Funkcje Analityczne II

Literatura Pomocnicza:

1. J.Chądzyński, *Wstęp do Analizy Zespolonej*, PWN
2. J.Chądzyński, *Wstęp do Analizy Zespolonej w Zadaniach*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódziego
3. A.Birkholc, *Analiza Matematyczna, Funkcje Wielu Zmiennych*, PWN
4. F.Leja, *Funkcje Zespolone*, PWN
5. W.Rudin, *Analiza Rzeczywista i Zespolona*, PWN

1 Podstawowe terminy

Definicja. $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - *płaszczyzna domknięta* lub *sfera Riemanna.* Zbiór $\mathbb{C}$ nazywamy czasem *płaszczyzną otwartą.*

Fakt 1.1 *Jeżeli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, to odległość pomiędzy odpowiadającymi im punktami na sferze wynosi*

$$d(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Odległość na sferze pomiędzy punktem odpowiadającym $z \in \mathbb{C}$ oraz punktem w nieskończoności ∞ wynosi

$$d(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \ .$$

Ponadto zawsze $d(z_1, z_2) \leq 1$, oraz $d(z, \infty) \leq 1$.

Fakt 1.2 *Niech $(z_n) \subset \mathbb{C}$.*

(i) *Jeżeli $z \in \mathbb{C}$, to*
$z_n \ \rightarrow \ z \ w \ \bar{\mathbb{C}} \ \Leftrightarrow \ \ z_n \ \rightarrow \ z \ w \ \mathbb{C}$,

(ii) $z_n \ \rightarrow \ \infty \ w \ \bar{\mathbb{C}} \ \Leftrightarrow \ |z_n| \nearrow \infty$.

Definicja. Zbiory otwarte i spójne w $\bar{\mathbb{C}}$ nazywamy *obszarami.*

Fakt 1.3 *Jeżeli* $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ *jest obszarem oraz* $z \in U$, *to* $U \setminus \{z\}$ *jest obszarem.*

Definicja. Niech $A \subset \bar{\mathbb{C}}$. Zbiór spójny $S \subset A$ jest *składową zbioru* A, gdy każdy zbiór spójny zawierający S i zawarty w A jest równy zbiorowi S.

Zbiór $B \subset \bar{\mathbb{C}}$ *nie rozcina płaszczyzny*, gdy $\bar{\mathbb{C}} \setminus B$ jest spójny.

Fakt 1.4 *Obszar jest jednospójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest obszarem który nie rozcina płaszczyzny.*

Przykłady.

- $\emptyset$, $\bar{\mathbb{C}}$, $D(z_0, r), \mathbb{C}$ nie rozcinają płaszczyzny
- Pierścień $P(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, gdzie $0 \leq r < R$, rozcina płaszczyznę
- $D(0, 100) \setminus (D(4, 1) \cup D(-4, 1))$ rozcina płaszczyznę

Twierdzenie 1.5 *Niech* $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ *będzie niepustym właściwym zbiorem otwartym. Następujące warunki są równoważne:*

(i) U *nie rozcina płaszczyzny,*

(ii) każda składowa U *jest jednospójnym obszarem,*

(iii) każda składowa U *jest homeomorficzna z kołem jednostkowym,*

(iv) każda składowa U *ma w* $\bar{\mathbb{C}}$ *spójny brzeg,*

(v) jeżeli $U \subset \mathbb{C}$, *to dla każdej zamkniętej drogi* γ *zawartej w* U *oraz każdego* $a \in \mathbb{C} \setminus U$, $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$.

Definicja. Niech $f \in H(U)$, i niech $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Jeżeli $z_0 \in U$, to z_0 nazywamy *punktem regularnym* funkcji $f(z)$.
- Jeżeli $z_0 \notin U$ oraz $D'(z_0, r) \subset U$ dla pewnego $r > 0$, to z_0 nazywamy *punktem osobliwym odosobnionym* funkcji $f(z)$. Wtedy

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \quad \text{dla} \quad z \in D'(z_0, r).$$

- Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ jest zbieżny w $D(z_0, r)$, i nosi nazwę *części regularnej* funkcji $f(z)$ w punkcie z_0.
- Szereg $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z-z_0)^{-j}$ jest zbieżny dla $z \neq z_0$, i nosi nazwę *części osobliwej* funkcji $f(z)$ w punkcie z_0.

Przykład. Dla $f = \cos(z) + \sin(1/z)$, $\;z_0 = \pi$ jest punktem regularnym, $z_0 = 0$ jest punktem osobliwym odosobnionym.

- Jeżeli $c_{-1} = c_{-2} = \cdots = 0$ to mówimy, że z_0 jest punktem *pozornie osobliwym*, lub że $f(z)$ ma w z_0 *osobliwość usuwalną*.

Przykład. Funkcja $\sin(z)/z$, która jest holomorficzna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ma w $z_0 = 0$ osobliwość usuwalną.

- Jeżeli $c_{-m} \neq 0$ oraz $c_{-m-1} = c_{-m-2} = \cdots = 0$, to z_0 nazywamy *biegunem m–krotnym* lub *biegunem rzędu m*.
- Jeżeli część osobliwa zawiera nieskończenie wiele wyrazów, to z_0 nazywamy *punktem istotnie osobliwym* funkcji $f(z)$.

