Osobliwości i Katastrofy

Literatura Pomocnicza:

1. J.W.Bruce, P.G.Giblin, *Curves and Singularities*, Cambridge University Press, Cambridge 1992,
2. Th.Bröcker, L.Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Math. Soc., Lectures Notes 17,
3. J.Geresz, *Zarys Podstawowych Idei Teorii Thoma*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej 1980,
4. G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann, `Singular 3.0.2`. *A Computer Algebra System for Polynomial Computations*
5. S.Janeczko, *Wybrane Zagadnienia Teorii Katastrof*, Oficyna Wydawnicza PW 2005
6. J.D. Murray, *Wprowadzenie do Biomatematyki*, PWN 2006
7. A.Okniński, *Teoria Katastrof w Chemii*, PWN 1990,
8. T.Poston, I.N.Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, London 1978,
9. M.Spivak, *Analiza na Rozmaitościach*, PWN 2005,
10. R.Thom, *Parabole i Katastrofy. Rozmowy o matematyce, nauce i filozofii z Giulio Giorello i Simoną Morini*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa 1991,
11. E.C.Zeeman, *Catastrophe Theory (Selected Papers 1972-1977)*, Addison-Wesley, Reading 1977.

1 Kiełki funkcji

$n, m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$x_0 \in \mathbb{R}^n$ – ustalony punkt

$\mathcal{F} = \{(U, f) \mid U$ zbiór otwarty w $\mathbb{R}^n$ zawierający x_0, $f : U \to \mathbb{R}^m\}$

Dla (U, f), $(V, g) \in \mathcal{F}$: $(U, f) \sim (V, g)$ $\Leftrightarrow$ istnieje zbiór otwarty W zawierający punkt x_0 taki, że $W \subset U \cap V$ oraz $f|W \equiv g|W$.

Ćwiczenie 1.1 *Relacja "$\sim$"jest relacją równoważności w $\mathcal{F}$.*

Klasy równoważności (warstwy) nazywamy *kiełkami funkcji* z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ w punkcie x_0.
Oznaczamy je:
$f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to \mathbb{R}^m$ lub
$f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to (\mathbb{R}^m, y_0)$, gdzie $y_0 = f(x_0)$

Wartość $y_0 = f(x_0)$ nie zależy od wyboru reprezentanta.

Uwaga. $\mathbb{R}^n$ nie musi być dziedziną funkcji f.

Kiełek jest ciągły (różniczkowalny, klasy C^∞, ...) jeżeli jego reprezentant jest ciągły (różniczkowalny, klasy C^∞, ...).

Przykład $x_0 = 0$
$U_1 = (-1, 1)$, $f_1 = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$
$U_2 = \mathbb{R}$, $f_2 = 1/(1 + x^2)$
(U_1, f_1), (U_2, f_2) reprezentują ten sam kiełek C^∞-funkcji $(\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$

Przykład $x_0 = 0$
$U_1 = \mathbb{R}$, $f_1 \equiv 1$
$U_2 = \mathbb{R}, f_2$ ma wykres:

(U_1, f_1), (U_2, f_2) reprezentują ten sam kiełek C^∞-funkcji.

Przykład $x_0 = 0$, $f_1 = x$, $f_2 = \sin x$
reprezentują różne kiełki, mimo że wartość w $x_0 = 0$ obu funkcji jest taka sama.

Kiełki ciągłe można składać:
$f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to (\mathbb{R}^m, y_0)$, $g : (\mathbb{R}^m, y_0) \to (\mathbb{R}^k, z_0)$
Kiełek $g \circ f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to (\mathbb{R}^k, z_0)$
jest reprezentowany przez złożenie dowolnych reprezentantów f oraz g.

Jeżeli $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to (\mathbb{R}^n, y_0)$, to $g : (\mathbb{R}^n, y_0) \to (\mathbb{R}^n, x_0)$ jest *kiełkiem* *odwrotnym* do f jeżeli $g \circ f \sim \mathrm{id}_{R^n}$ oraz $f \circ g \sim \mathrm{id}_{R^n}$.

Przykład. Jeżeli $f : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ jest kielkiem funkcji $\sin x$, $g : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ jest kiełkiem funkcji $\arcsin x$, to g jest kiełkiem odwrotnym do f.

Jeżeli $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to \mathbb{R}^m$ jest kiełkiem różniczkowalnym, to można określić pochodną $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:
Przedstawmy $f = (f_1, \ldots, f_m)$ z pomocą funkcji współrzędnych.
Macierz $Df(x_0)$ (tzn. macierz Jacobiego) ma postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 1.2 (O funkcji odwrotnej) *Kiełek $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to (\mathbb{R}^n, y_0)$ klasy C^∞ posiada kiełek odwrotny klasy C^∞*

$$f^{-1} : (\mathbb{R}^n, y_0) \to (\mathbb{R}^n, x_0)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Jacobiego jest niezdegenerowana, tzn.

$$\det Df(x_0) \neq 0 \ .$$

Przykład $f(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y) : (\mathbb{R}^2, (a, b)) \to (\mathbb{R}^2, f(a, b))$ jest kiełkiem odwracalnym w każdym punkcie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ale funkcja $(e^x \sin y, e^x \cos y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ <u>nie jest odwracalna</u>.

Przykład. Kiełek $f : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ funkcji x^3 posiada kiełek odwrotny reprezentowany przez $\sqrt[3]{x}$, ale ten kiełek nie jest klasy C^∞.

2 Algebra kiełków

Będziemy badać kiełki funkcji $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \to \mathbb{R}$,

Translacja $x \mapsto x_0 + x$ posyła punkty x leżące w otoczeniu początku układu współrzednych $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ na punkty $x_0 + x$ w otoczeniu punktu x_0.

Przykład. Niech $f = f(x, y, z)$ będzie kiełkiem funkcji w punkcie $(1, 2, 4)$. Wtedy $g = f(x + 1, y + 2, z + 4)$ będzie odpowiadającym mu kiełkiem w początku układu $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

```
SINGULAR
A Computer Algebra System for Polynomial Computations , version
3-1-1
by:  G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann , Feb 2010
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> poly f=x4+y3-xyz;
> poly g=subst(f,x,x+1,y,y+2,z,z+4);
> g;
1-4x+8y-2z+6x2-4xy+6y2-2xz-yz+4x3+y3-xyz+x4
> exit;
Auf Wiedersehen.
```

Dlatego najwygodniej jest przyjąć, że $x_0 = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ jest początkiem układu współrzędnych.

- $\mathcal{E}(n)$ lub $\mathcal{E}$ – zbiór C^∞-kiełkow $(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to \mathbb{R}$

- $C^\infty(n)$ – zbiór C^∞ - funkcji $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Ćwiczenie 2.1 *$\mathcal{E}(n)$, $C^\infty(n)$ są $\mathbb{R}$-algebrami.*

Definicja. *Ideałem* pierścienia P nazywamy każdy podzbiór $I \subset P$ spełniający warunki:
(a) $a, b \in I \quad \Rightarrow \quad a + b \in I$
(b) $a \in I,\ p \in P \quad \Rightarrow \quad p \cdot a \in I$

- $\{0\}$, P są ideałami. Każdy ideał $I \neq P$ nazywamy *właściwym*

- Ideał I zawiera element odwracalny $\Leftrightarrow \ I = P$

- Wybierzmy $a_1, \dots, a_k \in P$. Wtedy

  $$\langle a_1, \dots, a_k \rangle := \{p_1 a_1 + \cdots + p_k a_k \mid p_1, \dots, p_k \in P\}$$

  jest ideałem. Mówimy, że ideał I jest *generowany* przez $a_1, \dots, a_k$, jeżeli istnieją takie $a_1, \dots, a_k \in I$, że $I = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$. W takim wypadku I jest ideałem *skończenie generowanym*

Definicja. $\mathbf{m}(n) = \mathbf{m} = \{f \in \mathcal{E}(n) \mid f(\mathbf{0}) = 0\}$ jest ideałem właściwym algebry $\mathcal{E}(n)$.

Ćwiczenie 2.2 *Dla kiełka* $f \in \mathcal{E}$ *istnieje dokładnie jeden element* $r \in \mathbf{m}$ *taki, że* $f = f(\mathbf{0}) + r$.

W szczególności, pierścień ilorazowy $\mathcal{E}/\mathbf{m}$ *jest izomorficzny z* $\mathbb{R}$.

Fakt 2.3 $\mathbf{m}$ *jest ideałem maksymalnym.*

Fakt 2.4 $\mathcal{E}(n)$ *jest pierścieniem lokalnym, tzn. w pierścieniu* $\mathcal{E}(n)$ *jedynym ideałem maksymalnym jest* $\mathbf{m}$.

Przykład. $C^\infty(n)$ nie jest pierścieniem lokalnym.

- *wielowskaźnik* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
- $\alpha\,! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$
- $D^\alpha f = \partial^{|\alpha|} f / \partial x^\alpha = \partial^{|\alpha|} f / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ – jednomian stopnia $|\alpha|$

Twierdzenie 2.5 (Wzór Taylora) *Jeżeli* $f \in C^\infty(n)$ *(odp.* $\mathcal{E}(n)$*) oraz* $k \geq 1$*, to istnieją* $g_\alpha \in C^\infty(n)$ *(odp.* $\mathcal{E}(n)$*) dla wszystkich wielowskaźników* α *stopnia* $|\alpha| = k$ *takie, że*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{D^\alpha f(\mathbf{0})}{\alpha\,!} x^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} g_\alpha(x) x^\alpha \ ,$$

oraz $g_\alpha(\mathbf{0}) = D^\alpha f(\mathbf{0})/\alpha\,!$.

