

Analiza Funkcjonalna II

Notatki do wykładu

1 Podstawowe twierdzenia

X, Y – przestrzenie unormowane,

$D(A) \subset X$ – podprzestrzeń będąca dziedziną liniowego operatora A o wartościach w Y .

$R(A) = A(D(A)) \subset Y$ – podprzestrzeń będąca obrazem A .

Definicja. A jest ograniczony, gdy

$$\exists C > 0 \quad |Ax| \leq C|x|, \quad x \in D(A).$$

Twierdzenie 1.1 A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły.

Definicja. $\|A\| = \sup_{x \in D(A), |x| \leq 1} |Ax|$.

Definicja. $B(X, Y)$ – zbiór operatorów ograniczonych, takich że $D(A) = X$.

Twierdzenie 1.2 Jeżeli Y jest przestrzenią Banacha, to $B(X, Y)$ jest przestrzenią Banacha.

Wniosek 1.3 $X^* = B(X, \mathbb{R})$, lub $X^* = B(X, \mathbb{C})$, jest przestrzenią Banacha.

Fakt 1.4 $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Twierdzenie 1.5 (Banacha -Steinhaus) Jeżeli X – przestrzeń Banacha, Y – przestrzeń unormowana, oraz $A_n \in B(X, Y)$, to ciąg $\|A_n\|$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ ciąg $|A_n x|$ jest ograniczony.

Twierdzenie 1.6 Jeżeli (A_n) jest ciągiem operatorów liniowych ograniczonych odwzorowujących przestrzeń Banacha X w przestrzeń unormowaną Y , oraz ciąg $(A_n x)$ jest zbieżny dla każdego $x \in X$, to operator A zdefiniowany równością

$$Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$$

jest operatorem liniowym ograniczonym.

Twierdzenie 1.7 (Tw. Banacha o operatorze odwrotnym) *Jeżeli A jest operatorem liniowym ograniczonym odwzorowującym wzajemnie jednoznacznie przestrzeń Banacha X na przestrzeń Banacha Y , to operator odwrotny A^{-1} też jest ograniczony.*

Liniowy izomorfizm pomiędzy dwiema przestrzeniami Banacha jest więc homeomorfizmem, w szczególności przekształca zbiory otwarte na zbiory otwarte. Można uogólnić to twierdzenie, i udowodnić:

Twierdzenie 1.8 (Tw. o przekształceniu otwartym) *Jeżeli A jest operatorem liniowym ograniczonym odwzorowującym przestrzeń Banacha X na przestrzeń Banacha Y , to A jest przekształceniem otwartym, tzn. przekształca zbiory otwarte na zbiory otwarte.*

Twierdzenie 1.9 (Tw. o domkniętym wykresie) *Jeżeli A jest takim operatorem liniowym odwzorowującym przestrzeń Banacha X w przestrzeń Banacha Y , że wykres A jest domkniętym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$, to A jest operatorem ograniczonym.*

Twierdzenie 1.10 *Założmy, że X, Y są przestrzeniami Banacha, $A \in B(X, Y)$ jest różnowartościowy. (Wtedy istnieje operator odwrotny $A^{-1} : R(A) \rightarrow X$.) Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (1) A^{-1} jest ograniczony,
- (2) $\exists \gamma > 0 \quad \forall x \in X \quad : \quad |Ax| \geq \gamma |x|$,
- (3) Zbiór wartości $R(A)$ operatora A jest domknięty w Y .

Twierdzenie 1.11 *Założmy, że przestrzeń liniowa X jest przestrzenią Banacha z dwiema normami $|x|_1, |x|_2$, oraz $|x_n|_1 \rightarrow 0 \Rightarrow |x_n|_2 \rightarrow 0$. Wtedy $|x_n|_2 \rightarrow 0 \Rightarrow |x_n|_1 \rightarrow 0$, i na odwrót. Więc obie normy są równoważne.*

Twierdzenie 1.12 *Założmy, że X – przestrzeń unormowana, Y – przestrzeń Banacha, $A_0 : D(A_0) \rightarrow Y$ ograniczony, $D(A_0) \subset X$. Jeżeli $\overline{D(A_0)} = X$ to istnieje $A \in B(X, Y)$ taki, że*

- (i) $\forall x \in D(A_0) \quad Ax = A_0x$,
- (ii) $\|A\| = \|A_0\|$.

Czyli operator A_0 daje się rozszerzyć na całą przestrzeń X z zachowaniem normy.

Twierdzenie 1.13 (Tw. Hahna–Banacha) *Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Dla każdego funkcjonatu liniowego ograniczonego f_0 o dziedzinie $D(f_0) \subset X$ istnieje funkcjonat liniowy ograniczony na całej przestrzeni X i taki, że:*

$$(i) f(x) = f_0(x) \text{ dla każdego } x \in D(f_0),$$

$$(ii) \|f\| = \|f_0\| .$$

Fakt 1.14 *Jeżeli przestrzeń X jest unormowana, $0 \neq x_0 \in X$, to istnieje taki $f \in X^*$, że*

$$f(x_0) = \|x_0\| , \quad \|f\| = 1 .$$

Wniosek 1.15 *Jeżeli X jest unormowana, $x_0 \in X$ taki, że*

$$\forall f \in X^* : f(x_0) = 0,$$

to $x_0 = 0$

Wniosek 1.16 *X, Y – niezerowe przestrzenie unormowane. Wtedy $B(X, Y) \neq \{0\}$.*

2 Przestrzenie Hilberta

Definicja. Zespolona przestrzeń liniowa H jest *unitarna*, jeżeli każdej parze $x, y \in H$ można przyporządkować iloczyn skalarny $(x, y) \in \mathbb{C}$, o następujących własnościach

- $(y, x) = \overline{(x, y)}$
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad \alpha \in \mathbb{C}$
- $(x, x) \geq 0$
- $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Wniosek 2.1 $(0, y) = 0$.

