1. Przedstawić następujące liczby zespolone w postaci $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^5 \quad , \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 \quad .$$

2. Podać geometryczną interpretację następujacych zbiorów:

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_1| = |z - z_2|\}, \quad z_1 \neq z_2 \ ,$$

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 \leq \mathrm{re}(iz) < 1\} \ ,$$

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ \left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 1 \ \},$$

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ \bar{z} = z^2 \ \} \ .$$

3. Udowodnić:

$$z\bar{z} = |z|^2 \ ,$$

$$|z \pm z'| \geq ||z| - |z'|| \geq |z| - |z'| \ .$$

Na wykładzie zdefiniowano szeregi potęgowe $e^z, \sin z, \cos z$ wzorami:

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ .$$

$$\cos z = 1 \ - \ \frac{z^2}{2!} \ + \ \frac{z^4}{4!} \ - \ \frac{z^6}{6!} \ + \cdots ,$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} \ - \ \frac{z^3}{3!} \ + \ \frac{z^5}{5!} \ - \ \frac{z^7}{7!} \ + \ \cdots .$$

Ponadto udowodniono tam, że $e^{iz} = \ \cos z \ + \ i \sin z \ .$
Widać, że $\cos(-z) = \cos z \ , \ \sin(-z) = -\sin z$.

4. Obliczyć promień zbieżności szeregu $\cos z$.
5. Udowodnić pierwszą z tożsamości:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ .$$

6. Proszę znaleźć wszystkie takie $z \in \mathbb{C}$, że $\cos z = 0$.

7. Obliczyć $\log(-1 + i)$.

8. Rozwiązać równanie $e^{2z+1} = \sqrt{3} + i$.

9. Obliczyć $\sqrt{3 - 5i}$.

10. Obliczyć promień zbieżności szeregu

$$(a) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n z^{3n} \ ,$$

$$(b) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \ .$$

11. Dla $z = x + iy$ znaleźć takie funkcje $u(x, y)$, $v(x, y)$ o wartościach rzeczywistych, że

$$\cos z = \cos(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

12. Podać interpretację geometryczną przekształceń $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0)$.

$$(a) \quad f(z) = b\,, g(z) = az\,, h(z) = az + b\,,$$

$$(b) \quad f(z) = z^3\,,\ g(z) = az^3\,,$$

$$(c) \quad f(z) = \frac{1}{z}\ ,\quad z \neq 0\,,$$

$$(d) \quad f(z) = e^z\,,$$

$$(e) \quad f(z) = \log z\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\,.$$

13. Pokazać, że funkcja $f(z) = |z|^2,\ z \in \mathbb{C}$, ma pochodną zespoloną tylko w $z = 0$.

14. Pokazać, że iloraz różnicowy $\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ z funkcji

$$f(x+iy) = \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}\ ,\ \text{gdy } z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus 0,$$

$$f(0) = 0,$$

dąży do określonej granicy, gdy $z \to 0$ po dowolnej prostej. Pokazać, że funkcja ta nie ma pochodnej w punkcie 0.

15. Sprawdzić, czy funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna:

$a)$ $f(x+iy) = (x^2 - y^2) + 2ixy$,

$b)$ $f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ dla $x+iy \neq 0$,

$c)$ $f(z) = \bar{z}$,

$d)$ $f(z) = \mathrm{Re}(z)$,

$e)$ $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ dla $z \neq 0$, $f(0) = 1$.

16. Wykazać, że funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (o wartościach rzeczywistych) jest funkcją stałą.

