{(z - \pi/2)^2} dz = -2\pi i.$$

8 Rozwijalność funkcji w szereg potęgowy

Definicja. Funkcja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ jest rozwijalna w szereg potęgowy w U , jeżeli każdemu kołu $D(z_0, r) \subset U$ możemy przyporządkować szereg potęgowy postaci $\sum_0^\infty c_j(z - z_0)^j$ który jest zbieżny do $f(z)$ dla każdego $z \in D(z_0, r)$.

Fakt 8.1 Funkcja rozwijalna w szereg potęgowy jest holomorficzna na U , oraz $f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots$ są holomorficzne na U .

Twierdzenie 8.2 Załóżmy, że $W \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ jest drogą, $\gamma^* \cap W = \emptyset$, oraz f jest funkcją ciągłą na γ^* . Wtedy funkcja

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

jest rozwijalna w szereg potęgowy w W .

Twierdzenie 8.3 Jeżeli $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym oraz $f \in H(U)$, to f jest rozwijalna w szereg potęgowy w U .

Jeżeli $D(z_0, R) \subset U$ to $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ dla $z \in D(z_0, R)$, gdzie

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{O(z_0, r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{j+1}},$$

dla dowolnego $0 < r < R$.

Wniosek 8.4 Jeżeli $f \in H(U)$, to $f', f'', \dots, f^{(k)}, \dots$ są funkcjami holomorficznymi na U .

Wniosek 8.5 Jeżeli $f \in H(U \setminus \{p\})$ jest ciągła na U , to $f \in H(U)$.

Twierdzenie 8.6 (Tw. Morery) Załóżmy, że f jest taką ciągłą funkcją zespoloną na U , że

$$\oint_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$$

dla każdego trójkąta $\Delta \subset U$.

Wtedy $f \in H(U)$.

Lemat 8.7 Jeżeli szereg potęgowy $f(z) = \sum_{j=m}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ ma promień zbieżności R , to szereg

$$g(z) = \sum_{j=m}^{\infty} c_j(z - z_0)^{j-m}$$

też ma promień zbieżności R , oraz $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$.

Twierdzenie 8.8 Jeżeli $f \in H(U)$ oraz $z_0 \in U$, to spełniony jest dokładnie jeden z poniższych warunków

(a) $f \equiv 0$ w pewnym kole $D(z_0, r)$.

(b) Istnieje liczba całkowita $m = m(z_0) \geq 0$ oraz funkcja holomorficzna $g \in H(U)$, takie że

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \text{dla } z \in U$$

oraz $g(z_0) \neq 0$.

Definicja. Liczbę $m(z_0)$ nazywamy *krotnością* (lub *rzędem*) funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 .

- Jeżeli $f \equiv 0$ w $D(z_0, r)$, to $m(z_0) = \infty$.
- Jeżeli $f(z_0) \neq 0$, to $m(z_0) = 0$.
- $m(z_0) = \min\{k \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$.

Wniosek 8.9 $m(z_0) < \infty \Leftrightarrow$

$$\exists r > 0 \quad \forall z \in D'(z_0, r) \quad f(z) \neq 0.$$

9 Zera funkcji analitycznych

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *niespójny*, jeżeli można go przedstawić w postaci sumy niepustych rozłącznych zbiorów $A = A_1 \cup A_2$ takich, że $\bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$ oraz $A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$.

Przykład. $A = (0, 1) \cup (1, 2)$ jest niespójny.

Definicja. $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *spójny*, jeżeli nie jest niespójny.

Fakt 9.1 Zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ jest spójny \Leftrightarrow każde dwa punkty w U można połączyć łamaną zawartą w U .

Fakt 9.2 Jeżeli $\emptyset \neq A$ jest spójny oraz można go przedstawić w postaci sumy $A = A_1 \cup A_2$ takich zbiorów rozłącznych, że $\bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$ oraz $A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$, to $A_1 = \emptyset$ bądź $A_2 = \emptyset$.

Definicja. Punkt p jest *punktem skupienia* zbioru A , jeżeli $D'(p, r) \cap A \neq \emptyset$ dla każdego $r > 0$, lub równoważnie jeżeli istnieje ciąg $(a_n) \subset A \setminus \{p\}$ taki, że $p = \lim a_n$.