Wniosek 2.2 $y \in H$, to $H \ni x \mapsto (x, y) \in \mathbb{C}$ jest \mathbb{C} -liniowe.

Wniosek 2.3 $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$.

Definicja. Dla $x \in H$, definiujemy jego normę $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Oczywiście $|x|^2 = (x, x)$.

Twierdzenie 2.4 (Nierówność Schwarz) $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$.

Ćwiczenia. H z normą $|x|$ jest przestrzenią unormowaną.

Definicja. Jeżeli H jest zupełna, to nazywamy ją *przestrzenią Hilberta*.

Ćwiczenie. $y \in H$, to

$$x \mapsto (x, y), \quad x \mapsto (y, x), \quad x \mapsto |x|$$

są funkcjami ciągłymi.

Definicja. Zbiór $E \subset H$ jest *wypukły*, jeżeli dla każdej pary $x, y \in E$ oraz dla każdej liczby $0 \leq t \leq 1$

$$(1 - t)x + ty \in E$$

Ćwiczenie. Jeżeli E jest wypukły oraz $x \in H$, to

$$E + x = \{y + x \mid y \in E\}$$

jest zbiorem wypukłym.

Definicja.

- x jest *ortogonalny do y* , jeżeli $(x, y) = 0$. Oznaczamy $x \perp y$
- $x^\perp = \{y \in H \mid y \perp x\}$
- $M \subset H$. Wtedy

$$M^\perp = \{y \in H \mid \forall x \in M \quad x \perp y\}.$$

Fakt 2.5 x^\perp, M^\perp są podprzestrzeniami liniowymi. Ponadto

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp.$$

Ćwiczenie. Prawo równoległoboku:

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Twierdzenie 2.6 *Każdy niepusty, domknięty i wypukły podzbiór E przestrzeni Hilberta H zawiera dokładnie jeden element o najmniejszej normie.*

Twierdzenie 2.7 *Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią w przestrzeni Hilberta H . Wtedy*

$$\exists ! \quad P : H \rightarrow M, \quad Q : H \rightarrow M^\perp$$

odwzorowania liniowe, takie że

$$\forall x \quad x = Px + Qx.$$

Ponadto,

$$(1) \text{ jeżeli } x \in M, \text{ to } Px = x, Qx = 0$$

$$(2) \text{ jeżeli } x \in M^\perp, \text{ to } Px = 0, Qx = x$$

$$(3) |x - Px| = \inf\{|x - y| \mid y \in M\}$$

$$(4) |x|^2 = |Px|^2 + |Qx|^2, \text{ więc } \|P\| \leq 1 \text{ oraz } \|Q\| \leq 1.$$

Definicja. Niepusty podzbiór A unitarnej podprzestrzeni H nazywamy *układem ortogonalnym*, gdy $0 \notin A$ oraz

$$\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow x \perp y.$$

Jeżeli ponadto $|x| = 1$ dla każdego $x \in A$, to mówimy o układzie *ortonormalnym*.

Przykład. W $L^2(-\pi, \pi)$ układ:

- $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \dots$ jest ortogonalny,
- $1/\sqrt{2\pi}, \cos t/\sqrt{\pi}, \sin t/\sqrt{\pi}, \cos 2t/\sqrt{\pi}, \sin 2t/\sqrt{\pi}, \cos 3t/\sqrt{\pi}, \dots$ jest ortonormalny.

Twierdzenie 2.8 *Jeżeli A jest układem ortogonalnym w ośrodkowej przestrzeni unitarnej, to A jest co najwyżej przeliczalny.*

Fakt 2.9 *Jeżeli x_1, \dots, x_n jest układem ortogonalnym, to x_1, \dots, x_n są liniowo niezależne.*

Twierdzenie 2.10 (Schmidta o ortogonalizacji) Załóżmy, że $(x_n)_1^\infty$ jest takim ciągiem, że każdy skończony układ x_1, \dots, x_k jest liniowo niezależny.

Wtedy istnieje dokładnie jedna macierz trójkątna nieskończona

$$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \dots \end{matrix}$$

taka, że $a_{nn} > 0$, oraz

$$\begin{matrix} y_1 = a_{11}x_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ \dots \end{matrix}$$

tworzą układ ortonormalny.

Fakt 2.11 Jeżeli $(x_n)_1^\infty$ jest układem ortogonalnym oraz $x = \sum_1^\infty c_n x_n$, to $c_n = (x, x_n)/|x|^2$.