Przykład.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}z^2 - \frac{1}{6!}z^4 - \cdots$$

ma 2-krotny biegun w $z_0 = 0$.

$$f(z) = \sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \cdots$$

ma punkt istotnie osobliwy w $z_0 = 0$.

Definicja. Funkcja f jest *meromorficzna* w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, jeżeli z_0 jest punktem regularnym, pozornie osobliwym lub biegunem funkcji f.

Krotnością (*rzędem*) funkcji meromorficznej f w punkcie z_0 (niezerowej w pewnym sąsiedztwie punktu z_0) nazywamy taką liczbę całkowitą m, że

$$f(z) = \sum_{j=m}^{\infty} a_j(z-z_0)^j \;, \quad a_m \neq 0$$

w sąsiedztwie punktu z_0.

Fakt 1.6 *Funkcja f (niezerowa w pewnym sąsiedztwie punktu z_0) jest meromorficzna w punkcie z_0 i ma krotność m wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \ ,$$

gdzie g jest holomorficzna w pewnym sąsiedztwie punktu z_0 oraz $g(z_0) \neq 0$.

Fakt 1.7 *Jeżeli f jest meromorficzna i niezerowa w pewnym sąsiedztwie kołowym punktu z_0, to $1/f$ też jest meromorficzna w punkcie z_0.*

Fakt 1.8 *Jeżeli punkt z_0 jest punktem regularnym, to jest on m-krotnym zerem funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy z_0 jest m-krotnym biegunem funkcji $1/f$.*

Jeżeli z_0 jest m-krotnym biegunem funkcji f, to $1/f$ można przedłużyć do funkcji mającej w z_0 m-krotne zero.

Twierdzenie 1.9 (Casorati-Weierstrass) *Załóżmy, ze z_0 jest punktem istotnie osobliwym funkcji f. Wtedy zbiór wartości przyjmowanych przez f w dowolnym sąsiedztwie kołowym punktu z_0 jest gęsty w $\mathbb{C}$, tzn.*

$$\forall\ r > 0 \ \ \forall\ \varepsilon > 0 \ \ \forall w \in \mathbb{C} \ \ \exists\ z \in D'(z_0, r) \ : \ |f(z) - w| < \varepsilon \ .$$

Wniosek 1.10 *Jeżeli z_0 jest punktem istotnie osobliwym funkcji f, to funkcja f nie ma granicy w z_0.*

Jeżeli z_0 jest pozornie osobliwy, to istnieje $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

Jeżeli z_0 jest biegunem, to $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Definicja. Funkcja f jest *meromorficzna* na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jeżeli każdy punkt z U jest punktem regularnym, pozornie osobliwym, lub biegunem funkcji f. (Więc f może nie być określona na całym zbiorze U.) Piszemy wtedy $f \in \mathcal{M}(U)$.

Przykład.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)}$$

jest meromorficzna na $\mathbb{C}$.

Definicja. Niech $A \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym podzbiorem. Powiemy, że funkcja f jest meromorficzna na A, jeżeli istnieje otwarty zbiór $U \supset A$ oraz $F \in \mathcal{M}(U)$ taka, że $F|A = f$.

$\mathcal{M}(U)$ ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia, jest pierścieniem i $\mathbb{C}$-algebrą (tzn. dla $f, g \in \mathcal{M}(U)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}(U)$, $f \cdot g \in \mathcal{M}(U)$).

Ćwiczenie 1.11 *Jeżeli $f \in \mathcal{M}(U)$ nie znika tożsamościowo na żadnej składowej U, to $1/f \in \mathcal{M}(U)$.*

Więc jeżeli U jest obszarem, to $\mathcal{M}(U)$ jest ciałem.

Ćwiczenie 1.12 *Jeżeli U jest obszarem oraz $f \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ przyjmuje wartość zero na ciągu punktów mającym granicę należącą do U, to f jest wszędzie równa zero na U.*

Ćwiczenie 1.13 (Twierdzenie o identyczności) *Jeżeli U jest obszarem oraz $f, g \in \mathcal{M}(U)$ przyjmują te same wartości na ciągu punktów mającym granicę należącą do U, to $f \equiv g$ na U.*

2 Gałąź argumentu i logarytmu funkcji

Następujące warunki są równoważne:

- $A \in \mathbb{R}$ jest argumentem liczby $z \neq 0$
- $z = (\cos A + i \sin A)|z|$
- $z/|z| = \cos A + i \sin A$
- $z/|z| = e^{i\,A}$