Wniosek 2.6 *Jeżeli* $f \in C^\infty(n)$ *(odp.* $\mathcal{E}(n)$*), to istnieją* $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(n)$ *(odp.* $\mathcal{E}(n)$*) takie, że*

$$f(x) = f(\mathbf{0}) + x_1 g_1(x) + \cdots + x_n g_n(x)$$

oraz $g_i(\mathbf{0}) = \partial f / \partial x_i(\mathbf{0})$.

Fakt 2.7 *Ideał* $\mathbf{m}(n)$ *jest generowany przez kiełki* $x_1, \dots, x_n$.

I, J – ideały w pewnym pierścieniu. Wtedy

- $I \cdot J = \{a_1 b_1 + \cdots + a_s b_s \mid s \geq 1,\ a_i \in I,\ b_i \in J\}$
- $I \cdot J \subset I \cap J$, więc $I \cdot J \subset I$, $I \cdot J \subset J$

- $I^k = \underbrace{I \cdot I \cdots I}_{k} = \{\sum_{sk.} c_1 \cdots c_k \mid c_i \in I\}$ jest ideałem
- $I \supset I^2 \supset \cdots \supset I^k \supset \cdots$
- Jeżeli $g_1, \ldots, g_p \in I$ generują ideał I, to zbiór elementów postaci $g_1^{\alpha_1} \cdots g_p^{\alpha_p}$ (gdzie $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = k$) generuje I^k.
- $\mathbf{m}^k(n) = \underbrace{\mathbf{m}(n) \cdots \mathbf{m}(n)}_{k}$ jest ideałem w $\mathcal{E}(n)$, przyjmuje się, że $\mathbf{m}^0 = \mathcal{E}$
- $\mathbf{m}^0 \supset \mathbf{m}^1 \supset \mathbf{m}^2 \supset \cdots \supset \mathbf{m}^k \supset \cdots$

Fakt 2.8 *Jednomiany x^α stopnia k generują $\mathbf{m}^k$, tzn:*

$$f \in \mathbf{m}^k \;\Leftrightarrow\; f = \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha g_\alpha(x) = \sum_{|\alpha|=k} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} g_\alpha(x) \ .$$

W szczególności, $\mathbf{m}^k$ jest skończenie generowany.

Lemat 2.9 $f \in \mathbf{m}^k \;\Rightarrow\; \partial f/\partial x_i \in \mathbf{m}^{k-1}$.

Fakt 2.10 $\mathbf{m}^k = \{f \in \mathcal{E} \mid \forall\ |\alpha| < k \ \ D^\alpha f(\mathbf{0}) = 0\ \}$.

Fakt 2.11 *Kiełek f należy do $\mathbf{m}^k$ i nie należy do $\mathbf{m}^{k+1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\ |\alpha| < k \ \ : \ \ D^\alpha f(\mathbf{0}) = 0 \ \ \textit{oraz} \ \ \exists\ \beta \ \ : \ \ |\beta| = k\ ,\ D^\beta f(\mathbf{0}) \neq 0\ ,$$

czyli w rozwinięciu f w szereg Taylora wystepują wyłącznie składniki stopnia $\geq k$ i przynajmniej jeden składnik stopnia k jest niezerowy.

Przykład.
- $\sin xy$ należy do $\mathbf{m}^2(2)$, ale nie należy do $\mathbf{m}^3(2)$
- $\cos xy \notin \mathbf{m}(2)$
- $\cos xy - 1 \in \mathbf{m}^4(2)$, ale nie należy do $\mathbf{m}^5(2)$.

Ćwiczenie 2.12 *Dla $f \in \mathcal{E}(n)$:*

$$f(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; f \in \langle x_{p+1}, \ldots, x_n \rangle \ .$$

Ćwiczenie 2.13 *Jeżeli* $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{E}(p)$*, tzn.* $g_i = g_i(x_1, \dots, x_p)$*, to istnieje izomorfizm*

$$\mathcal{E}(p)/\left\langle g_1, \dots, g_s \right\rangle \simeq \mathcal{E}(n)/\left\langle g_1, \dots, g_s, x_{p+1}, \dots, x_n \right\rangle.$$

Jeżeli ponadto $g_1, \dots, g_s \in \mathbf{m}(p)$*, to*

$$\mathbf{m}(p)/\left\langle g_1, \dots, g_s \right\rangle \simeq \mathbf{m}(n)/\left\langle g_1, \dots, g_s, x_{p+1}, \dots, x_n \right\rangle .$$

Wskazówka. Pokaż, że jądrem surjektywnego homomorfizmu

$$\mathcal{E}(n) \ni f \mapsto f(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) \in \mathcal{E}(p)/\left\langle g_1, \dots, g_s \right\rangle$$

jest $\langle g_1, \dots, g_s, x_{p+1}, \dots, x_n \rangle$.

3 Kongruencje, pierścień ilorazowy

Niech I będzie ideałem w pierścieniu P.

- Relacja $a \equiv b \;\Leftrightarrow\; a - b \in I$ jest relacją równoważności.
- $p \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in I$.
- Jeżeli $a_1 \equiv a_2$ oraz $b_1 \equiv b_2$, to wtedy $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2$ oraz $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2$.
- Klasy abstrakcji relacji "$\equiv$" nazywamy *warstwami.* Warstwa stowarzyszna z elementem p jest zbiorem postaci $\{p + a \mid a \in I\}$. Oznaczac ją będziemy symbolem $p + I$ lub $[p]$.
- Zbiór klas abstrakcji oznaczamy symbolem P/I jest pierścieniem z działaniami zdefiniowanymi w naturalny sposób na reprezentantach warstw:
  $$[p] + [q] = [p + q]$$
  $$[p] \cdot [q] = [p \cdot q]$$
  Pierscień P/I jest nazywany *pierścieniem ilorazowym.*
- Jeżeli P jest $\mathbb{R}$–algebrą, to również P/I jest $\mathbb{R}$–algebrą. W takim wypadku P/I jest przestrzenią wektorową wymiaru $\dim_R(P/I)$.
- Odwzorowanie $\kappa : P \;\rightarrow\; P/I$ zdefiniowane jako $\kappa(p) = [p]$ jest surjektywnym homomorfizmem, ker $\kappa = I$.

- κ jest nazywane *kanonicznym homomorfizmem.*

Przykład. Weźmy ideał $I = \langle x^3 - y^3, 2xy - yz, z^3 + xyz\rangle$ w $\mathcal{E}(3)$.

```
SINGULAR
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> ideal i=x3-y3,2xy-yz,z3+xyz;
> ideal I=std(i);
> vdim(I);
18
> poly f=3-7x+12y2-xyz+5x6-18x2y2z2;
> poly wf=NF(f,I,2);
> wf;
3-7x+12y2+z3
> exit;
```

W tym przypadku $\dim_R(\mathcal{E}/I) = 18$, warstwa $[f]$ jest reprezentowana przez $3 - 7x + 12y^2 + z^3$.

W ten sposób można też sprawdzać, czy dwa kiełki reprezentują tą samą warstwę:

$$f \equiv g \quad \Leftrightarrow \quad \mathtt{NF(f,I,2)} = \mathtt{NF(g,I,2)}$$

Można też sprawdzać, czy kiełek należy do ideału:

$$f \in I \quad \Leftrightarrow \quad \mathtt{NF(f,I,2)} = \mathtt{0}$$

4 Dżety

Pierścień ilorazowy $\mathcal{E}/\mathbf{m}^{k+1}$ nazywamy *przestrzenią k-dżetów* w $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ gładkich funkcji z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, lub krócej przestrzenią k-dżetów w zerze.

$j^k : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathbf{m}^{k+1}$ – kanoniczny homomorfizm

Warstwę kiełka $f \in \mathcal{E}$ oznaczamy $j^k(f)$ lub $j^k f$, i nazywamy *k-dżetem* kiełka f w punkcie $\mathbf{0}$, lub krócej k-dżetem kiełka.

Przykład.

```
SINGULAR
> ring r=0,(x,y,z),ds;
```

```
> poly f=(x-y+z)*(2x+3y+5z)-4xyz+7*(x-y)^4+x2yz2;
> f;
2x2+xy-3y2+7xz-2yz+5z2-4xyz+7x4-28x3y+42x2y2-28xy3+7y4+x2yz2
> NF(f,maxideal(4),2);
2x2+xy-3y2+7xz-2yz+5z2-4xyz
```

W typ przypadku $j^3(f) = 2x^2 + xy - 3y^2 + 7xz - 2yz + 5z^2 - 4xyz$

k-dżet jest wyznaczony jednoznacznie przez rozwiniecie kiełka f w szereg Taylora k-tego stopnia:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^\alpha f(\mathbf{0})}{\alpha\,!} x^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} g_\alpha(x) x^\alpha}_{\in \mathbf{m}^{k+1}} \Rightarrow$$

$$j^k(f) = j^k\left(\sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^\alpha f(\mathbf{0})}{\alpha\,!} x^\alpha\right)$$

Fakt 4.1 $j^k(f) = j^k(g) \;\Leftrightarrow\; \forall\ |\alpha| \le k \;\; D^\alpha f(\mathbf{0}) = D^\alpha g(\mathbf{0})$.

Przykład. $j^5(1 - \cos xy) = j^5(x^2y^2/2)$.

Wniosek 4.2 *Jeżeli* $p = \sum a_\alpha x^\alpha$ *jest wielomianem oraz* $j^k(p) = j^k(f)$, *to*

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha x^\alpha = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^\alpha f(\mathbf{0})}{\alpha\,!} x^\alpha$$

Ćwiczenie 4.3 • $\mathcal{E}/\mathbf{m}^{k+1}$ *jest pierścieniem lokalnym.*

- *W pierścieniu* $\mathcal{E}(1)/\mathbf{m}^{k+1}(1)$, *elementem odwrotnym do* $1 - x$ *jest* $1 + x + \cdots + x^k$.