Definicja. Niech $(x_n)_1^\infty$ będzie układem ortogonalnym, oraz $x \in H$. Wtedy liczby $c_n = (x, x_n)/|x_n|^2$ nazywamy współczynnikami Fouriera elementu x względem układu $(x_n)_1^\infty$.

Twierdzenie 2.12 (O własności minimum współczynników Fouriera) Niech $x \in H$. Załóżmy, że x_1, \dots, x_n tworzą układ ortogonalny.

Funkcja

$$f(a_1, \dots, a_n) = \left| x - \sum_{k=1}^n a_k x_k \right|^2$$

osiąga najmniejszą wartość wtedy i tylko wtedy, gdy a_1, \dots, a_n są współczynnikami Fouriera x względem x_1, \dots, x_n . Przy tym

$$\inf_{a_1, \dots, a_n} \left| x - \sum_1^n a_k x_k \right|^2 = |x|^2 - \sum_1^n |c_k|^2 |x_k|^2.$$

Wniosek 2.13 Jeżeli układ $(x_n)_1^\infty$ jest ortogonalny, $c_k = (x, x_k)/|x_k|^2$, to

(1)

$$\left| x - \sum_1^n c_k x_k \right|^2 = |x|^2 - \sum_1^n |c_k|^2 |x_k|^2,$$

(2)

$$x = \sum_1^{\infty} c_k x_k \Leftrightarrow |x|^2 = \sum_1^{\infty} |c_k|^2 |x_k|^2.$$

Wniosek 2.14 (Nierówność Bessela) Jeżeli $(x_k)_1^{\infty}$ jest układem ortogonalnym oraz $(c_k)_1^{\infty}$ są współczynnikami Fouriera dla elementu x to

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 |x_k|^2 \leq |x|^2.$$

Wniosek 2.15 Jeżeli $(x_k)_1^{\infty}$ jest układem ortonormalnym, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq |x|^2.$$

Twierdzenie 2.16 (Riesz–Fischera) Jeżeli $(x_k)_1^{\infty}$ jest układem ortogonalnym w przestrzeni Hilberta H oraz

$$\sum_1^{\infty} |c_k|^2 |x_k|^2 < \infty,$$

to istnieje $x \in H$, taki że $c_k = (x, x_k)/|x_k|^2$, $x = \sum_1^{\infty} c_k x_k$ oraz

$$|x|^2 = \sum_1^{\infty} |c_k|^2 |x_k|^2.$$

Definicja. Układ $(x_k)_1^{\infty}$ elementów ośrodkowej przestrzeni Hilberta H nazywamy

- *zupełnym*, gdy warunek $\forall k (x, x_k) = 0$ pociąga $x = 0$,
- *zamkniętym*, gdy

$$\forall x \in H \quad \exists y_n = \sum_{k=1}^n a_{kn} x_k$$

taki, że $|y_n - x| \rightarrow 0$, czyli $y_n \rightarrow x$.

Twierdzenie 2.17 Niech $(x_k)_1^{\infty}$ będzie układem ortogonalnym w ośrodkowej przestrzeni Hilberta H . Następujące warunki są równoważne:

- (1) jeżeli $c_k = (x, x_k)/|x_k|^2$ to $|x - \sum_1^n c_k x_k| \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$, czyli $x = \sum_1^{\infty} c_k x_k$,

(2) układ (x_k) jest zupełny,

(3) układ (x_k) jest zamknięty,

(4) dla każdego $x \in H$ zachodzi tożsamość Parsewala

$$\sum_1^{\infty} |c_k|^2 |x_k|^2 = |x|^2,$$

(5) dla każdej pary $x, y \in H$ zachodzi uogólniona tożsamość Parsewala

$$\sum_1^{\infty} c_k \bar{d}_k |x_k|^2 = (x, y),$$

gdzie c_k są współczynnikami Fouriera dla x , zaś d_k dla y .

Twierdzenie 2.18 Niech $(x_k)_1^{\infty}$ będzie takim ciągiem w ośrodkowej przestrzeni Hilberta, że każdy skończony układ x_1, \dots, x_n jest liniowo niezależny. Niech $(y_k)_1^{\infty}$ będzie układem ortonormalnym uzyskanym w procesie Schmidta.

Układ (x_k) jest zamknięty wtedy i tylko wtedy, gdy (y_k) jest zamknięty.

Twierdzenie 2.19 W każdej ośrodkowej przestrzeni Hilberta istnieje przeliczalny układ ortonormalny zupełny.

Ćwiczenie. H – ośrodkowa przestrzeń Hilberta, to $H \simeq \ell^2$.

Ćwiczenie. Jeżeli (x_k) jest zupełnym układem ortonormalnym oraz

$$x = \sum_1^N c_k x_k + \sum_{N+1}^{\infty} c_k x_k,$$

to składniki sumy są wzajemnie prostopadłe.

Ponadto $|\sum_1^N c_k x_k| \leq |x|$ oraz $|\sum_{N+1}^{\infty} c_k x_k| \leq |x|$.

3 Kryteria zwartości

Definicja. Zbiór Z jest warunkowo zwarty w przestrzeni metrycznej X jeżeli

$$\forall (x_n)_1^{\infty} \subset Z \quad \exists x \in X \quad \exists \phi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N} \quad x = \lim x_{\phi(n)}.$$

- Z jest warunkowo zwarty w X wtedy i tylko wtedy, gdy \bar{Z} jest zwarty.
- Zbiór warunkowo zwarty w X jest ograniczony.