Definicja. Niech $U \subset \mathbb{C}$, oraz niech $f : U \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ będzie ciągła. *Gałęzią argumentu* funkcji f na zbiorze U nazywamy każdą funkcję ciągłą $A : U \to \mathbb{R}$ taką, że

$$e^{i\,A(z)} \equiv \frac{f(z)}{|f(z)|} \quad .$$

Fakt 2.1 *Jeżeli $A = A(z)$ jest gałęzią argumentu, to*

$$L(z) = \ln|f(z)| + i\,A(z)$$

jest gałęzią logarytmu *funkcji f na zbiorze U, tzn. jest taką funkcją ciągłą $L : U \to \mathbb{C}$, że*

$$e^{L(z)} \equiv f(z) \; .$$

Ćwiczenie 2.2 *Jeżeli* $L = L(z)$ *jest gałęzią logarytmu funkcji* f, *to* $A(z) = \operatorname{Im} L(z)$ *jest gałęzią argumentu tej funkcji.*

Fakt 2.3 *Dwie gałęzie argumentu (odp. logarytmu) funkcji* f *na zbiorze spójnym* U *różnią się o całkowitą wielokrotność* 2π *(odp.* $2\pi\, i$*).*

Lemat 2.4 *Jeżeli* f *jest holomorficzna oraz* $\frac{f'}{f}$ *ma holomorficzną funkcję pierwotną, to w* U *istnieje gałąź logarytmu funkcji* f *będąca funkcją holomorficzną.*

Twierdzenie 2.5 *Jeżeli* f *jest funkcją holomorficzną w jednospójnym obszarze* U *nie przyjmującą nigdzie wartości zero, to w* U *istnieje gałąź logarytmu* f *będąca funkcją holomorficzną.*

Wniosek 2.6 *W tym przypadku <u>każda</u> gałąź logarytmu jest holomorficzna.*

Fakt 2.7 *W zbiorze otwartym jednospójnym* $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *istnieje* $L(z)$ *- gałąź logarytmu funkcji* z. *Ponadto* $L'(z) = \frac{1}{z}$.

(Jeżeli U *nie jest jednospójny, ale żadna droga zamknięta zawarta w* U *nie nawija się wokół zera, to teza też jest spełniona.)*

Gałąź logarytmu funkcji z *w niejednospójnym obszarze* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *nie istnieje!*

Twierdzenie 2.8 *Jeżeli* f *jest funkcją holomorficzną w jednospójnym obszarze* U *nie przyjmującą nigdzie wartości zero, to dla dowolnej liczby naturalnej* k *w zbiorze* U *istnieje gałąź* k*-tego pierwiastka* $\sqrt[k]{f}$ *będąca funkcją holomorficzną, tzn. istnieje taka funkcja* $p(z) \in H(U)$, *że*

$$[p(z)]^k \equiv f(z) \ .$$

Wtedy $p'(z) = \frac{1}{k}\frac{f'(z)}{f(z)}p(z)$.

3 Homografie

Definicja. Jeżeli $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ oraz $ad - bc \neq 0$, to funkcję

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

nazywamy *homografią*.

Jeżeli $c = 0$, wtedy $a \neq 0$, $d \neq 0$ oraz

$$h(z) = \left(\frac{a}{d}\right) z + \frac{b}{d}$$

jest przekształceniem liniowym. Jeżeli dodatkowo założymy, że $h(\infty) = \infty$, to zdefiniujemy przekształcenie $h : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$.

Jeżeli $c \neq 0$ oraz dodatkowo założymy, że

$$h\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad h(\infty) = \frac{a}{c}\ ,$$

to również $h : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$.

W obu przypadkach homografia definiuje przekształcenie $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$.

Ćwiczenie 3.1 *Każda homografia jest homeomorfizmem (i dyffeomorfizmem) $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$.*

Fakt 3.2 *Każde przekształcenie liniowe $h(z) = az + c$ jest złożeniem jednokładności, obrotu, i przesunięcia.*

Definicja. Przekształcenie $h(z) = \frac{1}{z}$ nazywamy *inwersją*.

Twierdzenie 3.3 *Każda homografia jest złożeniem skończonej ilości przekształceń liniowych i inwersji.*

Lemat 3.4 *Jeżeli $B = b_1 + i\,b_2,\ z = x + i\,y$, to*

$$Bz + \bar{B}\bar{z} = 2\,b_1 x - 2\,b_2 y.$$

Lemat 3.5 *Jeżeli $A \in \mathbb{R}$, to $Az\bar{z} = A(x^2 + y^2)$.*

Twierdzenie 3.6 *Jeżeli $A, C \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{C}$ oraz $|B|^2 - AC > 0$, to*

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$$

jest ogólnym równaniem prostej, gdy $A = 0$, lub okręgu gdy $A \neq 0$.

Definicja. *Okręgiem uogólnionym* w $\bar{\mathbb{C}}$ nazywamy każdy okrąg w $\mathbb{C}$, lub prostą w $\mathbb{C}$ z dołączonym punktem ∞.

Twierdzenie 3.7 *Homografia przekształca okrąg uogólniony na okrąg uogólniony.*

Fakt 3.8 *Inwersja $w = \frac{1}{z}$ jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$. Odwzorowaniem odwrotnym do inwersji $w = \frac{1}{z}$ jest inwersja $z = \frac{1}{w}$.*

Więc każda homografia jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, odwzorowanie odwrotne do homografii jest też homografią

4 Twierdzenie Rouchégo

Lemat 4.1 *Niech f będzie funkcją meromorficzną w obszarze U. Jeżeli $f \not\equiv 0$, to f'/f jest meromorficzna i ma jednokrotne bieguny dokładnie w tych punktach, które są zerami lub biegunami funkcji f.*

W każdym z tych punktów $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'}{f}$ jest równe krotności funkcji f w punkcie z_0.