- *Znajdź <u>wielomian</u>, który jest odwrotnością elementu* $3 + x_1 - x_1x_2$ *w pierścieniu* $\mathcal{E}(2)/\mathbf{m}^5(2)$.

5 Lemat Nakayamy

Lemat 5.1 *Niech (A, m) będzie pierścieniem lokalnym. Jeżeli $z \in m$, to $1 + z$ jest odwracalny w A.*

Twierdzenie 5.2 (Lemat Nakayamy I) *Niech (A, m) będzie pierścieniem lokalnym, oraz niech $I, J \subset A$ będą takimi ideałami, że I jest skończenie generowany oraz $I \subset J + m \cdot I$.*

Wtedy $I \subset J$.

Twierdzenie 5.3 (Lemat Nakayamy II) *Jeżeli (A, m) jest pierścieniem lokalnym, I – skończenie generowanym ideałem oraz $I \subset m \cdot I$, to $I = \{0\}$.*

Wniosek 5.4 *Niech $(A, m) = (\mathcal{E}, \mathbf{m})$. Ponieważ ideał $\mathbf{m}^k$ jest skończenie generowany, to poniższe inkluzje są równoważne:*

(i) $\exists\ k\ :\ \mathbf{m}^k \subset \mathbf{m} \cdot I + \mathbf{m}^{k+1}$,

(ii) $\exists\ k\ :\ \mathbf{m}^k \subset \mathbf{m} \cdot I$.

Twierdzenie 5.5 *Niech I będzie ideałem w $\mathcal{E}$. Wtedy*

$$\dim_R \mathcal{E}/I < \infty \iff \exists\ \ell\ \ \mathbf{m}^\ell \subset I\ .$$

Twierdzenie 5.6 .

$$\dim_R \mathcal{E}/I < \infty \iff \exists\ k\ \ \mathbf{m}^k \subset \mathbf{m} \cdot I\ .$$

Ćwiczenie 5.7 *Niech $J \subset \mathcal{E}$ będzie ideałem. Jeżeli*

$$\max\{|\alpha|\ :\ x^\alpha \notin J\} < \ell,$$

to $\mathbf{m}^\ell \subset J$, więc również $\dim_R(\mathcal{E}/J) < \infty$.

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> LIB ''rootsmr.lib'';
> ideal i1=x3-5xyz2+x4,z5+21xy2-x3z,z4-5xyz2+y3;
> ideal I1=std(i1);
```

```
> vdim(I1);
41
> qbase(I1);
1
x
.........
y2z6
z8
z9
z10
```

Więc $\mathbf{m}^{11} \subset I_1$, oraz $\dim_R(\mathcal{E}/I_1) = 41$.

Ćwiczenie 5.8 *Niech $J \subset \mathcal{E}(n)$ będzie ideałem generowanym przez wielomiany.*

Jeżeli dla pewnego $1 \leq i \leq n$ w żadnym z generatorów nie pojawia się niezerowy składnik postaci ax_i^p, to $\dim \mathcal{E}/J = \infty$.

Przykład. `SINGULAR`

```
> ideal i2=x2-2xy+y2,xz-2xyz, xy-yz+x2y;
> ideal I2=std(i2);
> vdim(I2);
-1
```

W żadnym z generatorów nie pojawia się niezerowy składnik az^p. Dlatego $\dim_R(\mathcal{E}/I_2) = \infty$.

Fakt 5.9 *Niech $J \subset \mathcal{E}(n)$ będzie ideałem* **właściwym** *generowanym przez skończoną rodzinę kiełków.*

Jeżeli liczba generatorów jest mniejsza niż n, to $\dim \mathcal{E}/J = \infty$. $\square$

Przykład. `SINGULAR`

```
> ideal i3=x3-2xy+y2, z2-2xyz;
> ideal I3=std(i3);
> vdim(I3);
```

-1

Ideał $I_3 \subset \mathcal{E}(3)$ ma dwa generatory. Dlatego $\dim_R(\mathcal{E}(3)/I_3) = \infty$.

6 Kiełki zdeterminowane

Załóżmy, że $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalnym odwzorowaniem posiadającym różniczkowalne odwzorowanie odwrotne, oraz $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f = g \circ h$. Wtedy

- Dla każdej wartości $y_0 \in \mathbb{R}$, odwzorowanie h przekształca homeomorficznie poziomicę $f^{-1}(y_0)$ w poziomicę $g^{-1}(y_0)$.
- Odwzorowanie h przekształca homeomorficznie zbiór punktów krytycznych funkcji f w zbiór punktów krytycznych funkcji g.

$\mathcal{B}(n) = \mathcal{B}$ – zbiór odwracalnych, względem operacji $\circ$, kiełków
$h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ klasy C^∞ posiadających kiełek odwrotny
$h^{-1} : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ klasy C^∞.

Uwaga. Kiełek $x^3 : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ jest klasy C^∞ i posiada kiełek odwrotny $\sqrt[3]{x}$. Kiełek x^3 nie należy do $\mathcal{B}(1)$, bo kiełek odwrotny jest wprawdzie ciągły, ale nie jest klasy C^∞.

Kiełek $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ należy do $\mathcal{B}(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz pochodnej $Dh(\mathbf{0})$ (będąca macierzą kwadratową $n \times n$) ma niezerowy wyznacznik, a więc jest macierzą odwracalną.

Ćwiczenie 6.1 $(\mathcal{B}, \circ)$ *jest nieprzemienną grupą. (Należy wykorzystać Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej.)*

Grupa $\mathcal{B}(n)$ działa na $\mathcal{E}(n)$:

$$f \in \mathcal{E}(n),\ h \in \mathcal{B}(n) \text{ to } \ f \circ h \in \mathcal{E}(n)\ ;$$

inaczej mówiąc jest to zmiana współrzędnych w dziedzinie kiełka f.

Definicja. Powiemy, że kiełki $f, g \in \mathcal{E}(n)$ są *prawo-równoważne*, jeżeli istnieje $h \in \mathcal{B}(n)$ taki, że $g = f \circ h$.

Przykład. Kiełki $f = 4+2x-3y$, $g = 4+7x-6y$ są prawo-równoważne: wystarczy wziąć $h(x, y) = (5x, x + 2y)$, i wtedy

$$f \circ h = 4 + 2(5x) - 3(x + 2y) = 4 + 7x - 6y\ .$$

Uwaga. Jeżeli kiełki f oraz g są prawo-równoważne, to $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})$.

Przykład. Kiełki $f = 3+x-y$, $g = 1+x-y$ nie są prawo-równoważne.

Fakt 6.2 *Załóżmy, że kiełki $f, g \in \mathcal{E}(n)$ są prawo-równoważne. Wtedy*

$$\forall\ i \quad : \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ j \quad : \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{0}) = 0,$$

więc

$$\exists\ i \quad : \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ j \quad : \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \neq 0.$$

Wniosek 6.3 *Załóżmy, że kiełki $f, g \in \mathcal{E}(n)$ są prawo-równoważne. Wtedy $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})$ oraz*

$$f(x) - f(\mathbf{0}) \in \mathbf{m}^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) - g(\mathbf{0}) \in \mathbf{m}^2$$

Przykład. Kiełki $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ nie są prawo-równoważne. Wprawdzie $f(\mathbf{0}) = 0 = g(\mathbf{0})$, ale $f \notin \mathbf{m}^2$ oraz $g \in \mathbf{m}^2$.

Definicja. Niech $f \in \mathcal{E}(n)$. Macierz

$$H(f) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} \right]_{i,j=1}^{n}$$

nazywamy *Hessjanem* f. (Czasami wyznacznik tej macierzy jest również nazywany Hessjanem.)

Składniki rzędu 2 rozwięcia f w szereg Taylora

$$\omega(f) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{0}) x_i x_j$$

definiują formę kwadratową $\omega(f)$. Macierz tej formy jest równa $\frac{1}{2}H(f)(\mathbf{0})$.

Fakt 6.4 *Załóżmy, że kiełki $f, g \in \mathcal{E}(n)$ są prawo-równoważne, tzn. $g = f \circ h$, $h \in \mathcal{B}$, oraz $f(x) - f(\mathbf{0}) \in \mathbf{m}^2$, $g(x) - g(\mathbf{0}) \in \mathbf{m}^2$.*

Wtedy $\omega(g) = \omega(f) \circ Dh(\mathbf{0})$, czyli formy $\omega(f), \omega(g)$ są liniowo-równoważne.

Fakt 6.5 *Formy kwadratowe są liniowo-równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ich macierze mają ten sam rząd r oraz sygnaturę s, czyli każda z nich jest równoważna takiej formie kanonicznej*

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+m}^2 \ ,$$

że $k + m = r$, $k - m = s$. (Wtedy $k = (r + s)/2$, $m = (r - s)/2$.)

Fakt 6.6 *Niezerowy wielomian jednorodny $w(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ stopnia 2 jest liniowo-równoważny z jednym z wielomianów: $\pm x^2, xy, \pm(x^2 + y^2)$.*

Przykład. Kiełki $f = x^2 + y^2$, $g = x^2 - y^2$ nie są prawo-równoważne. W pierwszym przypadku $r = 2, s = 2$, w drugim $r = 2, s = 0$.

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> LIB ''linalg.lib'';
> LIB ''rootsmr.lib'';
> poly f=2+x2-6xy+9y2+4xz-12yz+4z2+xyz-3x2z2;
> poly g=2-9x2+12xy-4y2-30xz+20yz-25z2-x2y+z4;
> matrix Hf=jacob(jacob(f));
> matrix Hg=jacob(jacob(g));
> matrix Hf0=subst(Hf,x,0,y,0,z,0);
> matrix Hg0=subst(Hg,x,0,y,0,z,0);
> mat_rk(Hf0);
1
> symsignature(Hf0);
1
> mat_rk(Hg0);
1
> symsignature(Hg0);
-1
```

Kiełki f, g nie są prawo-równoważne. W pierwszym przypadku $r = 1, s = 1$, w drugim $r = 1, s = -1$.