17. Pokazać, że jeżeli $f = u + iv$ jest funkcją holomorficzną oraz $f'(z_0) \neq 0$, gdzie $z_0 = x_0 + iy_0$, to wyznacznik jakobianu

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) > 0 \ .$$

18. Pokazać, że jeżeli $f = u + iv$ jest funkcją holomorficzną oraz u, v są klasy C^2, to u, v są funkcjami harmonicznymi, czyli

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ ,$$

$$\triangle v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ .$$

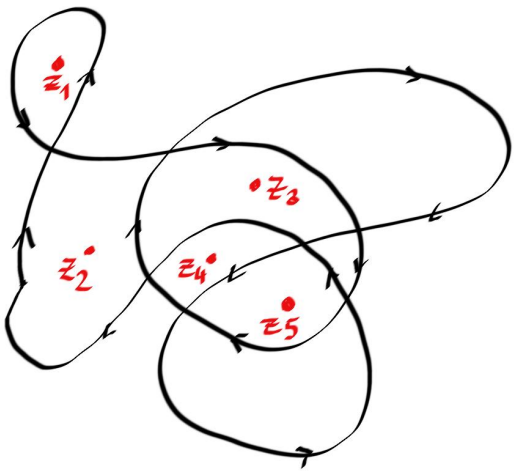
19. Przy danej funkcji $u(x, y)$ znaleźć taką funkcję $v(x, y)$, żeby funkcja $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ była holomorficzna:
a) $u(x, y) = xy$,
b) $u(x, y) = e^y \cos x$.

20. Obliczyć z definicji całkę z funkcji
a) $f(x + iy) = x + iy^2$,
b) $f(z) = z$
wzdłuż dróg C_1 i C_2, gdzie C_1 jest odcinkiem łączącym punkty $z_0 = 0$ i $z_2 = 1 + i$, a C_2 jest łamaną łączącą kolejno punkty $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$.

21. Obliczyć całkę po łuku paraboli $y = x^2$ od $z_1 = (-1, 1)$ do $z_2 = (1, 1)$ z funkcji $f(z) = \mathrm{Im}(z)$.

22 . Obliczyć całkę od $z_1 = i$ do $z_2 = -i$ z funkcji $f(z) = |z|$
a) po odcinku prostoliniowym od z_1 do z_2,
b) po półokręgu $|z| = 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0$.

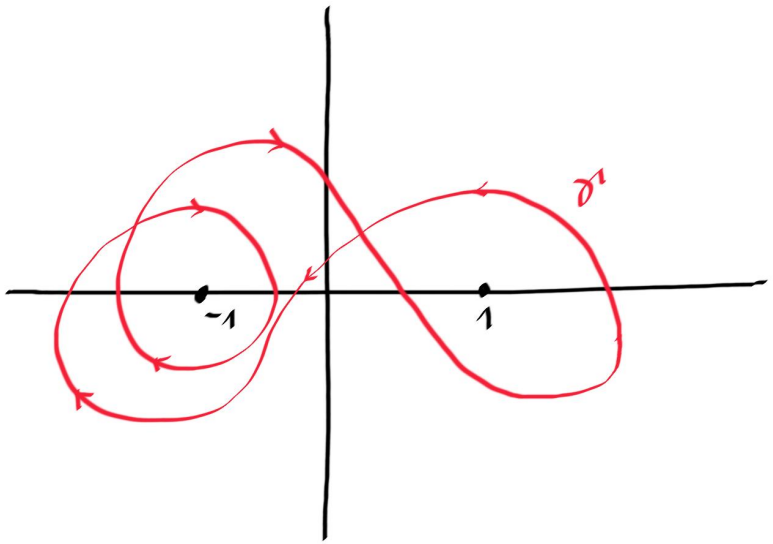
23. Oblicz indeksy $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i),\ i = 1, \ldots, 5$, dla takiej drogi γ i punktów z_i jak na rysunku