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie takim zbiorem zwartym, że $\partial\Omega$ jest skończoną sumą rozłącznych dróg Jordana.

Załóżmy, że f jest funkcją meromorficzną na Ω nie mającą zer ani biegunów na $\partial\Omega$.

Ćwiczenie 4.2 *Zbiór zer i biegunów należących do Ω jest skończony.*

Lemat 4.3 *Niech M będzie sumą krotności zer funkcji f (tylko tych należących do Ω), a N sumą krotności biegunów.*

Wtedy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)\, dz}{f(z)} = M - N \ .$$

Twierdzenie 4.4 (Rouché) *Jeżeli $f, g \in H(\Omega)$ oraz*

$$|g(z)| < |f(z)| \quad dla\ z \in \partial\Omega \ ,$$

to funkcja f ma skończoną ilość zer w $\Omega \setminus \partial\Omega$ oraz suma $f+g$ ma w $\Omega \setminus \partial\Omega$ tyle samo zer co funkcja f, z uwzględnieniem ich krotności.

Twierdzenie 4.5 (Zasada argumentu) *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie takim zbiorem zwartym, że $\partial\Omega$ jest skończoną sumą rozłącznych dróg Jordana $\gamma_1 + \cdots + \gamma_s$.*

Załóżmy, że f jest funkcją meromorficzną na Ω nie mającą zer ani biegunów na $\partial\Omega$. Zbiór zer i biegunów należących do Ω jest skończony. Niech M będzie sumą krotności zer funkcji f (tylko tych należących do Ω), a N sumą krotności biegunów.

Wtedy $\beta_k = f \circ \gamma_k$, dla $1 \leq k \leq s$, są takimi drogami, że $0 \notin \beta_k^*$, więc indeks $\operatorname{Ind}_{\beta_k}(0)$ punktu 0 względem drogi β_k jest dobrze określony. Ponadto

$$M - N = \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Ind}_{\beta_k}(0) \ .$$

5 Zasada Ekstremum

Definicja. Niech f będzie funkcją holomorficzną w otwartym otoczeniu punktu z_0 oraz niech $w_0 = f(z_0)$. Funkcja f *przyjmuje w* z_0 *wartość* w_0 *m-krotnie*, gdy funkcja $f(z) - w_0$ ma w tym punkcie m-krotne zero.

(Ponieważ $f(z_0) - w_0 = w_0 - w_0 = 0$, więc zawsze $m \geq 1$.) Wtedy

$$f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0 \ .$$

Twierdzenie 5.1 *Jeżeli f przyjmuje w z_0 wartość w_0 m-krotnie, to*

$$\exists \ r_0 \quad \forall\, 0 < r < r_0 \quad \exists\, \eta > 0 \ \textit{takie, że}$$

(i) $f^{-1}(w_0) \cap D(z_0, r) = \{z_0\}$,

(ii) dla każdego $w \in D'(w_0, \eta)$, $\#(f^{-1}(w) \cap D(z_0, r)) = m$.

Twierdzenie 5.2 *Jeżeli $f \in H(U)$ nie jest stała na żadnej składowej zbioru otwartego U, to dla każdego zbioru otwartego $U' \subset U$, obraz $f(U')$ jest otwarty w $\mathbb{C}$.*

Wniosek 5.3 (Zasada Ekstremum) *Jeżeli zbiór U jest otwarty oraz funkcja holomorficzna $f \in H(U)$ nie jest stała na żadnej składowej zbioru U, to w żadnym punkcie zbioru U*

- *część rzeczywista funkcji $f(z)$*
- *część urojona funkcji $f(z)$*

nie osiąga ekstremum, zaś

- *$|f(z)|$ – moduł funkcji $f(z)$*

nie osiaga maksimum.

Jeżeli ponadto $f(z)$ nie przyjmuje wartości zero w żadnym punkcie zbioru U, to moduł funkcji, czyli $|f(z)|$, nie osiąga też minimum w żadnym punkcie zbioru U.

Wniosek 5.4 *Jeżeli Ω jest zbiorem zwartym oraz $f \in H(\Omega)$ nie jest stała na żadnej składowej zbioru Ω,to*

- *część rzeczywista funkcji $f(z)$*
- *część urojona funkcji $f(z)$*

- $|f(z)|$ – *moduł funkcji* $f(z)$

osiąga maksimum (oraz minimum w dwóch pierwszych przypadkach) wyłącznie w punktach należących do $\partial\Omega = \Omega \setminus \mathrm{int}(\Omega)$.

Podobnie minimum $|f(z)|$, *o ile* f *nie przyjmuje wartości zero w żadnym punkcie zbioru* $\mathrm{int}(\Omega)$.