Ćwiczenie 6.7 *Prawo-równoważność jest relacją równoważności w $\mathcal{E}(n)$.*

Ćwiczenie 6.8 *Załóżmy, że kiełki f, g są prawo-równoważne. Wtedy*

$$f \in \mathbf{m}^k \ \Leftrightarrow \ g \in \mathbf{m}^k \ .$$

Twierdzenie 6.9 *Niezerowy wielomian jednorodny $w(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ stopnia 3 jest liniowo-równoważny z jednym z wielomianów: $x^3, x^2y, x^3-xy^2, x^3+y^3$.*

Jeżeli dany jest niezerowy wielomian jednorodny $w(x, y)$ stopnia 3, to istnieje prosta metoda rozstrzygnięcia z którym wielomianem z powyższej listy jest on równoważny:

Załóżmy, że wielomian $w(x, 0)$ (lub $w(0, x)$, lub $w(x, x)$, lub ...) jest niezerowy. Wtedy $W(x) = w(x, 1)$ (lub $W(x) = w(1, x)$, lub $W(x) = w(x + 1, x)$, lub ...) jest niezerowym wielomianem stopnia 3.

- jeżeli $W(x)$ ma jeden trzykrotny pierwiastek, to $w(x, y)$ jest równoważny x^3
- jeżeli $W(x)$ ma jeden jednokrotny pierwiastek oraz jeden dwukrotny pierwiastek, to $w(x, y)$ jest równoważny x^2y
- jeżeli $W(x)$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to $w(x, y)$ jest równoważny $x^3 - xy^2$
- jeżeli $W(x)$ ma jeden jednokrotny pierwiastek rzeczywisty, to $w(x, y)$ jest równoważny $x^3 + y^3$

Załóżmy, że $W(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_4$. Podstawmy

$$V(x) := \frac{1}{a_0}W(x - \frac{a_1}{3a_0}).$$

Wtedy $V(x) = x^3 + px + q$. Zdefiniujmy

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}.$$

Wtedy:

- jeżeli $\Delta < 0$, to $W(x)$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste
- jeżeli $\Delta = 0$, to $W(x)$ ma albo jeden trzykrotny pierwiastek, albo jeden jednokrotny pierwiastek oraz jeden dwukrotny pierwiastek
- jeżeli $\Delta > 0$, to $W(x)$ ma jeden jednokrotny pierwiastek rzeczywisty

Przykład. SINGULAR

```
> ring r=0,(x,y),ds;
> poly w=x3-5x2y+2xy2-7y3;
> poly W=subst(w,y,1);
> W;
-7+2x-5x2+x3
> poly V=subst(W,x,x+5/3);
> V;
-349/27-19/3x+x3
> (-349/27)^2+4/27*(-19/3)^3;
1165/9
```

Wielomian $w(x,y) = x^3 - 5x^2y + 2xy^2 - 7y^3$ jest liniowo-równoważny $x^3 + y^3$.

Definicja. Kiełek $f \in \mathcal{E}$ jest k-zdeterminowany, jeżeli każdy kiełek $g \in \mathcal{E}$ mający taki sam k-dżet co f jest prawo równoważny f, tzn. jeżeli

$$\forall\ g \in \mathcal{E} \quad : \quad j^k(f) = j^k(g) \ \Rightarrow \ f \ \text{ jest prawo-równoważny } g\ .$$

Dżet $j^k(f)$ nazywamy wtedy *wystarczającym.*

Fakt 6.10 *Nie istnieją kiełki* 0*-zdeterminowane.*

Fakt 6.11 *Załóżmy, że* $f = f(x_1,\ldots,x_n,y) \in \mathcal{E}(n+1)$ *jest takim kiełkiem, że* $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0}) \neq 0$. *Wtedy w otoczeniu początku układu można zmienić współrzędne na* $(x_1,\ldots,x_n,z)$ *tak, że w nowych współrzędnych*

$$f = f(x_1,\ldots,x_n,z) = f(\mathbf{0}) + z\ .$$

W szczególności, kiełek f *oraz kiełek* $f(\mathbf{0})+y$ *są prawo–równoważne.*

Wniosek 6.12 *Załóżmy, że* $f,g \in \mathcal{E}(n)$ *oraz istnieją indeksy* i,j *takie, że* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) \neq 0$ *oraz* $\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \neq 0$.

Wtedy kiełki f,g *są prawo-równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy* $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})$.

Fakt 6.13 *Jeżeli* $f \in \mathcal{E}(n)$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) \neq 0$ *dla pewnego* $1 \le i \le n$, *to* f *jest* 1*-zdeterminowany.*

Fakt 6.14 *Jeżeli f jest k-zdeterminowany oraz $j^k(f) = j^k(g)$, to g też jest k-zdeterminowany.*

(Więc k-zdeterminowanie kiełka jest raczej własnością wielomianu

$$j^k(f) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(\mathbf{0})}{\alpha!} x^\alpha$$

niż samego kiełka f.)

7 Twierdzenie Mathera

Definicja. Jeżeli $f \in \mathcal{E}(n)$, wtedy ideał $\langle \partial f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$, tzn. ideał generowany przez wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 1, nazywamy *ideałem Jacobiego* kiełka f.

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> poly f=x2+y3+z4;
> ideal j=jacob(f);
> j;
j[1]=2x
j[2]=3y2
j[3]=4z3
```

Twierdzenie 7.1 (Mather) *Niech $f \in \mathcal{E}(n)$ oraz*

$$\mathbf{m}^k(n) \subset \mathbf{m}(n) \langle \partial f \rangle + \mathbf{m}^{k+1}(n) \ .$$

Wówczas kiełek f jest k-zdeterminowany.

Fakt 7.2 $\mathbf{m}^k(n) \subset \mathbf{m}(n) \langle \partial f \rangle + \mathbf{m}^{k+1}(n)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{m}^k(n) \subset \mathbf{m}(n) \langle \partial f \rangle$.

Wniosek 7.3 *Jeżeli* $\mathbf{m}^k \subset \mathbf{m}(n) \langle \partial f \rangle$, *to f jest k-zdeterminowany.*

Wniosek 7.4 *Jeżeli wymiar* $\dim \mathcal{E} / \langle \partial f \rangle$ *jest skończony, to f jest k-zdeterminowany dla pewnego k.*

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> poly f=x2y2z2;
```

```
> ideal j=jacob(f);
> ideal J=std(j);
> vdim(J);
-1
> poly f=x3y-2y4z+3z3x-x2y2z2;
> ideal j=jacob(f);
> ideal J=std(j);
> vdim(J);
36
> LIB ''rootsmr.lib'';
> ideal m=maxideal(1);
> ideal i=m*j;
> ideal I=std(i);
> qbase(I);
1
x
y
.........
xy6
y7
xy7
```

- Kiełek $x^2y^2z^2$ może nie być skończenie zdeterminowany dla żadnego k
- Kiełek $f = x^3y - 2y^4z + 3z^3x - x^2y^2z^2$ jest 9-zdeterminowany, bo $\mathbf{m}^9 \subset \mathbf{m}\langle\partial f\rangle$
- Kiełek $x^3y - 2y^4z + 3z^3x - x^2y^2z^2 + 21x^3y^4z^5 - 53x^5z^5$ jest prawo–równoważny $x^3y - 2y^4z + 3z^3x - x^2y^2z^2$

Twierdzenie 7.5 *Jeżeli f jest k-zdeterminowany, to $\mathbf{m}^{k+1} \subset \mathbf{m}\,\langle\partial f\rangle$.*

Więc jeżeli istnieje taki jednomian x^α stopnia $k+1$, że $x^\alpha \notin \mathbf{m}\langle\partial f\rangle$, to f nie jest k zdeterminowany.

Wniosek 7.6 *Kiełek f jest skończenie zdeterminowany dla pewnego k wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \mathcal{E}/\langle\partial f\rangle < \infty$.*

Np. kiełek $x^2y^2z^2$ z poprzedniego Przykładu nie jest skończenie zdeterminowany dla żadnego k.

Przykład. SINGULAR

```
> ring r=0,(x,y),ds;
> poly f=x4+y4;
> ideal j=jacob(f);
> ideal J=std(j);
> vdim(J);
9
> LIB ''rootsmr.lib'';
> ideal m=maxideal(1);
> ideal i=m*j;
> ideal I=std(i);
> qbase(I);
1
x
......
xy2
y3
x2y2
```

- $\mathbf{m}^5 \subset \mathbf{m}\langle \partial f \rangle$, więc $f = x^4 + y^4$ jest 5–zdeterminowany
- ponieważ jednomian x^2y^2 stopnia $4 = 3 + 1$ nie należy do $\mathbf{m}\langle \partial f \rangle$, więc kiełek $x^4 + y^4$ nie jest 3-zdeterminowany.

Ćwiczenie 7.7 *Kiełki* $(\cos x - 1)^2 - (\cos y - 1)^2 + \sin^3(xy)$ *oraz* $x^4 - y^4$ *są prawo-równoważne.*

Ćwiczenie 7.8 *Kiełki* $x^3 + y^3,\ x^3 - xy^2$ *są 3-zdeterminowane.*

Niech $H \in \mathcal{B}(n)$. Z odwzorowaniem H można stowarzyszyć odwzorowanie $H^* : \mathcal{E}(n) \to \mathcal{E}(n)$, które kiełkowi $f \in \mathcal{E}(n)$ przyporządkowuje $f \circ H \in \mathcal{E}(n)$, czyli $H^*(f) = f \circ H$.