24. Oblicz całkę

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2 - 1}$$

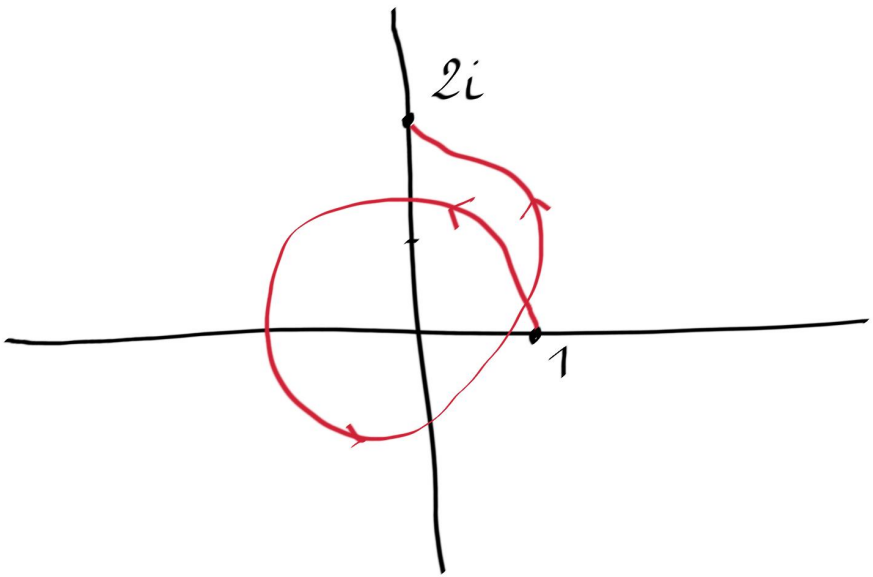
dla takiej drogi jak na rysunku. (Można rozłożyć całkowaną funkcję na sumę dwóch prostszych ułamków.)



25. Oblicz całki wzdłuż takiej drogi γ jak na rysunku

a) $\int_\gamma \cos z \, dz$,

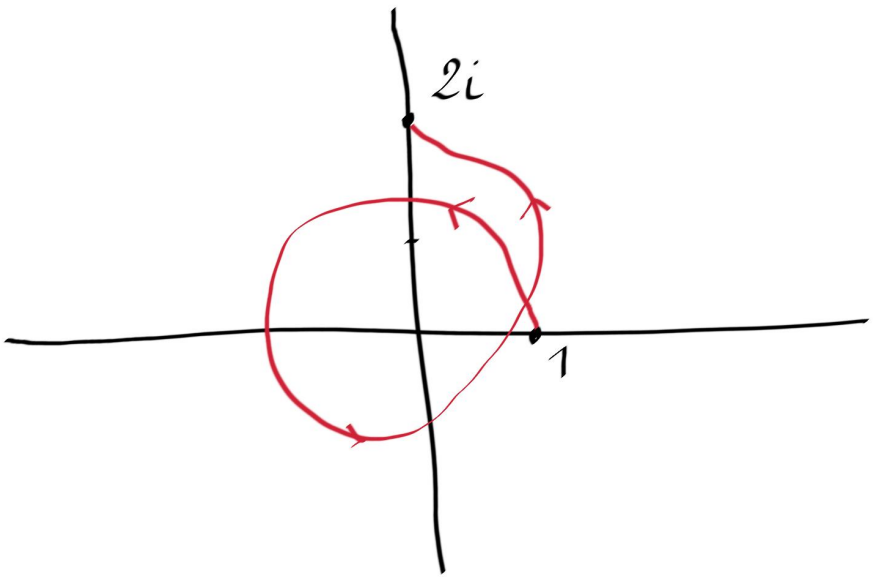
b) $\int_\gamma \frac{dz}{z}$,



25. Oblicz całki wzdłuż takiej drogi γ jak na rysunku

a) $\int_\gamma \cos z \, dz$,

b) $\int_\gamma \frac{dz}{z}$,



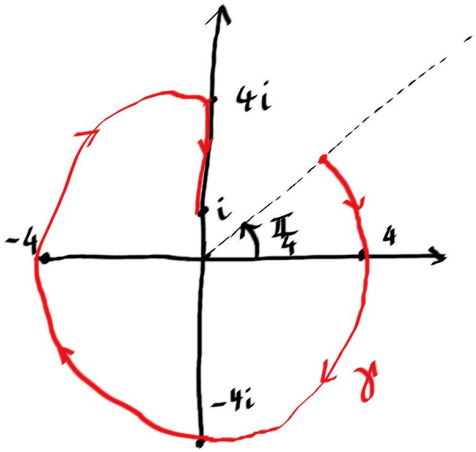
26. Pokazać, że funkcja $f(z) = \frac{1}{z}$ nie ma funkcji pierwotnej w zbiorze $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