Twierdzenie 3.1 (Bolzano–Weierstrassa) *Jeżeli X jest skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, to Z jest warunkowo zwarty w $X \Leftrightarrow Z$ jest ograniczony.*

Lemat 3.2 (Lemat Riesz) *Niech X_0 będzie domkniętą właściwą podprzestrzenią liniową unormowanej przestrzeni X*

Wtedy

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists y \in X \quad |y| = 1 \quad \text{oraz} \quad \forall x \in X_0 \quad |y - x| \geq 1 - \epsilon.$$

Fakt 3.3 *W każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej X istnieją zbiory ograniczone, które nie są warunkowo zwarte w X . Przykładem jest dowolna kula.*

Twierdzenie 3.4 (Hausdorffa) *Podzbiór Z przestrzeni metrycznej zupełnej X jest warunkowo zwarty w X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje skończona ϵ -sieć dla zbioru Z . (Elementy sieci są podzbiorem X .)*

Twierdzenie 3.5 (Ascoli) *Zbiór funkcji $Z \subset C(\Omega)$ (Ω jest zbiorem zwartym) jest warunkowo zwarty w $C(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje ze zbioru Z są wspólnie ograniczone i jednakowo ciągłe, tzn.*

- $\exists M \quad \forall f \in Z \quad \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq M$
- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ *takie, że* $\forall f \in Z$ *oraz* $\forall x_1, x_2 \in \Omega$

$$d(x_1, x_2) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Twierdzenie 3.6 (Kryterium zwartości w przestrzeniach Hilberta) *Niech $(e_k)_1^\infty$ będzie układem ortonormalnym zupełnym w przestrzeni Hilberta H .*

Zbiór $Z \subset H$ jest warunkowo zwarty w $H \Leftrightarrow Z$ jest ograniczony i szereg Fouriera $\sum_1^\infty (x, e_k)e_k$ jest na zbiorze Z jednostajnie zbieżny do x , tzn.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in Z$$

$$\left| x - \sum_1^n (x, e_k)e_k \right| = \left| \sum_{n+1}^\infty (x, e_k)e_k \right| \leq \epsilon.$$

4 Operatory sprzężone i samosprzężone

Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta, oraz niech $A \in B(H, H) = B(H)$.

Definicja. Dla $y \in H$ istnieje dokładnie jeden $A^*y \in H$ taki, że

$$\forall x \in H \quad (Ax, y) = (x, A^*y).$$

Definicja. A^* – operator sprzężony z A .

Fakt 4.1 $A^* \in B(H)$, oraz $\|A^*\| = \|A\|$.

Ćwiczenie.

- $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$
- $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$
- $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$

Definicja. $A \in B(H)$ jest *samosprzężony*, gdy $A^* = A$, czyli

$$\forall x, y \in H \quad (Ax, y) = (x, Ay).$$

W takim przypadku, dla dowolnego $x \in H$, $(Ax, x) \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4.2 *Jeżeli A jest samosprzężonym operatorem w przestrzeni Hilberta, to*

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |(Ax, x)|.$$

Ćwiczenie. Jeżeli $A \in B(H)$ jest samosprzężony, to

$$\|A^2\| = \|A\|^2.$$

5 Operatory pełnościągłe

Definicja. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. $A : X \rightarrow Y$ jest operatorem *zwartym* lub *pełnościągłym*, jeżeli dla każdego zbioru ograniczonego $Z \subset X$ zbiór $A(Z)$ jest warunkowo zwarty w Y . tzn. dla każdego ciągu ograniczonego $(x_n)_1^\infty$ w X z ciągu $(Ax_n)_1^\infty$ można wybrać podciąg zbieżny w Y .

Fakt 5.1 *Operatory pełnociągłe są ograniczone.*

Przykład. Jeżeli $\dim X = \infty$ to operator identycznościowy $I : X \rightarrow X$ jest ograniczony, ale nie jest pełnociągły.

Definicja. Operator $A : X \rightarrow Y$ jest *skończenie wymiarowy* gdy $\dim R(A) < \infty$.

Ćwiczenie. Operator ograniczony, skończenie wymiarowy jest pełnociągły.

Ćwiczenie. Jeżeli A_1, A_2 są pełnociągłe, to $A_1 + A_2$ oraz αA_1 też są pełnociągłe.

Twierdzenie 5.2 *Jeżeli X jest unormowana, Y jest przestrzenią Banacha, $A_n : X \rightarrow Y$ są operatorami pełnociągłymi oraz $A_n \rightarrow A$, to A też jest pełnociągły.*

Wniosek 5.3 *Jeżeli $A_n \rightarrow A$, A_n są ograniczone oraz skończenie wymiarowe, to A jest pełnociągły.*

Twierdzenie 5.4 *Załóżmy, że X jest unormowana, H jest ośrodkową przestrzenią Hilberta nieskończonego wymiaru. Wtedy każdy operator pełnociągły $A : X \rightarrow H$ jest granicą ciągu operatorów skończenie wymiarowych (A_n) postaci*

$$A_n x = \sum_{k=1}^n (Ax, e_k) e_k,$$

gdzie $(e_k)_1^\infty$ jest zupełną bazą ortonormalną.