Ćwiczenie 7.9
- H^* *jest homomorfizmem* $\mathbb{R}$*-algebr, nazywanym* homomorfizmem indukowanym *przez* H
- $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$
- $(H_2 \circ H_1)^* = (H_1)^* \circ (H_2)^*$

Fakt 7.10 H^* *jest izomorfizmem.*

Ćwiczenie 7.11 *Jeżeli* (A, I), (B, J) *są pierścieniami lokalnymi oraz* $h : A \to B$ *jest izomorfizmem, to* $J = h(I)$, *jak również* $J^k = h(I^k)$.

Wniosek 7.12 $H^*(\mathbf{m}) = \mathbf{m}$, $H^*(\mathbf{m}^k) = \mathbf{m}^k$.

Twierdzenie 7.13 *Niech* $f \in \mathcal{E}(n)$. *Załóżmy, że* f *ma* niezdegenerowany punkt krytyczny *w* $\mathbf{0}$, *tzn.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{0}) = 0 \ ,$$

oraz

$$\det \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0}) \right] \neq 0 \ .$$

Wtedy f *jest 2-zdeterminowany, więc w szczególności jest prawo-równoważny wielomianowi*

$$f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0}) x_i x_j \ = \ f(\mathbf{0}) + \omega(f)$$

Ćwiczenie 7.14 *Załóżmy, że kiełki* f, g *mają niezdegenerowany punkt krytyczny w* $\mathbf{0}$. *Udowodnij, że* f, g *są prawo–równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy* $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0})$ *oraz formy kwadratowe* $\omega(f), \omega(g)$ *mają tą samą sygnaturę.*

Przykład.`SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> poly f=1+x2-2xy-3y2+2xz+4yz-z2-3xyz+x5;
> poly g=1-4xy+y2+16xz-6yz+9z2+4x4-xy2z;
> matrix Hf=jacob(jacob(f));
> matrix Hg=jacob(jacob(g));
> matrix Hf0=subst(Hf,x,0,y,0,z,0);
> det(Hf0);
-8
> matrix Hg0=subst(Hg,x,0,y,0,z,0);
> det(Hg0);
-32
> LIB ''rootsmr.lib'';
> symsignature(Hf0);
```

```
1
> symsignature(Hg0);
1
```

- kiełki $f = 1 + x^2 - 2xy - 3y^2 + 2xz + 4yz - z^2 - 3xyz + x^5$, $g = 1 - 4xy + y^2 + 16xz - 6yz + 9z^2 + 4x^4 - xy^2z$ mają niezdegenerowany punkt krytyczny w $\mathbf{0}$
- obie formy kwadratowe $\omega(f), \omega(g)$ mają sygnaturę równą 1
- oba kiełki f, g są prawo–równoważne z kiełkiem $1 + x^2 + y^2 - z^2$. W szczególności f, g są prawo–równoważne.

Istnieją metody pozwalające oszacować z góry liczbę **zdegenerowanych** punktów krytycznych wielomianu w $\mathbb{C}^n$, więc tym bardziej w $\mathbb{R}^n$:

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),dp;
```

(Uwaga: należy zadeklarować porządek "dp" !)

```
> poly f=x2-y2+2z2-xyz+x3y+4z3+y3;
> ideal j=jacob(f);
> poly h=det(jacob(jacob(f)));
> ideal i=j,h;
> ideal I=groebner(i);
> vdim(I);
0
```

Wielomian f nie ma zdegenerowanych punktów krytycznych, więc wszystkie punkty krytyczne są niezdegenerowane.

Przykład. `SINGULAR`

```
> poly g=x3-y3+z2-xyz+x2y-yz3+zx3;
> ideal j=jacob(g);
> poly h=det(jacob(jacob(g)));
> ideal i=j,h;
> ideal I=groebner(i);
> vdim(I);
3
```

Wielomian g ma co najwyżej 3 zdegenerowane punkty krytyczne, pozostałe punkty krytyczne są niezdegenerowane.

8 Kowymiar kiełka

Definicja. Załóżmy, że $f \in \mathbf{m}^2(n)$. (Wtedy $\langle \partial f \rangle \subset \mathbf{m}(n)$.)
Kowymiarem kiełka f nazywamy liczbę

$$\operatorname{codim} f = \dim \ \mathbf{m}(n) / \langle \partial f \rangle$$

Fakt 8.1 $\operatorname{codim} f = \dim \mathcal{E}(n) / \langle \partial f \rangle - 1$.

Ćwiczenie 8.2 *Jeżeli* $f \in \mathbf{m}^2(n)$ *oraz* r *jest rzędem symetrycznej macierzy kwadratowej* $[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})]$, *to po* <u>*liniowej*</u> *zamianie współrzędnych można przedstawić kiełek* f *w postaci*

$$f = \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_r^2 + f_1 \ ,$$

gdzie $f_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{m}^3(n)$.

Lemat 8.3 (O rozszczepianiu) *Jeżeli* $f \in \mathbf{m}^2(n)$ *oraz* r *jest rzędem symetrycznej macierzy kwadratowej* $[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})]$, *to istnieje* $H \in \mathcal{B}(n)$ *taki, że*

$$f \circ H = \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_r^2 + g \ ,$$

gdzie $g = g(x_{r+1}, \ldots, x_n) \in \mathbf{m}^3(n-r)$.

Ćwiczenie 8.4 *Weźmy* $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_p \in \mathbf{m}(n)$. *Jeżeli* $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle g_1, \ldots, g_p \rangle$ *to*

$$\operatorname{rz} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \right] = \operatorname{rz} \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \right] \ .$$

Fakt 8.5 $\operatorname{codim} f = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* f *ma niezdegenerowany punkt krytyczny w* $\mathbf{0}$.

Fakt 8.6 *Jeżeli* $f, g \in \mathbf{m}^2$ *są prawo-równoważne, to*

$$\operatorname{codim} f = \operatorname{codim} g \ ,$$

więc również

$$\dim \mathcal{E} / \langle \partial f \rangle = \dim \mathcal{E} / \langle \partial g \rangle$$

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y),ds;
> poly f=x2y-3xy3+x2y2;
> ideal I=std(jacob(f));
```

```
> vdim(I);
6
> poly g=x2y+xy4+4x2y2;
> ideal J=std(jacob(g));
> vdim(J);
8
```

Kiełki $f = x^2y - 3xy^3 + x^2y^2$, $g = x^2y + xy^4 + 4x^2y^2$ nie są prawo–równoważne, ponieważ codim $f = 6 - 1 = 5$, codim $g = 8 - 1 = 7$.

Fakt 8.7 *Jeżeli g jest takim kiełkiem jak w Lemacie o Rozszczepianiu, to*

$$\operatorname{codim} f \;=\; \operatorname{codim} g\ .$$

9 Klasyfikacja kiełków

Lemat 9.1 $g \in \mathbf{m}^3(p) \;\Rightarrow\; \operatorname{codim} g \geq \binom{p+1}{2}$.

Fakt 9.2 *Jeżeli $f \in \mathcal{E}(n)$ oraz macierz drugich pochodnych $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})\right]$ ma rząd r (ozn. $p = n - r$), to* codim $f \geq \binom{p+1}{2}$.

Fakt 9.3 *Jeżeli* $0 <$ codim $f \leq 5$, *to $p = 1$ lub $p = 2$, i wtedy f jest prawo-równoważny z kiełkiem postaci:*

- $\pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + g(x)$, $g \in \mathbf{m}^3(1)$ *(dla $p = 1$)*
- $\pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + g(x,y)$, $g \in \mathbf{m}^3(2)$ *(dla $p = 2$)*

Wniosek 9.4 *Jeżeli $p \geq 2$, to* codim $f \geq 3 = \binom{2+1}{2}$

Ćwiczenie 9.5 *Jeżeli $g(x) \in \mathbf{m}^2(1)$ oraz $k =$* codim g, *to g jest prawo-równoważny kiełkowi $\pm x^{k+2}$.*

Wniosek 9.6 *Jeżeli $p = 1$ oraz $k =$* codim $f < \infty$, *to f jest prawo-równoważny kiełkowi postaci*

$$\pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 \pm x^{k+2}\ .$$

Wniosek 9.7 *Jeżeli* $\operatorname{codim} f \leq 2$ *to* f *jest prawo równoważny kiełkowi postaci:*

- $\pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_n^2$, *gdy* $\operatorname{codim} f = 0$
- $\pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^3$, *gdy* $\operatorname{codim} f = 1$
- $\pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 \pm x^4$, *gdy* $\operatorname{codim} f = 2$

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y),ds;
> poly f= x2-2xy+y2-x3-x2y-5xy2-y3+x2y2-
3x2y3-6xy4-3y5-3xy6-3y7-y9;
> vdim(std(jacob(f)));
2
```

Widać, że $\omega(f) = (x - y)^2$. Ponieważ $\operatorname{codim} f = 2 - 1 = 1$, więc kiełek f jest prawo–równoważny $x^3 + x_2^2$, lub po prostu $x^3 + y^2$.