Twierdzenie 9.3 Załóżmy, że $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym spójnym, oraz $f \in H(U)$. Niech $Z = f^{-1}(0) = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$. Wtedy spełniony jest dokładnie jeden z poniższych warunków

(a) $Z \equiv U$,

(b) Z jest zbiorem domkniętym w U , nie posiadającym punktów skupienia należących do U , co najwyżej przeliczalnym.

Przykład. $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \sin(1/z)$. Wtedy wprowadzie 0 jest punktem skupienia zbioru Z , ale $0 \notin U$!

Twierdzenie 9.4 *Jeżeli U jest otwartym zbiorem spójnym, $f, g \in H(U)$ oraz istnieje zbiór $A \subset U$ posiadający punkt skupienia w U taki, że $\forall a \in A \quad f(a) = g(a)$, to*

$$\forall z \in U \quad f(z) = g(z).$$

10 ... i pozostałe wnioski

Twierdzenie 10.1 (Nierówność Cauchy'ego) *Jeżeli $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ dla $z \in D(z_0, R)$ oraz $\exists M \quad \forall z \in D(z_0, R) \quad |f(z)| \leq M$ to*

$$|c_j| \leq \frac{M}{R^j} \quad j = 0, 1, \dots$$

Twierdzenie 10.2 (Zasada Maksimum) *Załóżmy, że U jest zbiorem otwartym spójnym, $f \in H(U)$, oraz $\bar{D}(z_0, r) \subset U$. Wtedy*

$$|f(z_0)| \leq \max_t |f(z_0 + re^{it})|,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest stała na U .

Wniosek 10.3 *Jeżeli $|f(z)| \leq M$ dla $z \in D(z_0, R)$ to*

$$|f'(z_0)| = |c_1| \leq \frac{M}{R}$$

(ponieważ $c_j = f^{(j)}(z_0)/j!$).

Definicja. Każdą funkcję $f \in H(\mathbb{C})$ nazywamy *funkcją całkowitą*.

Twierdzenie 10.4 (Tw. Liouville'a) *Funkcja całkowita ograniczona jest stała.*

Twierdzenie 10.5 (Podstawowe Twierdzenie Algebry) *Każdy wielomian $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ różny od stałej ma przynajmniej jeden pierwiastek.*

11 Szeregi Laurenta

Definicja. Jeżeli szeregi $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ oraz $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$ są dla pewnego z zbieżne odpowiednio do $\varphi(z)$ oraz $\psi(z)$, to ich sumę $\varphi(z) + \psi(z)$ oznaczamy symbolem

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$$

i nazywamy *szeregiem Laurenta* w środku z_0 zbieżnym w punkcie z .

Definicja. Szereg $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ nazywamy *rozbieżnym* w punkcie z , jeżeli przynajmniej jeden z szeregów $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ lub $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$ jest rozbieżny w z .

Oznaczmy

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[j]{|c_j|}},$$

$$r = \limsup \sqrt[j]{|c_{-j}|}.$$

Twierdzenie 11.1 Jeżeli $r < R$, to szereg Laurenta jest bezwzględnie zbieżny w każdym punkcie pierścienia kołowego

$$P(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\},$$

i rozbieżny w każdym punkcie $z \notin \overline{P(z_0; r, R)}$.

Funkcja $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j \in H(P(z_0; r, R))$.

Twierdzenie 11.2 Jeżeli $f \in H(U)$ oraz $P(z_0; r, R) \subset U$ dla pewnych $r < R$, to istnieje szereg Laurenta taki, że

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j \quad \text{dla } z \in P(z_0; r, R).$$

Ponadto

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{O(z_0, s)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{j+1}},$$

gdzie promień s jest dowolną liczbą $r < s < R$. (Więc szereg Laurenta jest jednoznacznie wyznaczony, oraz współczynniki c_j nie zależą od wyboru promienia s .)

Przykład. Niech $f(z) = 1/(1 + z^2)$. Wtedy

$$f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \quad \text{gdy } |z| < 1,$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \dots \quad \text{gdy } |z| > 1.$$

12 Punkty osobliwe

Definicja. Niech $f \in H(U)$, i niech $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Jeżeli $z_0 \in U$, to z_0 nazywamy *punktem regularnym* funkcji $f(z)$.
- Jeżeli $z_0 \notin U$ oraz $D'(z_0, r) \subset U$ dla pewnego $r > 0$, to z_0 nazywamy *punktem osobliwym odosobnionym* funkcji $f(z)$. Wtedy

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad \text{dla } z \in D'(z_0, r).$$

- Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$ jest zbieżny w $D(z_0, r)$, i nosi nazwę *części regularnej* funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 .
- Szereg $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j} (z - z_0)^{-j}$ jest zbieżny dla $z \neq z_0$, i nosi nazwę *części osobliwej* funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 .