Twierdzenie 5.5 *Jeżeli $A \in B(H)$ (H - przestrzeń Hilberta) jest pełnociągły to A^* jest też pełnociągły.*

6 Spektrum

Niech X - przestrzeń Banacha, $A \in B(X)$.

Definicja. $\lambda \in \mathbb{C}$ jest *wartością regularną* operatora A , jeżeli

$$\forall y \in X \quad \exists! x \in X \quad Ax - \lambda x = y,$$

czyli operator $A_\lambda = A - \lambda I : X \rightarrow X$ jest wzajemnie jednoznaczny.

Dzięki Twierdzeniu Banacha, A_λ^{-1} jest wtedy ograniczony.

Definicja. $\rho(A) = \{\lambda \mid \lambda - \text{wartość regularna } A\}$ nazywamy *zbiorem rezolwenty* operatora A .

Definicja. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ nazywamy *spektrum* lub *widmem* operatora A .

Definicja. λ jest *wartością własną* A jeżeli istnieje $x \neq 0$ taki że $Ax - \lambda x = 0$. Wektor x nazywamy *wektorem własnym* odpowiadającym λ .

Domknięty zbiór $X_\lambda(A) = \{x \mid Ax - \lambda x = 0\}$ nazywamy *podprzestrzenią własną* odpowiadającą λ .

Fakt 6.1 *Wartości własne należą do spektrum.*

Lemat 6.2 *Jeżeli $\|A\| < 1$ to*

$$\forall y \in X \quad \exists! x \in X \quad x - Ax = y ,$$

czyli operator $I - A : X \rightarrow X$ jest wzajemnie jednoznaczny.

Punkt x jest sumą szeregu Neumanna

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} A^n y .$$

Lemat 6.3 *Jeżeli $\|A\| < 1$ to $I - A : X \rightarrow X$ jest wzajemnie jednoznaczny, $(I - A)^{-1}$ jest ograniczony oraz*

$$\| (I - A)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} .$$

Lemat 6.4 $U, U_n \in B(X)$, $U_n \rightarrow U$. Załóżmy, że U jest wzajemnie jednoznaczny:

$$\forall y \quad \exists! x \quad Ux = y .$$

Wtedy

$$(1) \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall y \quad \exists! x \quad U_n x = y ,$$

czyli te operatory U_n są wzajemnie jednoznaczne,

(2) jeżeli $y_n \rightarrow y_0$ to ciąg (x_n) rozwiązań $U_n x_n = y_n$ ($n \geq N$) jest zbieżny do rozwiązania $x_0: U x_0 = y_0$.

Twierdzenie 6.5 Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, $A \in B(X)$. Wtedy $\sigma(A)$ jest zbiorem domkniętym zawartym w kole

$$\{\lambda \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$$

na płaszczyźnie zespolonej (lub w przedziale $[-\|A\|, \|A\|]$ jeżeli X jest przestrzenią rzeczywistą.)

Twierdzenie 6.6 Niech X będzie przestrzenią Banacha, $A \in B(X)$ pełnociągły.

- (1) Jeżeli $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$ to λ jest wartością własną operatora A .
- (2) Jeżeli $\lambda \neq 0$ jest wartością własną to $\dim X_\lambda(A) < \infty$.
- (3) Zbiór wartości własnych A jest co najwyżej przeliczalny. Jedynie $\lambda = 0$ może być punktem skupienia wartości własnych.
- (4) Jeżeli $\lambda \neq 0$ jest wartością własną A to istnieje y , dla którego równanie

$$Ax - \lambda x = y$$

nie ma rozwiązań w X .

Lemat 6.7 Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Załóżmy, że $\lambda \neq 0$ jest wartością własną pełnociągłego operatora $A \in B(H)$. Niech (e_1, \dots, e_m) będzie bazą ortonormalną przestrzeni własnej $X_\lambda(A)$. Jeżeli $\bar{\lambda}$ jest wartością własną A^* oraz (f_1, \dots, f_n) jest a bazą ortonormalną przestrzeni $X_{\bar{\lambda}}(A^*)$, $m \leq n$ oraz

$$Rx = Ax - \sum_{k=1}^m (x, e_k) f_k$$

to λ jest wartością regularną operatora R .

Twierdzenie 6.8 Niech H będzie przestrzenią Hilberta. $\lambda \neq 0$ jest wartością własną operatora pełnociągłego A wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{\lambda}$ jest wartością własną A^* . Wymiary podprzestrzeni własnych są równe.

Twierdzenie 6.9 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Jeżeli $\lambda \neq 0$ jest wartością własną operatora pełnociągłego A , to równanie*

$$Ax - \lambda x = y$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy y jest ortogonalny do podprzestrzeni $X_{\bar{\lambda}}(A^)$.*

Wniosek 6.10 *Spektrum, (a więc również zbiór wartości własnych) operatora skończenie wymiarowego jest co najwyżej skończony.*

7 Widmo operatora samosprężonego

Lemat 7.1 Niech H będzie przestrzenią Hilberta, $A \in B(H)$ operatorem samosprężonym. Liczba λ jest wartością regularną A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall x \quad |Ax - \lambda x| \geq \gamma|x|.$$

Twierdzenie 7.2 Widmo operatora samosprężonego $A \in B(H)$ zawiera się w przedziale $[c, C]$ na osi rzeczywistej, gdzie

$$c = \inf_{|x|=1} (Ax, x), \quad C = \sup_{|x|=1} (Ax, x).$$

Liczby c, C należą do widma.