Więc jeżeli teza tego wniosku nie jest spełniona, to funkcja f *jest stała na którejś składowej zbioru* Ω *!*

Twierdzenie 5.5 (O lokalnym odwracaniu funkcji) *Jeżeli* f *jest holomorficzna w* z_0 *oraz* $f'(z_0) \neq 0$, *to istnieje zbiór otwarty* $U_0 \ni z_0$ *oraz zbiór otwarty* $V_0 \ni w_0 = f(z_0)$ *takie, że* $f : U_0 \to V_0$ *jest odwzorowaniem odwracalnym (nawet homeomorfizmem), ponadto* $f^{-1} : V_0 \to U_0$ *jest klasy* C^∞.

Ćwiczenie 5.6 $f^{-1} : V_0 \to U_0$ *jest holomorficzna.*

6 Twierdzenie Hurwitza

Twierdzenie 6.1 (Hurwitz) *Niech* $(f_n)_{n=1}^\infty$ *będzie ciągiem funkcji holomorficznych w zbiorze* U *zbieżnym jednostajnie do funkcji* f *(która wtedy musi być holomorficzna).*

Jeżeli f *ma w punkcie* z_0 m*-krotne zero, to w każdym dostatecznie małym kole o środku w* z_0 *prawie wszystkie funkcje* f_n *mają dokładnie* m *zer (z uwzględnieniem ich krotności).*

Fakt 6.2 *Niech* $(f_n)_{n=1}^\infty$ *będzie ciągiem funkcji holomorficznych i różnowartościowych w obszarze* U *zbieżnym jednostajnie do funkcji* f.

Wtedy f *jest stała lub różnowartościowa.*

Powyższe twierdzenia są spełnione również wtedy, gdy ciąg (f_n) jest niemal jednostajnie zbieżny.

Definicja. Ciąg funkcji f_n określonych na otwartym zbiorze U jest *niemal jednostajnie zbieżny* do funkcji f, gdy

$$\forall \text{ zbioru zwartego } K \subset U, \quad \forall\, \epsilon > 0$$

$$\exists\, N \quad \forall\, z \in K \quad \forall\, n \geq N \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Wniosek 6.3 *Ciąg funkcji f_n jest niemal jednostajnie zbieżny do f wtedy i tylko wtedy, gdy f_n jest jednostajnie zbieżny do f na każdym zbiorze zwartym $K \subset U$.*

Twierdzenie 6.4 (Tw. Weierstrassa) *Załóżmy, że $f_n \in H(U)$ oraz $f_n \to f$ niemal jednostajnie.*

Wtedy $f \in H(U)$, oraz $f_n' \to f'$ niemal jednostajnie.

Twierdzenie 6.5 (Hurwitz) *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych w zbiorze U zbieżnym niemal jednostajnie do funkcji f (która wtedy musi być holomorficzna).*

Jeżeli f ma w punkcie z_0 m-krotne zero, to w każdym dostatecznie małym kole o środku w z_0 prawie wszystkie funkcje f_n mają dokładnie m zer (z uwzględnieniem ich krotności).

Fakt 6.6 *Niech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych i różnowartościowych w obszarze U zbieżnym niemal jednostajnie do funkcji f.*

Wtedy f jest stała lub różnowartościowa.

7 Rodziny normalne

Twierdzenie 7.1 (Arzeli, Ascoli) *Załóżmy, że K jest przestrzenią zwartą. Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną jednakowo ciągłych funkcji $K \to \mathbb{C}$, tzn.*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, f \in \mathcal{S} \;\; \forall\, x, x' \in K \;\; :$$
$$d(x, x') < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x')| < \varepsilon \;,$$

które są wspólnie ograniczone, tzn.

$$\exists\, M > 0 \;\; \forall\, x \in K \;\; \forall\, f \in \mathcal{S} \;\; : \; |f(x)| < M \;.$$

Wówczas każdy ciąg $(f_n) \subset \mathcal{S}$ posiada podciąg jednostajnie zbieżny na K.

Definicja. Niech $\mathcal{R} \subset H(U)$. Rodzina $\mathcal{R}$ jest *rodziną normalną*, jeżeli z każdego ciągu funkcji należących do $\mathcal{R}$ można wybrać podciąg niemal jednostajnie zbieżny na U.

Rodzina $\mathcal{R}$ jest *niemal ograniczona* na U, jeżeli dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ istnieje stała $M = M(K)$ taka, że

$$\forall\, z \in K \quad \forall\, f \in \mathcal{R} \qquad |f(z)| < M.$$

Fakt 7.2 *Jeżeli rodzina* $\mathcal{R} \subset H(U)$ *jest niemal ograniczona oraz* $K \subset U$ *jest zbiorem zwartym, to z każdego ciagu funkcji należących do* $\mathcal{R}$ *można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny na* K.

Twierdzenie 7.3 (Stieltjes-Osgood, Montel) *Każda rodzina* $\mathcal{R} \subset H(U)$ *niemal ograniczona na* U *jest normalna.*

8 Lemat Schwarza

Twierdzenie 8.1 (Lemat Schwarza) *Niech* $f \in H(D(0,R))$. *Jeżeli* $f(0) = 0$ *oraz* $|f(z)| \leq M$ *dla* $z \in D(0,R)$, *to*

(i) $|f'(0)| \leq M/R$,

(ii) $|f(z)| \leq (M/R)|z|$ *dla* $z \in D(0,R)$.