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> poly f=-x2+2xy-5y2-12yz-9z2-2xz2+2yz2-4x3y-6x3z-x6;
> vdim(std(jacob(f)));
3
> LIB ''linalg.lib'';
> LIB ''rootsmr.lib'';
> matrix H=jacob(jacob(f));
> matrix H0=subst(H,x,0,y,0,z,0);
> mat_rk(H0);
2
> symsignature(H0);
-2
```

W tym przypadku $\operatorname{codim} f = 3 - 1 = 2$, rząd drugiej pochodnej w $\mathbf{0}$ jest równy 2, sygnatura drugiej pochodnej $s = -2$. Kiełek f jest prawo–równoważny $\pm x^4 - y^2 - z^2$. Później pokażemy, jak sprawdzić czy znak przed jednomianem x^4 jest równy $+1$ czy -1. Gdyby to był -1, to kiełek f ma maksimum w punkcie $\mathbf{0}$.

Weźmy $g \in \mathbf{m}^3(2)$. Wtedy

$$g = \sum_{i+j=3} \frac{1}{i!\,j!}\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial y^j}(\mathbf{0}) x^i y^j + r(x,y) =$$

$$P(x,y) + r(x,y)\ ,$$

gdzie $P = P(x,y)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia 3 dwóch zmiennych oraz $r \in \mathbf{m}^4(2)$.

P jest prawo-równoważny z jednym z wielomianów:

$$x^3 + y^3,\ x^3 - xy^2,\ x^2y,\ x^3,\ 0\ \ .$$

Fakt 9.8 *Jeżeli P jest prawo-równoważny $x^3 + y^3$ lub $x^3 - xy^2$, to f jest prawo-równoważny odpowiednio:*

$$\pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^3 + y^3\ ,$$

$$\pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^3 - xy^2\ ,$$

oraz codim $f = 3$.

Fakt 9.9 *Jeżeli $P = x^2y$, lub $P = x^3$, lub $P = 0$, to* codim $f \geq 4$.

Wniosek 9.10 *Jeżeli* codim $f = 3$, *to f jest prawo-równoważny z jednym z kiełków postaci:*

- $\pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^5$
- $\pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^3 + y^3$
- $\pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^3 - xy^2$

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> poly f = 3x2-2xy+4xz-2yz+z2-4x3+6x2y+2xy2-
2y3-2x2z+2xyz+2y2z+3x4-2x3y-x2y2+
2xy3+y4+2x3z-6x5+4x4y+2x3y2-2x4z+z5+
2x6-2x5y-2x4y2+5y2z4-2x7+10y4z3+x8+
10y6z2+5y8z+y10;
> vdim(std(jacob(f)));
4
> matrix H=jacob(jacob(f));
> matrix H0=subst(H,x,0,y,0,z,0);
```

```
> LIB ''linalg.lib'';
> LIB ''rootsmr.lib'';
> mat_rk(H0);
2
> symsignature(H0);
0
```

W tym przypadku codim $f = 4 - 1 = 3$, rząd drugiej pochodnej w $\mathbf{0}$ jest równy 2, sygnatura drugiej pochodnej $s = 0$. Kiełek f jest prawo–równoważny $x^5 + y^2 - z^2$.

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> poly f= x2+2xy+y2+2xz+2yz+z2+x3-
3x2y+3xy2-y3+z3+2x2yz+2xy2z+3x2z2-
4xyz2+3y2z2+3xz4-3yz4+x2y2z2+z6
> vdim(std(jacob(f)));
4
> LIB ''linalg.lib'';
> LIB ''rootsmr.lib'';
> matrix H=jacob(jacob(f));
> matrix H0=subst(H,x,0,y,0,z,0);
> mat_rk(H0);
1
> symsignature(H0);
1
```

W tym przypadku codim $f = 4 - 1 = 3$, rząd drugiej pochodnej w $\mathbf{0}$ jest równy 1 (więc $p = 3 - 1 = 2$), sygnatura drugiej pochodnej $s = 1$. Kiełek f jest prawo–równoważny $x^3 + y^3 + z^2$ lub $x^3 - xy^2 + z^2$.

Twierdzenie 9.11 *Jeżeli* codim $f = 4$, *to* f *jest prawo-równoważny z jednym z kiełków postaci:*

- $\pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 \pm x^6$
- $\pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^2 y \pm y^4$

Twierdzenie 9.12 *Jeżeli* codim $f = 5$, *to* f *jest prawo-równoważny z jednym z kiełków postaci:*

- $\pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^7$
- $\pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^2 y \pm y^5$

- $\pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2 + x^3 \pm y^4$

10 Ekstrema lokalne

Niech $F \in \mathcal{E}(n)$. Oznaczmy $f = F - F(\mathbf{0})$.

Ćwiczenie 10.1 *Kiełek F ma lokalne ekstremum w $\mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f ma lokalne ekstremum w $\mathbf{0}$.*

W takim przypadku $f \in \mathbf{m}^2(n)$.

Fakt 10.2 *Kiełek*

$$f = g(x_1, \ldots, x_p) \pm x_{p+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2$$

ma lokalne minimum (odp. maksimum) w $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(x_1, \ldots, x_p)$ ma lokalne minimum (odp. maksimum) w $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$ oraz

$$f = g(x_1, \ldots, x_p) + x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

$$(\textit{odp.}) \quad f = g(x_1, \ldots, x_p) - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

Ćwiczenie 10.3 *Spośród kiełków:*

$$\pm x^2, \ldots, \pm x^7,$$

$$x^3 + y^3,\ x^3 - xy^2,\ x^3 \pm y^4,\ x^2 y \pm y^5,\ x^3 \pm y^4$$

tylko trzy kiełki: $\pm x^2$, $\pm x^4$, $\pm x^6$ mają lokalne ekstremum w początku układu.

Twierdzenie 10.4 (Warunek konieczny ekstremum) *Niech $F \in \mathcal{E}$, oraz $f = F - F(\mathbf{0})$. Jeżeli F ma lokalne ekstremum w $\mathbf{0}$, to F ma* punkt krytyczny *w $\mathbf{0}$, czyli pochodne cząstkowe spełniają warunek:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{0}) = 0.$$

Więc również f ma punkt krytyczny w $\mathbf{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{0}) = 0,$$

czyli $f \in \mathbf{m}^2(n)$, oraz $\omega(F) = \omega(f)$.

Załóżmy dodatkowo, że codim $f \leq 5$. *Wtedy macierz formy kwadratowej*

$$\omega(F) := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{0}) x_i x_j$$

ma rząd $r = n$ *oraz* codim $f = 0$, *lub ma rząd* $r = n - 1$ *oraz* codim f *jest równy* 2 *lub* 4.

Jeżeli F *ma lokalne minimum w* $\mathbf{0}$, *to sygnatura formy* $\omega(F)$ *jest równa* $+r$, *jeżeli lokalne maksimum to sygnatura jest równa* $-r$.

Przedstawimy poniżej pewne sposoby sprawdzania istnienia lokalnego minimum funkcji F w punkcie $\mathbf{0}$. Aby sprawdzić, czy F posiada lokalne maksimum wystarczy ją zamienić na $-F$, i zastosować przedstawione poniżej sposoby.

Załóżmy, że F spełnia najprostszy warunek konieczny istnienia ekstremum, tzn. $\mathbf{0}$ jest punktem krytycznym F. Wtedy f ma punkt krytyczny w $\mathbf{0}$, więc $f \in \mathbf{m}^2(n)$.

Zdefiniujmy

$$h(x) = \det\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}(x)\right] = \det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(x)\right] .$$

Przypadek codim $f = 0$

Twierdzenie 10.5 (Warunek dostateczny istnienia ekstremum) *Poniższe warunki są równoważne:*

(i) codim $f = 0$

(ii) f *ma niezdegenerowany punkt krytyczny w* $\mathbf{0}$

(iii) F *ma niezdegenerowany punkt krytyczny w* $\mathbf{0}$

(iv) $h(\mathbf{0}) \neq 0$

(v) rząd macierzy

$$r \;=\; \mathrm{rz}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{0})\right] \;= \mathrm{rz}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{0})\right] \;=\; n$$

Jeżeli jeden z powyższych warunków jest spełniony, oraz sygnatura s formy kwadratowej $\omega(F) = \omega(f)$ spełnia $s = n$, to F oraz f mają lokalne minimum w $\mathbf{0}$.

Przypadek codim $f = 2,\ r = s = n - 1$

Przykład. `SINGULAR`

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
> poly F=5+x2+2xy+2y2+2xz+4yz+2z2-2x2y-2x2z-2xz2-2yz2-2z3+x4+2z4;
> vdim(std(jacob(F)));
3
> LIB ''linalg.lib'';
> LIB ''rootsmr.lib'';
> matrix H=jacob(jacob(F));
> matrix H0=subst(H,x,0,y,0,z,0);
> mat_rk(H0);
2
> symsignature(H0);
2
```

(Sprawdziliśmy, że F spełnia warunki konieczne.)

```
> ideal J=std(jacob(F));
> qbase(J);
1
z
z2
> poly a=z;
```

(Jako a wybieramy "środkowy" jednomian z powyższej listy.)

```
> poly A=a^2;
> poly h=det(H);
> reduce(h,J,2);
48z2
> reduce(A,J,2);
z2
```

Jeżeli współczynniki przed oboma jednomianami mają ten sam znak, to kiełek ma lokalne minimum. W tym przypadku tak jest, więc F ma lokalne minimum.

```
> poly G=5+x2+2xy+2y2+2xz+4yz+2z2-2x2y-2x2z+x4-z4-2xz4-2yz4-2z5+z8;
> vdim(std(jacob(G)));
3
> matrix H=jacob(jacob(G));
> matrix H0=subst(H,x,0,y,0,z,0);
> mat_rk(H0);
2
> symsignature(H0);
2
> ideal J=std(jacob(G));
> qbase(J);
1
z
z2
> poly a=z;
> poly A=a*a;
> poly h=det(H);
> NF(h,J,2);
-48z2
> NF(A,J,2);
z2
```

Jeżeli współczynniki przed oboma jednomianami mają różne znaki, to kiełek nie ma lokalnego minimum. W tym przypadku tak jest, więc G nie ma lokalnego minimum.