Twierdzenie 7.3 Widmo operatora samosprężonego $A \in B(H)$ jest zbiorem niepustym, i należy do niego taka liczba λ , że $|\lambda| = \|A\|$.

Twierdzenie 7.4 Podprzestrzenie własne odpowiadające różnym wartościom własnym operatora samosprężonego $A \in B(H)$ są ortogonalne.

Wniosek 7.5 Każdy niezerowy operator samosprężony pełnociągły $A \in B(H)$ ma przynajmniej jedną niezerową wartość własną (taką, że $|\lambda| = \|A\|$).

Wszystkie różne od zera wartości własne operatora A można ustawić w różnowartościowy ciąg (ν_n) (skończony, lub nieskończony zbieżny do zera), taki że $|\nu_1| \geq \dots \geq |\nu_n| \geq \dots$. W kolejnych skończonych wymiarowych podprzestrzeniach własnych wybierzmy bazy ortonormalne. W ten sposób określimy ciąg wektorów własnych (e_k) będący układem ortonormalnym – nazywany *pełnym układem ortonormalnym wektorów własnych operatora A* . Każdemu elementowi e_k odpowiada wartość własna λ_k . (Ciąg (λ_k) może nie być różnowartościowy!)

Twierdzenie 7.6 Niech (e_k) będzie pełnym układem ortonormalnym elementów własnych operatora samosprężonego pełnociągłego $A \in B(H)$. Wtedy

$$\forall x \quad \exists! x_0 \quad Ax_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad x = x_0 + \sum_k (x, e_k) e_k.$$

Twierdzenie 7.7 (Twierdzenie Hilberta) *Jeżeli H jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, a (e_k) – pełnym układem ortonormalnym elementów własnych operatora samosprężonego pełnociągłego $A \in B(H)$, to w H istnieje układ ortonormalny zupełny złożony z układu (e_k) i pewnego układu $(e_{k,0})$ elementów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda = 0$ (jeżeli 0 jest wartością własną).*

Twierdzenie 7.8 *Jeżeli H jest przestrzenią Hilberta, (e_k) – pełnym układem ortonormalnym elementów własnych operatora samosprężonego pełnociągłego A , a (λ_k) – ciągiem wartości własnych, to dla każdego $x \in H$*

$$Ax = \sum_k \lambda_k (x, e_k) e_k$$

Wniosek 7.9 *Samosprężony pełnociągły operator ma skończoną ilość wartości własnych wtedy i tylko wtedy, gdy jest skończenie wymiarowy.*

Twierdzenie 7.10 *Niech H – przestrzeń Hilberta, (e_k) – pełny układ ortonormalny wektorów własnych samosprężonego pełnociągłego operatora A . Następujące warunki są równoważne:*

- (1) *Układ (e_k) jest zupełny.*
- (2) *Operator A jest odwracalny (czyli różnowartościowy).*
- (3) *Zbiór wartości operatora A jest gęsty w H .*

Fakt 7.11 *Jeżeli $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq \lambda_k$ dla każdego k , to równanie $Ax - \lambda x = y$ ma dla każdego y dokładnie jedno rozwiązanie*

$$x = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} (y, e_k) e_k - y \right).$$

Fakt 7.12 *Jeżeli $\lambda = \lambda_r = \dots = \lambda_s$, to $Ax - \lambda x = y$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $(y, e_k) = 0$ dla $r \leq k \leq s$. Rozwiązanie ma postać*

$$x = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_k^* \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} (y, e_k) e_k - y \right) + \sum_{k=r}^s \alpha_k e_k$$

gdzie w sumie \sum_k^ pomijamy wszystkie indeksy k takie, że $r \leq k \leq s$, oraz α_k są dowolnymi liczbami.*

Lemat 7.13 Dla każdego $x \in H$ zachodzi wzór:

$$(Ax, x) = \sum \lambda_k |(x, e_k)|^2.$$

Definicja. Samosprężony operator $A \in B(H)$ jest dodatni, jeżeli $A \neq 0$ oraz

$$(Ax, x) \geq 0 \text{ dla każdego } x \in H.$$

Wniosek 7.14 Pełnociągły samosprężony operator $A \in B(H)$ jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $A \neq 0$ i wszystkie różne od zera wartości własne A są dodatnie.

Wniosek 7.15 Jeżeli $A \in B(H)$ jest samosprężony, pełnociągły, dodatni to

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} (Ax, x) = (Ae, e) = \lambda,$$

gdzie λ jest największą wartością własną operatora A , zaś e – dowolnym odpowiadającym jej wektorem własnym takim, że $|e| = 1$.

8 Twierdzenia o punktach stałych

Fakt 8.1 Załóżmy, że K jest zbiorem wypukłym, $x_1, \dots, x_j \in K$, wszystkie $\alpha_i \geq 0$, oraz $\alpha_1 + \dots + \alpha_j = 1$.