27. Obliczyć całki z funkcji $f(z) = \frac{1}{z}$, po:

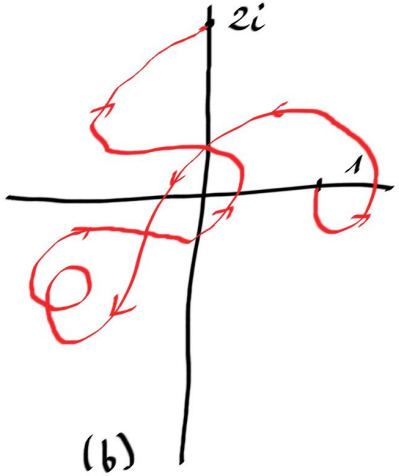
a) łuku dodatnio skierowanego okręgu o środku w 0 i promieniu $r > 0$ od kąta ϕ_1 do kąta ϕ_2, gdzie $\phi_2 > \phi_1$;

b) odcinku na półprostej wychodzącej z 0 , nachylonej do dodatniej półosi rzeczywistej pod kątem ϕ, od punktu oddalonego od 0 o r_1 , do punktu oddalonego od 0 o r_2, gdzie $r_2 > r_1 > 0$.

28. Obliczyć całki z funkcji $f(z) = \frac{1}{z}$ po drogach przedstawionych na rysunku na następnej stronie



(a)



(b)

29. Obliczyć całkę $\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4}$ wzdłuż dodatnio zorientowanej zamkniętej drogi γ która jest brzegiem jednospójnego zbioru otwartego:

a) zawierającego punkt $2i$ i nie zawierającego punktu $-2i$;

b) zawierającego punkt $-2i$ i nie zawierającego punktu $2i$;

c) zawierającego punkt $2i$ oraz punkt $-2i$;

d) nie zawierającego punktu $2i$ ani punktu $-2i$.

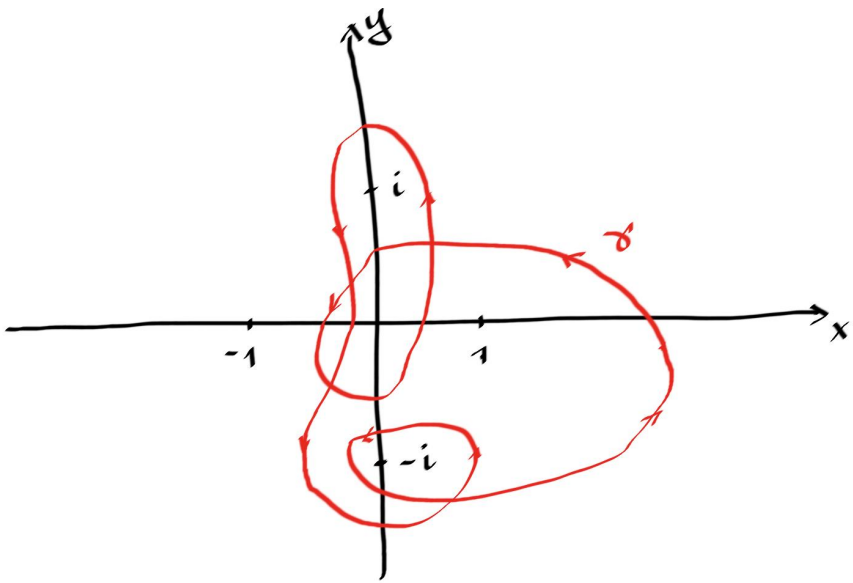
30. Oblicz całki wzdłuż drogi γ z funkcji:

a) $\frac{\sin z}{z}$

b) $\frac{\cos z}{z^2-1}$

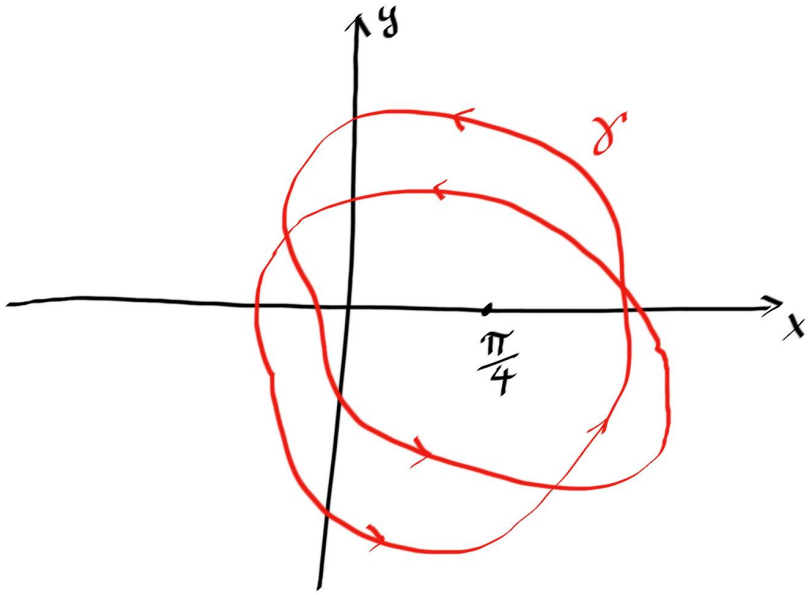
c) $\frac{\cos z}{z^2+1}$

d) $\frac{e^z}{z^2+1}$



31. Obliczyć całkę

$$\oint_\gamma \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{4})^2}\,dz$$



32. Oblicz krotność $m(z_0)$ funkcji $f(z)$ w punkcie $z_0 = 0$, gdy:

a) $f(z) = e^z$

b) $f(z) = e^z - \cos z$

c) $f(z) = \sin z$

d) $f(z) = \cos z - 1$

e) $f(z) = \sin^3 z$

f) $f(z) = (e^z - \cos z) \cdot (\cos z - 1)^2$

33. Koło $D(1,1)$ o środku w punkcie $z_0 = 1$ oraz promieniu $r = 1$ jest zwarte w dziedzinie funkcji $f(z) = \frac{1}{z}$.

Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego, z tego, że $D(1,1) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1| < 1\}$, oraz wykorzystując wzór

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)}$$

proszę przedstawić funkcję $\frac{1}{z}$ w tym kole w postaci szeregu potęgowego

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-1)^j \ .$$

34. Pierścień $P(1;1,\infty)$ o środku w punkcie $z_0 = 1$ oraz promieniach $r = 1$, $R = \infty$ jest zwarty w dziedzinie funkcji $f(z) = \frac{1}{z}$.

Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego, z tego, że

$$P(1;1,\infty) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1| > 1\} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \left|\frac{1}{z-1}\right| < 1\},$$

oraz wykorzystując wzór

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{1}{z-1}}$$

proszę przedstawić funkcję $\frac{1}{z}$ w tym pierścieniu w postaci szeregu Laurenta

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z-1)^j \ .$$

35. Określić typ punktu osobliwego $z = 0$ dla funkcji:

(a) $\frac{\sin^2 z}{z^2}$, (b) $\exp(\frac{1}{z^2})$, (c) $\frac{\exp(z^2)-1}{z^3}$, (d) $z^5 \sin \frac{1}{z}$.