W nierównościach (i) lub (ii) zachodzi równość dla pewnego $z_0 \neq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $\theta \in \mathbb{R}$ *takie, że funkcja* f *ma postać* $f(z) = (M/R)e^{i\theta}z$.

9 Odwzorowania konforemne

Fakt 9.1 *Jeżeli* $U \subset \mathbb{C}$ *jest otwarty oraz* $f : U \to \mathbb{C}$ *jest holomorficzna i różnowartościowa, to dla każdego* $z \in U$ *mamy* $f'(z) \neq 0$.

Fakt 9.2 *Jeżeli* $U \subset \mathbb{C}$ *jest otwarty oraz* $f : U \to \mathbb{C}$ *jest holomorficzna i różnowartościowa, to* $W = f(U)$ *jest otwarty oraz* $f^{-1} : W \to U$ *jest holomorficzna.*

Wniosek 9.3 *Jeżeli* f *jest holomorficzna w punkcie* z_0 *oraz* $f'(z_0) \neq 0$, *to w pewnym kole* $D(w_0, \eta)$ *(gdzie* $w_0 = f(z_0)$*) istnieje holomorficzna funkcja odwrotna* f^{-1} *taka, że* $(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0)$.

Definicja. Niech $U, W \subset \mathbb{C}$ będą zbiorami otwartymi. Funkcja $h : U \to W$ odwzorowuje *konforemnie* U na W, gdy h jest różnowartościową funkcją holomorficzną.

Mówimy wtedy, że h jest *odwzorowaniem konforemnym.*

Wniosek 9.4 $h^{-1} : W \to U$ *jest też odwzorowaniem konforemnym. Ponadto* $h : U \to W$ *jest homeomorfizmem.*

Fakt 9.5 *Jeżeli $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym nie rozcinającym płaszczyzny oraz $U \neq \mathbb{C}$, to istnieje odwzorowanie konforemne zbioru U na taki zbiór $W \subset \mathbb{C}$, że $\mathbb{C} \setminus W$ ma niepuste wnętrze.*

Niech $K = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ oznacza koło jednostkowe o środku w zerze i promieniu 1.

Fakt 9.6 *Jeżeli $U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty oraz $\mathbb{C} \setminus U$ ma niepuste wnętrze, to istnieje podzbiór otwarty $W \subset K$ i odwzorowanie konforemne $h : U \to W$.*

Fakt 9.7 *Jedynymi odwzorowaniami konforemnymi K na K są homografie postaci*

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \ ,$$

gdzie $\theta \in \mathbb{R}$ oraz $|a| < 1$.

Fakt 9.8 *Jeżeli $h : K \to K$ jest odwzorowaniem konforemnym, takim że $h(0) = 0$, to $h(z) = e^{i\theta} z$.*

Lemat 9.9 *Jeżeli $a \in K$, to*

$$h_0(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

przekształca konforemnie $K \to K$ oraz $h_0(a) = 0$.

Twierdzenie 9.10 (Riemann) *Niech właściwe podzbiory $U, W \subset \mathbb{C}$ będą obszarami jednospójnymi. Dla dowolnych $a \in U$, $b \in W$ oraz $\theta \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie konforemne $h : U \to W$ takie, że $h(a) = b$ oraz $\arg h'(a) = \theta$.*

Ćwiczenie 9.11 *Jeżeli właściwy podzbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem jednospójnym, to nie istnieje odwzorowanie konforemne $h : U \to \mathbb{C}$.*

Ćwiczenie 9.12 *Jeżeli $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest odwzorowaniem konforemnym, to $h(z) = az + b$ $(a \neq 0)$. (Wskazówka: Przypadek istotnej osobliwości w punkcie ∞ wykluczyć za pomocą twierdzenia Casoratiego-Weierstrassa.)*

Ćwiczenie 9.13 *Każde odwzorowanie konforemne półpłaszczyzny $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ w siebie jest homografią postaci*

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \ ,$$

gdzie a, b, c, d są takimi liczbami rzeczywistymi, że $ad - bc = 1$.

Twierdzenie 9.14 *Jeżeli $h : U \to W$ jest odwzorowaniem konforemnym, to h jest wszędzie* wiernokątne z zachowaniem zwrotu.

Przykład. Funkcja $f = z^2$ nie jest wiernokątna w punkcie $z_0 = 0$.

Ćwiczenie 9.15 *Jeżeli $f(z)$ jest funkcją holomorficzną oraz $f'(z_0) = 0$, to funkcja f nigdy nie jest wiernokątna w punkcie z_0.*

Dla $0 < r < R$ niech $P(0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$. Jeżeli $\lambda > 0$ to przekształcenie $z \mapsto \lambda z$ odwzorowuje konforemnie pierścień $P(0; r, R)$ na pierścień $P(0; \lambda r, \lambda R) = P(0; r_1, R_1)$, i wtedy $R_1/r_1 = (\lambda R)/(\lambda r) = R/r$.