Wtedy $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_j x_j \in K$.

Twierdzenie 8.2 (Twierdzenie Brouwera) Jeżeli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty, wypukły, niepusty; odwzorowanie $f : K \rightarrow K$ jest ciągłe, to f posiada punkt stały (w zbiorze K).

Przykład. Niech B będzie domkniętą kulą jednostkową w przestrzeni ℓ^2 . Zdefiniujmy $f : B \rightarrow B$ wzorem:

$$f(x) = (\sqrt{1 - |x|^2}, x_1, x_2, \dots).$$

f jest ciągłe, ale nie ma punktów stałych.

Definicja. Niech F będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni Banacha X . Ciągłe odwzorowanie $f : F \rightarrow X$ jest *zwarte*, jeżeli dla każdego ograniczonego podzbioru $A \subset F$, zbiór $f(A)$ jest warunkowo zwarty w X .

Twierdzenie 8.3 Niech K będzie domkniętym, ograniczonym podzbiorem przestrzeni Banacha X . Jeżeli przekształcenie $f : K \rightarrow X$ jest zwarte, to istnieje ciąg odwzorowań ciągłych $f_n : K \rightarrow X$ takich, że

- (1) $f_n(K)$ są zawarte w podprzestrzeniach liniowych skończonego wymiaru,
- (2) $f_n \rightarrow f$ jednostajnie na zbiorze K .

Twierdzenie 8.4 (Twierdzenie Schaudera o punkcie stałym) Niech K będzie domkniętym, wypukłym, ograniczonym, niepustym podzbiorem przestrzeni Banacha X . Załóżmy, że $f : K \rightarrow K$ jest przekształceniem zwartym.

Wtedy f posiada punkt stały (w zbiorze K).

9 Algebry Banacha

Definicja. Przestrzeń zespoloną Banacha A z łącznym i rozdzielnym mnożeniem, tj.

$$x(yz) = (xy)z$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(y + z)x = yx + zx$$

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

takim, że

$$|xy| \leq |x| \cdot |y|$$

nazywamy *algebrą Banacha*.

Przykłady.

- $A = C(\Omega)$ (Ω – zwarty) z normą "supremum" i zwykłym mnożeniem jest *przemienną* algebrą Banacha z *jednością*.
- $A = C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ z normą "supremum" jest algebrą Banacha bez jedności.
- Jeżeli X jest przestrzenią Banacha, to $A = B(X, X)$ ze zwykłą normą dla operatorów jest *nieprzemienną* algebrą Banacha z jednością I .
- $A = L^1(\mathbb{R})$ z mnożeniem danym przez *splot*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt$$

jest *przemienną* algebrą Banacha bez jedności.

Definicja. *Homomorfizmem zespolonym* nazywamy taką funkcję $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$, że

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y)$$

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

Twierdzenie 9.1 $|\phi| \leq 1$.

Fakt 9.2 Jeżeli e jest jednością w A , ϕ jest niezerowym homomorfizmem zespolonym, to $\phi(e) = 1$ oraz $\phi(x) \neq 0$ dla każdego odwracalnego elementu $x \in A$.

Fakt 9.3 Jeżeli $x \in A$ oraz $|x| < 1$, to

- (1) $e - x$ jest odwracalny,
- (2) $|(e - x)^{-1} - e - x| \leq |x|^2/(1 - |x|)$,
- (3) $|\phi(x)| < 1$ dla każdego homomorfizmu zespolonego ϕ .

Lemat 9.4 Niech f będzie całkowitą funkcją holomorficzną, taką że $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, oraz

$$0 < |f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

Wówczas $f(\lambda) \equiv 1$.

Twierdzenie 9.5 (Gleason–Kahane–Żelazko) Niech $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcjonalem liniowym, takim że $\phi(e) = 1$, oraz $\phi(x) \neq 0$ dla każdego elementu odwracalnego x .

Wówczas $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, czyli ϕ jest zespolonym homomorfizmem.

Twierdzenie 9.6 Dla każdego niezerowego homomorfizmu zespolonego ϕ na $L^1(\mathbb{R})$ istnieje dokładnie jedna liczba $t \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\phi(f) = \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt} dx.$$

Twierdzenie 9.7 (Gelfanda–Mazura) Jeżeli A jest zespoloną algebrą Banacha z jednością, w której każdy różny od zera element jest odwracalny, to A jest izometrycznie izomorficzna z \mathbb{C} .

10 Dystrybucje

Definicja.

- Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wtedy $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazywamy *wielowskaźnikiem* o normie $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

- Jeżeli $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to zbiór

$$\text{supp } \phi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) \neq 0\}}$$

nazywamy *nośnikiem* funkcji ϕ .

- $\mathcal{D} = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } \phi \text{ jest zwarty}\}$ nazywamy przestrzenią *funkcji próbnych*.
- Jeżeli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty, to

$$\mathcal{D}_K = \{\phi \in \mathcal{D} \mid \text{supp } \phi \subset K\}.$$

- Niech $(\phi_j)_1^\infty \subset \mathcal{D}$. Mówimy, że $\phi_j \rightarrow 0$, jeżeli istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$, taki że

$$\forall j \quad \text{supp } \phi_j \subset K,$$

oraz dla dowolnego wielowskaźnika α

$$D^\alpha \phi_j \rightarrow 0$$

jednostajnie na zbiorze K .