36. Wskazać punkty osobliwe podanych funkcji i określić ich typ:

(a) $\frac{1}{(z-1)^2 z^3}$, (b) $\exp(\frac{1}{z-8})$,

$$\text{(c)} \quad \operatorname{ctg}^2 z = \left(\frac{\cos z}{\sin z}\right)^2 .$$

37. Oblicz residua:

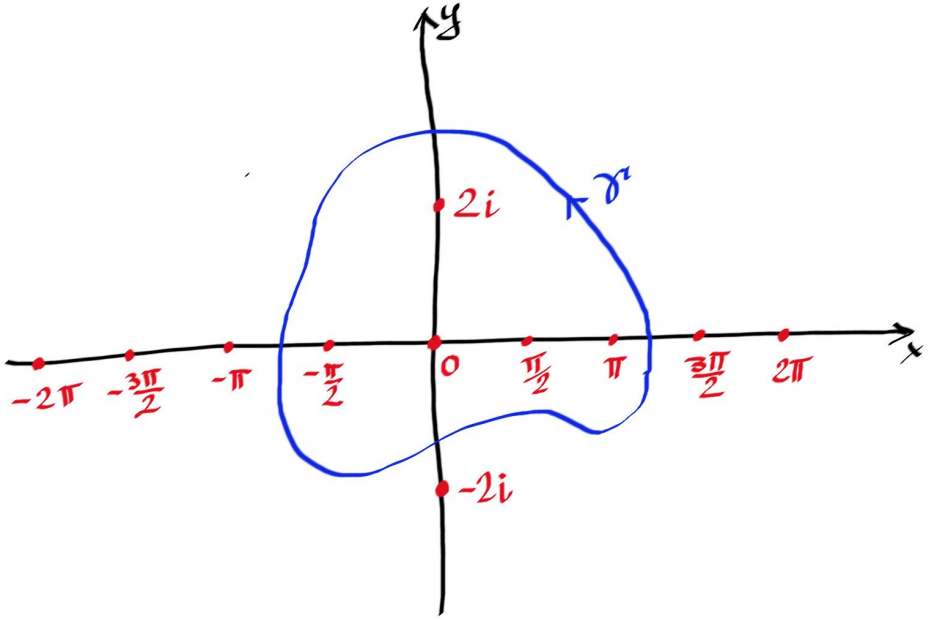
(a) $\operatorname{res}_0 \operatorname{ctg} z$, (b) $\operatorname{res}_0 z \sin(\frac{1}{z})$,

$$\text{(c)} \quad \operatorname{res}_{2i} \frac{1}{(z^2+4)^2} .$$

38. Oblicz całki

$$(a)\quad \oint_\gamma \frac{e^z}{\cos z}\,dz, \qquad (b)\quad \oint_\gamma \operatorname{ctg} z\,dz,$$

$$(c)\quad \oint_\gamma z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \qquad (d)\quad \oint_\gamma \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz.$$



39. Niech $P(z)$, $Q(z)$ będą takimi niezerowymi wielomianami, że

$$2 + \text{stopień}\, P(z) \;\leq\; \text{stopień}\, Q(z)\ ,$$

oraz dana jest funkcja wymierna $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Udowodnić, że

$$(a) \qquad \lim_{|z|\to\infty} z\, R(z) \;=\; 0\ .$$

Jeżeli wielomian $Q(z)$ nie ma pierwiastków będących liczbami całkowitymi, to szeregi

$$(b) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}\ , \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(-k)}{Q(-k)}$$

są bezwzglednie zbieżne, oraz

$$(c) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{P(k)}{Q(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(-k)}{Q(-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)},$$

$$(d) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \frac{P(k)}{Q(k)} \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{P(k)}{Q(k)}.$$

40. Oblicz całki używając twierdzenia o residuach:

$$(a) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\cos t + 3} \ ,$$

$$(b) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+4)} dt \ ,$$

$$(c) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt \ .$$

41. Oblicz sumy szeregów używając Twierdzenie 14.1 oraz wnioski z Zadania 39:

$$(a) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1},$$

$$(b) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1},$$

$$(c) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}.$$