Przykład. $f = \cos(z) + \sin(1/z)$, $z_0 = \pi$ lub $z_0 = 0$.

- Jeżeli $c_{-1} = c_{-2} = \dots = 0$ to mówimy, że z_0 jest punktem *pozornie osobliwym*, lub że $f(z)$ ma w z_0 *osobliwość usuwalną*.

Przykład. Funkcja $\sin(z)/z$, która jest holomorficzną na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ma w $z_0 = 0$ osobliwość usuwalną.

- Jeżeli $c_{-m} \neq 0$ oraz $c_{-m-1} = c_{-m-2} = \dots = 0$, to z_0 nazywamy *biegunem m -krotnym* lub *biegunem rzędu m* .
- Jeżeli część osobliwa zawiera nieskończenie wiele wyrazów, to z_0 nazywamy *punktem istotnie osobliwym* funkcji $f(z)$.

Przykład.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} z^2 - \frac{1}{6!} z^4 - \dots$$

ma 2-krotny biegun w $z_0 = 0$.

$$f(z) = \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots$$

ma punkt istotnie osobliwy w $z_0 = 0$.

Twierdzenie 12.1 (Tw. Riemanna) *Jeżeli $f \in H(U)$, $D'(z_0, r) \subset U$ oraz $|f(z)|$ jest ograniczona na $D'(z_0, r)$, to*

(a) $V = U \cup \{z_0\}$ jest otwarty,

(b) istnieje $g \in H(V)$ taka, że

$$f(z) = g(z) \quad \text{dla } z \in U.$$

Wniosek 12.2 *Ponieważ $g(z) = \sum_{j=2}^{\infty} c_j(z - z_0)^{j-2}$ oraz $f(z) = g(z)$ dla $z \in D'(z_0, r)$, więc f ma osobliwość usuwalną w z_0 .*

Fakt 12.3 *Założmy, że $f, g \in H(U)$ oraz $z_0 \in U$. Oznaczmy:*

k – krotność $f(z)$ w z_0

ℓ – krotność $g(z)$ w z_0

Iloczyn $f(z) \cdot g(z)$ ma krotność $(k + \ell)$ w z_0 .

Jeżeli $k \geq \ell$ to $h(z) = f(z)/g(z)$ ma punkt pozornie osobliwy w z_0 .

Jeżeli $k < \ell$ to $h(z) = f(z)/g(z)$ ma biegun $(\ell - k)$ -krotny w z_0 .

13 Residua

Niech $f \in H(U)$. Założmy, że $D'(z_0, r) \subset U$ oraz $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ jest rozwinięciem f w szereg Laurenta dla $z \in D'(z_0, r)$.

Definicja. Współczynnik c_{-1} nazywamy *residuum* funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 , i oznaczamy go symbolem

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = c_{-1}.$$

Fakt 13.1 *Residuum można wyrazić za pomocą całki*

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{O(z_0, s)} f(z) dz,$$

gdzie $0 < s < r$.

Jeżeli z_0 jest punktem regularnym lub punktem pozornie osobliwym, to $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.

Fakt 13.2 Jeżeli z_0 jest biegunem 1-krotnym funkcji $f(z)$, to

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

Fakt 13.3 Jeżeli $f, g \in H(U)$, $z_0 \in U$ oraz $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, to

$$\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Fakt 13.4 Jeżeli $f(z)$ posiada biegun krotności 1 w z_0 oraz $g(z_0) \neq 0$, to

$$\operatorname{res}_{z_0}(f(z)g(z)) = \operatorname{res}_{z_0}(f) \cdot g(z_0).$$

Twierdzenie 13.5 (Tw. o Residuach) Załóżmy, że Ω jest zbiorem zwartym ograniczonym przez skończoną rodzinę rozłącznych dróg Jordana. Załóżmy, że punkty z_1, \dots, z_p leżą wewnątrz Ω oraz funkcja $f(z)$ jest holomorphyzna na $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$.