Twierdzenie 9.16 *Pierścienie $P(0; r_1, R_1)$ oraz $P(0; r_2, R_2)$ są konforemnie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1/r_1 = R_2/r_2$.*

10 Aproksymacje funkcji holomorficznych

Twierdzenie 10.1 (Runge) *Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem zwartym, oraz E będzie zbiorem mającym po jednym punkcie wspólnym z każdą składową $\bar{\mathbb{C}} \setminus K$.*

Dla dowolnej funkcji f holomorficznej na K i dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja wymierna $Q(z)$ mająca bieguny wyłącznie w zbiorze E taka, że

$$|f(z) - Q(z)| < \varepsilon \text{ dla } z \in K .$$

Fakt 10.2 *Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem zwartym nie rozcinającym płaszczyzny.*

Dla dowolnej funkcji f holomorficznej na K i dowolnej liczby $\varepsilon > 0$, istnieje wielomian $P(z)$ taki, że

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon \text{ dla } z \in K .$$

Ćwiczenie 10.3 *Niech $K = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| \le 2\}$ będzie zwartym pierścieniem rozcinającym płaszczyznę. Funkcja $f(z) = 1/z$ jest holomorficzna na K.*

Czy istnieje wielomian $P(z)$ taki, że $|1/z - P(z)| < 1/100$ dla $z \in K$?

11 Funkcje harmoniczne

Definicja. Funkcja rzeczywista $u(x,y)$ dwóch zmiennych rzeczywistych jest *harmoniczna* w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$, jeżeli jest klasy C^2 oraz spełnia równanie

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0$$

zwane *równaniem różniczkowym Laplace'a.* Wyrażenie $\triangle u$ nazywamy *laplasjanem* funkcji u.

Przykład.

- Funkcje $\ln(x^2+y^2)$, x^2-y^2 są harmoniczne,
- funkcja x^2+y^2 nie jest harmoniczna.

Fakt 11.1 *(i) Każda funkcja stała jest harmoniczna.*

(ii) Jeżeli u, v są harmoniczne oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$, to funkcje $au+b$, $u \pm v$, $au+bv+c$ są harmoniczne.

Uwaga. Iloczyn dwóch funkcji harmonicznych może nie być funkcją harmoniczną.

Fakt 11.2 *Niech $f = u+iv$ będzie funkcją holomorficzną na U. Wtedy u oraz v są harmoniczne na U.*

Twierdzenie 11.3 *Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym nie rozcinającym płaszczyzny.*

Dla dowolnej funkcji harmonicznej $u(x,y)$ na U istnieje $f \in H(U)$ taka, że $u = \mathrm{Re}\, f$.

Wniosek 11.4 *Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym nie rozcinającym płaszczyzny.*

Dla dowolnej funkcji harmonicznej u na zbiorze U istnieje funkcja v harmoniczna na U taka, że $f = u + i\,v$ jest holomorficzna na U.

Funkcję v nazywamy funkcją harmoniczną sprzężoną *z funkcją u.*

Wniosek 11.5 *Funkcja harmoniczna jest klasy C^∞.*

Twierdzenie 11.6 (O identyczności) *Jeżeli funkcje harmoniczne u_1, u_2 w obszarze U są równe na jakimś niepustym otwartym zbiorze $A \subset U$, to $u_1 \equiv u_2$ na całym U.*

Twierdzenie 11.7 (Zasada ekstremum) *Funkcja harmoniczna $u(x,y)$, różna od stałej, nie osiąga w żadnym punkcie wewnętrznym (x_0, y_0) swego obszaru istnienia U ani wartości największej, ani najmniejszej.*

Twierdzenie 11.8 (O wartości średniej dla funkcji harmonicznych) *Jeżeli $u(x,y)$ jest harmoniczna na U oraz $a \in U$, to dla dostatecznie małego $r > 0$:*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\, dt \ .$$

(Można dowieść, że funkcje ciągłe które spełniają tezę Twierdzenia są harmoniczne.)

Ćwiczenie 11.9 *Udowodnij odpowiednik Wzoru Cauchy'ego dla funkcji harmonicznych:*

Jeżeli $u(x,y) = u(z)$ jest harmoniczna na U oraz punkt $a \in U$, to dla dostatecznie małego $r > 0$ oraz dowolnego z, takiego że $|z - a| < r$, zachodzi równość

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z-a|^2}{|re^{it} - (z-a)|^2}\, u(a + re^{it})\, dt.$$

Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym i niech $\varphi : \partial U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą.

<u>Problem Dirichleta</u>: Czy istnieje funkcja ciągła $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$, która jest harmoniczna w U taka, że $u \,|\, \partial U = \varphi$?

Twierdzenie 11.10 *Problem Dirichleta ma rozwiązanie na każdym kole $D(a,r)$, tzn.:*

Jeżeli $\varphi : \partial\, D(a,r) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcja u określona wzorem

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z-a|^2}{|re^{it} - (z-a)|^2}\, \varphi(a + re^{it})\, dt$$

dla $z \in D(a,r)$, oraz $u(z) = \varphi(z)$ dla $z \in \partial\, D(a,r)$, jest harmoniczna w $D(a,r)$ oraz ciągła na $\bar{D}(a,r)$.