Uwaga. Istnieje algorytm, oparty na badaniu sygnatury pewnej formy kwadratowej, pozwalający sprawdzać warunek dostateczny istnienia minimum w przypadku gdy codim $f < \infty$, $r \geq n - 2$, $s = r$.

W szczególności można stosować ten algorytm dla kiełków funkcji dwóch zmiennych mających skończony kowymiar.

11 Katastrofy i bifurkacje

Rozważmy równanie różniczkowe

$$w(x)x' = f(x) \qquad (*) \ ,$$

gdzie $w, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są klasy C^∞, $w > 0$.

Definicja. Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest *punktem równowagi*, gdy $f(x_0) = 0$. W takim przypadku $x(t) \equiv x_0$ jest rozwiązaniem $(*)$.

Definicja. Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest *stabilnym punktem równowagi*, gdy $f(x_0) = 0$ oraz funkcja $f(x)$ maleje w pewnym otoczeniu x_0.

Definicja. Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest *niestabilnym punktem równowagi*, gdy $f(x_0) = 0$ oraz funkcja $f(x)$ rośnie w pewnym otoczeniu x_0.

Niech $p = p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^∞. (Będziemy tą funkcję nazywać *potencjałem*). Niech

$$f(x) \ = \ -p'(x).$$

Fakt 11.1 *Funkcja $p(x)$ ma punkt krytyczny w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $(*)$ ma punkt równowagi w x_0.*

Funkcja $p(x)$ ma lokalne minimum w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $(*)$ ma stabilny punkt równowagi w x_0.

Funkcja $p(x)$ ma lokalne maksimum w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $(*)$ ma niestabilny punkt równowagi w x_0.

Jeżeli $f(x,u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞, to możemy zdefiniować rodzinę równań różniczkowych

$$w(x)x' = f(x,u) \qquad (**)$$

z parametrem $u \in \mathbb{R}$.

Przykład. Rozpatrzmy

$$p(x,u) = x^3 + ux \ ,$$

$$f = -\frac{dp}{dx} = -3x^2 - u \ ,$$

$$x' = -3x^2 - u \qquad (**).$$

- Dla ujemnych wartości parametru u, potencjał $p(x, u)$ ma jedno lokalne maksimum w $x = -\sqrt{-u/3}$, i jedno lokalne minimum w $x = +\sqrt{-u/3}$.
  Więc układ $(**)$ ma jeden niestabilny $(= -\sqrt{-u/3})$, i jeden stabilny punkt równowagi $(= +\sqrt{-u/3})$,

- Dla $u = 0$ potencjał $p(x, u)$ ma jeden punkt krytyczny w $x = 0$, który nie jest ani lokalnym minimum, ani lokalnym maksimum.
  Więc istnieje jeden punkt równowagi $(= 0)$ układu $(**)$, który nie jest ani stabilny, ani niestabilny,

- Dla dodatnich wartości u potencjał $p(x, u)$ nie ma punktów krytycznych, więc nie istnieją punkty równowagi układu $(**)$,

- Jeżeli parametr u rośnie i przekracza wartość $u = 0$, to oba ekstrema lokalne (maksimum i minimum) ”łączą się”, a następnie znikają. Więc punkty równowagi (niestabilny i stabilny) układu $(**)$ też znikają,

- Zauważmy, że dla $u = 0$ oraz $x_0 = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -6x \,|_{(0,0)} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = -1 \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -6 \neq 0$$

Taką zmianę postaci punktów krytycznych, gdy przy przekraczaniu pewnej wartości parametru pojawiają się, lub znikają, dwa lokalne ekstrema (maksimum i minimum), nazywamy **katastrofą "fałda" ("fold")**.

Ćwiczenie 11.2 *Jak zmienia się postać punktów równowagi, gdy*

$$p = x^3 - ux, \qquad p = -x^3 + ux, \qquad p = -x^3 - ux\ .$$

Czym różnią się cztery opisane powyżej katastrofy

Jak widać, badanie katastrof ma naturalny związek z badaniem jak zmieniają się punkty równowagi układów równań różniczkowych z parametrem. Tym ostatnim zagadnieniem zajmuje się *teoria bifurkacji*

Dla ustalonego parametru u, punktami równowagi układu $(**)$ są takie $x \in \mathbb{R}$, że $(x, u) \in f^{-1}(0)$.

Ćwiczenie 11.3 *Jeżeli*

$$f(x_0, u_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \neq 0 \ ,$$

to z Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej, dla każdego parametru u leżącego dostatecznie blisko u_0 istnieje dokładnie jeden punkt równowagi x leżący blisko x_0 taki, że

$$f(x, u) \ = \ 0 \ .$$

Jeżeli x_0 był stabilnym (odp. niestabilnym) punktem równowagi, to x też będzie stabilnym (odp. niestabilnym) punktem równowagi.

Załóżmy teraz, że

$$f(x_0, u_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) \neq 0 \ .$$

Z Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej, istnieje taki kiełek

$$u(x) : (\mathbb{R}, x_0) \to (\mathbb{R}, u_0) \ ,$$

że $f(x, u(x)) \ \equiv \ 0$ oraz w pobliżu (x_0, u_0) krzywa $f^{-1}(0)$ jest wykresem kiełka $u(x)$.

Różniczkując tą równość otrzymujemy:

$$0 \ \equiv \ \frac{\partial}{\partial x} f(x, u(x)) \ = \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)) \cdot u'(x) \ .$$

Po podstawieniu $x = x_0$, $u(x_0) = u_0$ mamy:

$$0 \ = \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) \cdot u'(x_0) \ = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) \cdot u'(x_0)$$

Więc $u'(x_0) = 0$.

Różniczkując ponownie otrzymamy:

$$0 \ \equiv \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, u(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial u \, \partial x}(x, u(x)) \cdot u'(x) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)) \right] \cdot u'(x) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)) \cdot u''(x)$$

Po podstawieniu $x = x_0$, $u = u_0$ mamy:

$$0 \ = \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) \cdot u''(x_0) \ ,$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, u_0) = \ \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) \cdot u''(x_0).$$

Jeżeli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, u_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$

mają ten sam znak, to $u''(x_0) < 0$, więc kiełek $u(x)$ ma lokalne maksimum w x_0.

Wtedy dwa punkty równowagi (jeden stabilny, jeden niestabilny) które istnieją dla $u \in (u_0 - \epsilon, u_0)$ znikną, jeżeli u znajdzie się w przedziale $(u_0, u_0 + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$ – małe).

Jeżeli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, u_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$

mają przeciwny znak, to $u''(x_0) > 0$, więc kiełek $u(x)$ ma lokalne minimum w x_0.

Wtedy dla $u \in (u_0 - \epsilon, u_0)$ nie istnieją punkty równowagi bliskie x_0, a dla $u \in (u_0, u_0 + \epsilon)$ pojawiają się dwa punkty równowagi (stabilny i niestabilny).

Przypadek gdy $\operatorname{codim} p = 1$:

Ćwiczenie 11.4 $p - p(0) \in \mathbf{m}^2(1)$ *oraz* $\operatorname{codim}(p - p(0)) = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}(0) \neq 0 \ .$$

Jeżeli $p = p(x, u)$ jest potencjałem z parametrem u, oraz dla pewnego punktu (x_0, u_0) spełnione są warunki:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, u_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_0, u_0) = 0 \ ,$$
$$\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}(x_0, u_0) \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 p}{\partial u \, \partial x}(x_0, u_0) \neq 0$$

to katastrofa stowarzyszona w przekraczaniem parametru u_0 ma lokalnie taką "postać"jak katastrofa stowarzyszona z jednym z poniższych potencjałów z parametrem u:

$$x^3 + ux, \quad x^3 - ux, \quad -x^3 + ux, \quad -x^3 - ux \ .$$

Ta katastrofa nosi nazwę **fałda** (fold)

Ćwiczenie 11.5 *W powyższym przypadku rozstrzygnij, która to katastrofa, badają znaki dwóch liczb:*

$$\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}(x_0, u_0) \quad , \quad \frac{\partial^2 p}{\partial u \, \partial x}(x_0, u_0) \ .$$

Przykład. Niech $p = p(x,u) = x^5 + ux^3 + 5x$ będzie potencjałem z parametrem u. Wtedy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= 5x^4 + 3ux^2 + 5 \\
\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= 20x^3 + 6ux = x(20x^2 + 6u) \\
\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} &= 60x^2 + 6u \\
\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial x} &= 3x^2
\end{aligned}$$

Jeżeli $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$, to

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{10}{3}x^2 , \\
5x^4 + 3\left(-\frac{10}{3}x^2\right)x^2 + 5 &= 5(1 - x^4) = 0 , \\
x &= \pm 1 , \\
u &= -\frac{10}{3} .
\end{aligned}$$

Więc jeżeli parametr u przekracza wartość $u_0 = -\frac{10}{3}$, to katastrofy wystąpią jednocześnie w dwóch punktach: $x = -1$ oraz $x = +1$.

W obu tych punktach:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} &= 60 + 6\left(-\frac{10}{3}\right) = 40 > 0 , \\
\frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial x} &= 3 > 0 .
\end{aligned}$$

Więc w każdym z tych dwóch punktów znikają dwa punkty krytyczne.