Wtedy

$$\oint_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^p \operatorname{res}_{z_n}(f).$$

Przykład.

$$\oint_{\gamma} \frac{\exp(z) dz}{\sin z} = 2\pi i(1 - e^{\pi}).$$

Fakt 13.6 Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie z_0 biegun co najwyżej k krotny, $k \geq 1$. Wtedy

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

14 Zastosowania reszduów

Całki typu $J = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

$R(x, y)$ jest funkcją wymierną zdefiniowaną na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.
Weźmy standardową parametryzację jednostkowego okręgu $O(0, 1)$:

$$z = z(t) = \exp(it) = \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\frac{1}{z} = \exp(-it) = \cos t - i \sin t$$

$$\cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad \sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$z'(t) = i z(t)$$

$$J = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{O(0,1)} \frac{1}{i z} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) dz$$

Całkę tę należy policzyć korzystając z Twierdzenia o Reszduach.

Przykład.

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2} = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Całki typu $J = \int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt$

Zakładamy, że

- $R(z)$ jest funkcją wymierną,
- $R(z)$ nie ma biegunów na osi rzeczywistej,
- $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zR(z) = 0$
- z_1, \dots, z_p są biegunami $R(z)$ w górnej półpłaszczyźnie.

Wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt = 2\pi i \sum_{n=1}^p \operatorname{res}_{z_n}(R).$$

Przykład.

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^4 + 4} = \frac{\pi}{4}.$$

Twierdzenie 14.1 Niech $P(z), Q(z)$ będą dwoma wielomianami, przy czym $\deg P < \deg Q$ oraz $Q(z) \neq 0$ dla $z \in \mathbb{Z}$. Jeżeli z_1, \dots, z_s są zerami wielomianu Q , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{P(k)}{Q(k)} = -\pi \sum_{m=1}^s \operatorname{res}_{z_m} \left(\operatorname{ctg}(\pi z) \cdot \frac{P(z)}{Q(z)} \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n (-1)^k \cdot \frac{P(k)}{Q(k)} = -\pi \sum_{m=1}^s \operatorname{res}_{z_m} \left(\frac{1}{\sin(\pi z)} \cdot \frac{P(z)}{Q(z)} \right). \quad \square$$

15 Ciągi i szeregi funkcji holomorficzných

Definicja. Ciąg funkcji f_j określonych na otwartym zbiorze U jest *niemal jednostajnie zbieżny* do funkcji f , gdy

$$\forall \text{ zbioru zwartego } K \subset U, \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\exists N \quad \forall z \in K \quad \forall j \geq N \quad |f_j(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Wniosek 15.1 Ciąg funkcji f_j jest *niemal jednostajnie zbieżny* do f wtedy i tylko wtedy, gdy f_j jest *jednostajnie zbieżny* do f na każdym zbiorze zwartym $K \subset U$.

Twierdzenie 15.2 (Tw. Weierstrassa) Załóżmy, że $f_j \in H(U)$ oraz $f_j \rightarrow f$ *niemal jednostajnie*.

Wtedy $f \in H(U)$, oraz $f'_j \rightarrow f'$ *niemal jednostajnie*.

Wniosek 15.3 Jeżeli $f_j \in H(U)$ oraz $f_j \rightarrow f$ *niemal jednostajnie*, to dla każdego $n \geq 1$, $f_j^{(n)} \rightarrow f^{(n)}$ *niemal jednostajnie*.

Definicja Szereg $\sum_1^\infty f_j$ jest *niemal jednostajnie zbieżny*, jeżeli istnieje funkcja s określona na U taka, że ciąg $s_n = f_1 + \dots + f_n$ jest *niemal jednostajnie zbieżny* do s .

Piszemy wtedy

$$s = \sum_{j=1}^{\infty} f_j.$$

Twierdzenie 15.4 Załóżmy, że $f_j \in H(U)$, oraz dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ istnieje ciąg liczb rzeczywistych $b_j \geq 0$ taki, że

$$(1) \sup_{z \in K} |f_j(z)| \leq b_j,$$

$$(2) \sum_1^{\infty} b_j < \infty.$$

Wtedy

(a) szereg $s = \sum_1^{\infty} f_j$ jest niemal jednostajnie zbieżny na U ,

(b) $s \in H(U)$,

(c) dla każdego $n \geq 1$, $s^{(n)} = \sum_1^{\infty} f_j^{(n)}$.

Przykład.

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2}$$

jest funkcją holomorficzną na $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \dots\}$.

ZALECANA LITERATURA

1. J. Chądzyński - *Wstęp do Analizy Zespolonej*
2. J. Chądzyński - *Wstęp do Analizy Zespolonej w zadaniach*
3. F. Leja - *Funkcje Zespolone*
4. W. Rudin - *Analiza Rzeczywista i Zespolona*