12 Konstrukcje funkcji

Twierdzenie 12.1 (Mittag-Leffler) *Niech A będzie podzbiorem zbioru otwartego U, nie posiadającym punktów skupienia w U.*

Jeżeli każdemu punktowi $a \in A$ przyporządkujemy liczbę naturalną $m(a)$ i funkcję wymierną P_a postaci

$$P_a(z) = \sum_{j=1}^{m(a)} c_{j,a}(z-a)^{-j}, \quad c_{j,a} \in \mathbb{C},$$

to istnieje funkcja meromorficzna f na U, mająca bieguny tylko w zbiorze A taka, że dla każdego $a \in A$ jej część główna rozwinięcia w szereg Laurenta w punkcie a jest równa $P_a(z)$.

Twierdzenie 12.2 (Weierstrass) *Niech A będzie podzbiorem zbioru otwartego U, nie posiadającym punktów skupienia w U.*

Jeżeli każdemu punktowi $a \in A$ przyporządkujemy liczbę całkowitą $m(a) \neq 0$, to istnieje funkcja meromorficzna f na U, mająca zera oraz bieguny tylko w zbiorze A, przy czym w punkcie $a \in A$ ma ona krotność $m(a)$.

Jeżeli wszystkie $m(a)$ są dodatnie, to istnieje funkcja holomorficzna na U mająca w każdym punkcie $a \in A$ zero krotności $m(a)$.

Twierdzenie 12.3 (Poincaré) *Funkcja meromorficzna w zbiorze otwartym U jest ilorazem dwóch funkcji holomorficznych.*

Twierdzenie 12.4 (Picard) *Każda funkcja całkowita, która nie jest wielomianem, przyjmuje każdą wartość* **(z wyjątkiem co najwyżej jednej)** *nieskończenie wiele razy.*

Przykład. Funkcja e^z nie przyjmuje nigdzie wartości zero. Każdą inną wartość przyjmuje nieskończenie wiele razy.

13 O dowodzie Twierdzenia Riemanna

Niech $K = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ oznacza koło jednostkowe o środku w zerze i promieniu 1.

Fakt 13.1 *Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym właściwym obszarem nie rozcinającym płaszczyzny, tzn. $U \neq \mathbb{C}$ jest otwarty, jednospójny. Weźmy dowolny punkt $a \in U$.*

Istnieje różnowartościowa funkcja holomorficzna $g : U \to K$ taka, że $g(a) = 0$.

Z Faktu 9.1: $g'(a) \neq 0$.

Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich różnowartościowych funkcji holomorficznych $f : U \to K$ takich, że $f(a) = 0$.

Ponieważ $g \in \mathcal{P}$, więc rodzina $\mathcal{P}$ jest niepusta.

Fakt 13.2 *Rodzina $\mathcal{P}$ jest rodziną normalną, tzn z każdego ciągu $(f_n) \subset \mathcal{P}$ można wybrać podciąg niemal jednostajnie zbieżny na U.*

Fakt 13.3 *Zbiór $\{f'(a) \mid f \in \mathcal{P}\}$ jest ograniczony.*

Niech $M = \sup\{|f'(a)| \;:\; f \in \mathcal{P}\}$. Wtedy

$$M \geq |g'(a)| > 0 \ ,$$

oraz istnieje ciąg $(f_n) \subset \mathcal{P}$ taki, że

$$\lim |f_n'(a)| = M \ .$$

Na mocy Twierdzenia Stieltjesa-Osgood'a/Montela, można zakładać, że ciąg (f_n) jest niemal jednostajnie zbieżny do $h \in H(U)$.

$$h(a) = \lim f_n(a) = \lim 0 = 0.$$

Z Twierdzenia Weierstrassa, (f_n') jest niemal jednostajnie zbieżny do h'.

Lemat 13.4 $h'(a) \neq 0$, $|h'(a)| = M$.

Lemat 13.5 *h jest różnowartościowa.*

Lemat 13.6 $h(U) \subset K$.

Fakt 13.7 $h \in \mathcal{P}$.

Fakt 13.8 $h(U) = K$.

Fakt 13.9 *Niech* $U \subset \mathbb{C}$ *będzie otwartym obszarem nie rozcinającym płaszczyzny,* $U \neq \mathbb{C}$*, oraz* $a \in U$*.*

Wtedy istnieje odwzorowanie h *przekształcające konforemnie* U *na* K *takie, że* $h(a) = 0$*.*

Twierdzenie 13.10 (Riemanna o odwzorowaniu) *Niech właściwe podzbiory* $U, W \subset \mathbb{C}$ *będą obszarami jednospójnymi. Dla dowolnych* $a \in U$*,* $b \in W$ *oraz* $\theta \in \mathbb{R}$ *istnieje dokładnie jedno odwzorowanie konforemne* $h : U \to W$ *takie, że* $h(a) = b$ *oraz* $\arg h'(a) = \theta$*.*