Przypadek gdy codim $p = 2$:

Ćwiczenie 11.6 *$p - p(0) \in \mathbf{m}^2(1)$ oraz* codim $(p - p(0)) = 2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0) = 0 \;\; , \;\; \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(0) = 0 \;\; , \;\; \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}(0) = 0 \;\; , \;\; \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(0) \neq 0 .$$

Niech

$$p(x) = p(x; u, v) = x^4 + ux + vx^2$$

będzie potencjałem z dowoma parametrami (u, v). Ta funkcja, traktowana jako funkcja zmiennej x (przy ustalonych wartościach parametrów u, v) zawsze posiada lokalne minima, bo jest wielomianem stopnia 4 posiadającym dodatni współczynnik przy x^4. Punkty krytyczne funkcji p spełniają równanie

$$p'(x) = 4x^3 + u + 2vx = 0 \ .$$

$p'(x)$ jest wielomianem stopnia 3, więc ma co najwyżej trzy zera, więc p ma co najwyżej trzy punkty krytyczne. Funkcja p może mieć:

- jedno minimum (gdy p' ma jedno zero (jednokrotne lub trzykrotne))
- jedno minimum i jeden punkt krytyczny nie będący ekstremum lokalnym (gdy p' ma jedno zero jednokrotne, i jedno zero dwukrotne)
- dwa lokalne minima i jedno maksimum (gdy p' ma trzy zera jednokrotne)

Jeżeli funkcja p posiada punkt krytyczny x_0 nie będący ekstremum lokalnym, to

$$0 = p'(x_0) = 4x_0^3 + u + 2vx_0 \ ,$$
$$0 = p''(x_0) = 12x_0^2 + 2v \ .$$

Wtedy:

$$v = -6x_0^2$$
$$4x_0^3 + u - 12x_0^3 = 0$$
$$u = 8x_0^3 = (2x_0)^3 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \sqrt[3]{u}/2$$
$$v = -6x_0^2 = -6(\sqrt[3]{u})^2/4 = -3/2 \cdot u^{2/3}$$

Powyższa zależność pomiędzy parametrami u, v jest konieczna aby istniał punkt krytyczny nie będący lokalnym ekstremum.

Rozpatrzmy teraz możliwe wzajemne położenia parametrów:

(1) $u = 0, \ v > 0$
Pochodna $p' = 4x^3 + 2vx = 2x(2x^2 + v)$ ma jeden pierwiastek jednokrotny, więc p ma jedno minimum lokalne.

(2) $u = 0,\ v < 0$
Pochodna $p' = 4x^3 + 2vx = 2x(2x^2 + v)$ ma trzy pierwiastki jednokrotne, więc p ma dwa minima lokalne i jedno maksimum lokalne.

(3) $u = 8x_0^3,\ v = -6x_0^2,\ x_0 \neq 0$
Pochodna $p' = 4x^3 + 8x_0^3 - 12x_0x = 0$ ma dwukrotny pierwiastek $x = x_0$, oraz jednokrotny pierwiastek $x = -2x_0$.
Jeżeli $u < 0$, to $x_0 < 0$, więc $p(x)$ posiada jeden ujemny punkt krytyczny nie będący ekstremum lokalnym, i jeden punkt dodatni będący lokalnym minimum.

Jeżeli $u > 0$, to $x_0 > 0$, więc $p(x)$ posiada jeden dodatni punkt krytyczny nie będący ekstremum lokalnym, i jeden punkt ujemny będący lokalnym minimum.

Jeżeli parametry (u, v) przecinają krzywą $v = -3/2 \cdot u^{2/3}$, to w zależności od kierunku zmiany parametrów, jedno minimum lokalne pojawia się bądź znika. Tą katastrofę nazywamy **ostrzem** (cusp).

Jeżeli potraktujemy u, v jako zmienne, to zbiór

$$\{(x, u, v) \mid 4x^3 + u + 2vx = 0\} = \{(x, u, v,) \mid u = -4x^3 - 2vx\}$$

jest wykresem funkcji względem zmiennych v, x.

Ćwiczenie 11.7 *Jak zmienia się postać punktów równowagi, gdy*

$$p = x^4 - ux + vx^2, \qquad p = x^4 + ux - vx^2, \qquad p = x^4 - ux - vx^2 \ .$$

Jeżeli $p = p(x, u, v)$ jest potencjałem z dwoma parametrami (u, v), oraz dla pewnego punktu (x_0, u_0, v_0) spełnione są warunki:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, u_0, v_0) = 0 \ , \ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_0, u_0, v_0) = 0 \ , \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}(x_0, u_0, v_0) = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}(x_0, u_0, v_0) \ > 0 \ ,$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial x}(x_0, u_0, v_0) & \frac{\partial^2 p}{\partial v\, \partial x}(x_0, u_0, v_0) \\ \\ \frac{\partial^3 p}{\partial u\, \partial x^2}(x_0, u_0, v_0) & \frac{\partial^3 p}{\partial v\, \partial x^2}(x_0, u_0, v_0) \end{bmatrix} \neq \ 0$$

to katastrofa stowarzyszona z otoczeniem (u_0, v_0) ma lokalnie taką "postać"jak katastrofa stowarzyszona z jednym z poniższych potencjałów z parametrami (u, v):

$$x^4 + ux + vx^2, \quad x^4 - ux + vx^2, \quad x^4 + ux - vx^2, \quad x^4 - ux - vx^2 \ .$$

Ta katastrofa nosi nazwę **ostrze** (cusp)

Ćwiczenie 11.8 *Jaką postać ma katastrofa gdy* $p = -x^4 + ux + vx^2$ *?*

12 Proste zastosowania

Dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ oznaczmy: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Niech $(x(t), y(t))$ będzie rozwiązaniem układu równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(r, u)x - y \\ \dot{y} &= x + g(r, u)y \end{aligned}$$

dla pewnej funkcji $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Taką postać mają np. pewne równania opisujące zachowanie obwodów elektrycznych.)

Ćwiczenie 12.1 *Jeżeli* $r(t), \phi(t)$ *są takimi funkcjami, że*

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \phi(t) \\ y(t) &= r(t) \sin \phi(t) \end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned} r' &= r \cdot g(r, u) && (***) \\ \phi' &\equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = t_0 + t \ . \end{aligned}$$

Równanie $(***)$ można traktować jako równanie różniczkowe z jedną zmienną r i parametrem u, którego rozwiązaniem jest wprowadzona wcześniej funkcja $r(t)$.

Jeżeli $r_0 > 0$ jest punktem równowagi $(***)$, czyli $g(r_0, u) = 0$, to odpowiada mu rozwiązanie okresowe:

$$\begin{aligned} x(t) &= r_0 \cos(t_0 + t) \\ y(t) &= r_0 \sin(t_0 + t) \end{aligned}$$

Ćwiczenie 12.2 *Sprawdzić, że stabilnemu punktowi równowagi r_0 odpowiada stabilna trajektoria okresowa "przyciągająca" bliskie trajektorie, a niestabilnemu punktowi równowagi r_0 odpowiada niestabilna trajektoria okresowa "odpychająca" bliskie trajektorie*

Ćwiczenie 12.3 *1. Punkt $r_0 > 0$ jest stabilnym punktem równowagi równania $(***)$ dla parametru u_0, gdy*

$$g(r_0, u_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r_0, u_0) < 0 \ .$$

2. Punkt $r_0 > 0$ jest niestabilnym punktem równowagi równania $(***)$ dla parametru u_0, gdy

$$g(r_0, u_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r_0, u_0) > 0 \ .$$

Przykład. Rozpatrzmy równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(u - \sin\sqrt{x^2 + y^2}\right) x - y \\ \dot{y} &= x + \left(u - \sin\sqrt{x^2 + y^2}\right) y \ . \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} g(r, u) &= u - \sin r \ , \\ \frac{\partial g}{\partial r}(r, u) &= -\cos r \ , \\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, u) &= \sin r \ , \\ \frac{\partial g}{\partial u}(r, u) &= 1 \ . \end{aligned}$$

Niech $(r_0, u_0) = (\pi/2, 1)$. Wtedy

$$\begin{aligned} g(\pi/2, 1) &= 1 - \sin(\pi/2) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial r}(\pi/2, 1) &= -\cos(\pi/2) = 0, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\pi/2, 1) &= 1 > 0, \\ \frac{\partial g}{\partial u}(\pi/2, 1) &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Jeżeli parametr u przekracza wartość $u_0 = 1$, to "znikają" dwie orbity okresowe (jedna stabilna, jedna niestabilna) o promieniach bliskich $r_0 = \pi/2$.

Ćwiczenie 12.4 *Zbuduj model matematyczny opisujący zachowanie figury płaskiej o kształcie* $= \{(x, y) |\ y \geq x^2\}$ *i środku ciężkości w punkcie* (u, v)*, opartej na poziomej prostej.*

Opisz katastrofy stowarzyszone z tym modelem.

Model gradacji owadów
Choristoneura fumiferana (Clemens)

Według: J.D. Murray, *Wprowadzenie do biomatematyki*, PWN 2006

- Gradacja – pojawienie się dużej ilości owadów w danym sezonie
- $x = x(t)$ – populacja (liczebność) gatunku w chwili t
- u – współczynnik rozrodczości
- v – współczynnik mierzący pojemność środowiska; wielkość v jest jest równa maksymalnej pojemności środowiska

Wielkość populacji jest modelowana za pomocą równania różniczkowego:

$$\frac{dx}{dt} = u \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{v}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2} .$$

Pierwszy składnik prawej strony jest składnikiem tzw. równania wzrostu logistycznego, drugi składnik opisuje drapieżnictwo, głównie ptaków.

Równanie to można przekształcić do postaci:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = u \cdot \left(1 - \frac{x}{v}\right) - \frac{x}{1 + x^2} .$$

Prosta przechodząca przez punkty $(0, u), (v, 0)$:

$$y = u \cdot \left(1 - \frac{x}{v}\right)$$

oraz wykres funkcji

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

przecinają się w punktach których odcięte są punktami równowagi. Analizując wzajemne położenie obu wykresów można określić postać katastrof.