- Ciąg $\phi_j \in \mathcal{D}$ jest zbieżny do $\phi \in \mathcal{D}$, jeżeli

$$\phi_j - \phi \rightarrow 0$$

.

- *Dystrybucją* nazywamy takie liniowe odwzorowanie $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, że

$$\phi_j \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad T\phi_j \rightarrow 0.$$

Oznaczamy $T\phi = \langle T, \phi \rangle$.

- \mathcal{D}' – zbiór dystrybucji. (\mathcal{D}' jest przestrzenią liniową.)

Przykłady.

- $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{f \mid \forall \text{ zbioru zwanego } K, f \in L^1(K)\}$

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx.$$

- δ – miara Diraca (delta Diraca)

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0).$$

- Y – funkcja Heaviside'a

$$\langle Y, \phi \rangle = \int_0^\infty \phi(x)dx \quad (n = 1).$$

Lemat 10.1 Niech $T \in \mathcal{D}'$. Wtedy dla każdego zbioru zwanego K istnieje $p = p(K)$ takie, że jeżeli $D^\alpha \phi_j(x) \rightarrow 0$ ($\phi_j \in \mathcal{D}_K$) jednostajnie na K dla każdego wielowskaźnika $|\alpha| \leq p$, to

$$\langle T, \phi_j \rangle \rightarrow 0.$$

W przestrzeni $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}$ można wprowadzić pseudonormy oraz pojęcie zbieżności ciągu:

$$|f|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha f(x)| \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$f_j \rightarrow f \Leftrightarrow \forall_m |f_j - f|_m \rightarrow 0.$$

Fakt 10.2 Liniowe odwzorowanie $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ jest dystrybucją \Leftrightarrow dla każdego zbioru zwanego K , $T : \mathcal{D}_K \rightarrow \mathbb{C}$ jest ciągle.

Definicja. Pochodną cząstkową dystrybucji $T \in \mathcal{D}'$ definiujemy wzorem:

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \rangle = - \langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle.$$

Fakt 10.3

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'.$$

Wniosek 10.4 $\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle.$

Definicja. W \mathcal{D}' można wprowadzić słabą topologię i słabą zbieżność: $T_j \rightarrow T$, jeżeli

$$\forall \phi \in \mathcal{D} \quad \langle T_j, \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle .$$

Fakt 10.5 Jeżeli $f_j \rightarrow f$ w L^1_{loc} , tzn. dla każdego zbioru zwartego K

$$\int_K |f_j(x) - f(x)| dx \rightarrow 0,$$

to $f_j \rightarrow f$ w \mathcal{D}' .

Przykład. $\sin jx \rightarrow 0$ w \mathcal{D}' , bo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \sin jx dx \rightarrow 0.$$

Definicja. Iloczynem dystrybucji $T \in \mathcal{D}'$ oraz funkcji $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nazywamy $\omega T \in \mathcal{D}'$ określoną wzorem

$$(\omega T)\phi = T(\omega\phi).$$

Twierdzenie 10.6 (Hörmander–Łojasiewicz) Niech ω będzie funkcją analityczną. Dla dowolnej dystrybucji $T \in \mathcal{D}'$ istnieje $S \in \mathcal{D}'$ taka, że $\omega S = T$.

Dla funkcji jednej zmiennej $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, symbol df/dx będzie oznaczał jej pochodną w sensie teorii dystrybucji, zaś $f'(x)$ zwykłą pochodną w punkcie x , o ile istnieje.

Lemat 10.7 *Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Równość $df/dx = 0$ w sensie teorii dystrybucji jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $f = c$ prawie wszędzie dla pewnej stałej c .*

Ponadto $f = 0$ jako dystrybucja wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ prawie wszędzie.

Definicja. Funkcja jednej zmiennej f jest *bezwzględnie ciągła*, jeżeli

$$\forall a < b \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

takie, że jeżeli $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$ są rozłącznymi przedziałami w $[a, b]$ i takimi, że

$$\sum_1^k (b_i - a_i) \leq \delta \quad \text{to} \quad \sum_1^k |f(b_i) - f(a_i)| \leq \epsilon.$$

Twierdzenie 10.8 *Jeżeli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, to funkcja $g(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ jest bezwzględnie ciągła, różniczkowalna prawie wszędzie, i jej pochodna $g'(x)$ jest równa $f(x)$ prawie wszędzie.*

Twierdzenie 10.9 *Funkcja bezwzględnie ciągła f posiada prawie wszędzie pochodną f' która należy do $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*

Dla dowolnych $x_0, x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

Jeżeli dwie funkcje są bezwzględnie ciągłe, to spełniają Twierdzenie o Całkowaniu przez Części.

Twierdzenie 10.10 (Nikodym) *Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*

- (1) *Jeżeli f jest bezwzględnie ciągła, to $df/dx = f'$ w sensie teorii dystrybucji.*
- (2) *Jeżeli $df/dx \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ w sensie teorii dystrybucji, to po ewentualnej zmianie wartości f na zbiorze miary zero, f jest funkcją bezwzględnie ciągłą, oraz $df/dx = f'$ prawie wszędzie.*