Topologia I

Notatki do wykładu

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, część I.
- R. Engelking, *Topologia ogólna.*
- R. Engelking, K. Sieklucki, *Wstęp do topologii.*
- W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej.*

1 Przestrzenie metryczne

Definicja. Funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ nazywamy *metryką* jeżeli $\forall x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symetria),

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (nierówność trójkąta).

Parę (X, d) nazywamy *przestrzenią metryczną.*

Wniosek 1.1 $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$

Definicja. Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną, $A \subset X$, to funkcja $d_A = d|_{A \times A}$, taka że $d_A(a, b) = d(a, b)$ dla $a, b \in A$, jest metryką na A. Nazywamy ją *metryką indukowaną,* zaś parę (A, d_A) nazywamy *podprzestrzenią.*

Przykład. – $[0, 1], \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, I\mathbb{Q}$ są podprzestrzeniami $\mathbb{R}$.

Definicja. *Średnicą* zbioru $A \subset X$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } A = \emptyset \\ \sup_{x,y \in A} d(x, y) & \text{jeżeli } A \neq \emptyset \end{cases}$$

Definicja. Zbiór A jest *ograniczony* (odp. *nieograniczony*) jeżeli $\operatorname{diam} A < \infty$ (odp. $\operatorname{diam} A = \infty$).

Przykład. – $\operatorname{diam}\{x_0\} = 0$.
– $\operatorname{diam}[0,3] = 3$, tzn. $[0,3]$ jest ograniczony.
– $\operatorname{diam}\mathbb{Z} = \infty$, tzn. $\mathbb{Z}$ jest nieograniczony

Definicja. Zbiór

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

nazywamy *kulą* o środku x i promieniu r.

Uwaga. – Jeżeli $r \leq 0$ to $B(x,r) = \emptyset$.
– Jeżeli $r > 0$ to $x \in B(x,r)$.

Przykład. – Jeżeli $X = [0,1]$ to $B(1, \frac{1}{3}) = (\frac{2}{3}, 1]$.
– Jeżeli $X = \mathbb{R}$ to każdy otwarty odcinek (a,b) jest kulą.
– Jeżeli X ma metrykę "0-1" to $B(x,r) = \{x\}$ jeżeli $0 < r \leq 1$, lub $B(x,r) = X$ jeżeli $r > 1$.

Ćwiczenie. $\operatorname{diam} B(x,r) \leq 2r$.

Definicja. Zbiór $U \subset X$ jest *otwarty* jeżeli

$$\forall x \in U \quad \exists r > 0 \text{ taki, że } B(x,r) \subset U.$$

Przykład. – $\emptyset, X$ są zbiorami otwartymi.
– Odcinek (a,b) jest otwarty w $\mathbb{R}$.
– $U = (3,6] \times [0,2)$ jest otwarty w kwadracie $X = [0,6] \times [0,6]$.
– U nie jest otwarty w $\mathbb{R}^2$.

Fakt 1.2 *Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

Fakt 1.3 *Przekrój dowolnej skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

Ćwiczenie. Każda kula jest zbiorem otwartym.

Ćwiczenie. W przestrzeni z metryką "0-1" każdy zbiór jest otwarty.

Fakt 1.4 *Jeżeli* $A \subset X$ *to zbiór* $U' \subset A$ *jest otwarty w podprzestrzeni* $A \Leftrightarrow$ *istnieje zbiór otwarty* $U \subset X$*, taki że* $U' = U \cap A$.

Definicja. Zbiór $F \subset X$ jest *domknięty* jeżeli $X \setminus F$ jest otwarty.

Wniosek 1.5 $U \subset X$ *jest otwarty* $\Leftrightarrow$ $F = X \setminus U$ *jest domknięty.*

Przykład. – $\emptyset, X$ są domknięte.
– Odcinek $[a, b]$ jest domknięty w $\mathbb{R}$.
– W przestrzeni z metryką "0-1" każdy zbiór jest domknięty.
– Zbiory jednopunktowe są domknięte.

Fakt 1.6 *Przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięty.*

Fakt 1.7 *Suma skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięta.*

Wniosek 1.8 *Zbiory skończone są domknięte.*

Ćwiczenie. Podać przykład zbioru przeliczalnego który nie jest domknięty.

Fakt 1.9 F *jest domknięty* $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X \setminus F \quad \exists r > 0 \quad B(x, r) \cap F = \emptyset.$$

Fakt 1.10 *Jeżeli* $A \subset X$ *to zbiór* $F' \subset A$ *jest domknięty w podprzestrzeni* $A \Leftrightarrow$ *istnieje zbiór domknięty* $F \subset X$*, taki że* $F' = F \cap A$.

2 Ciągi, domknięcie, wnętrze

Definicja. Ciąg (x_n) w X jest *zbieżny* do $x \in X$ jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad d(x, x_n) < \epsilon.$$

Piszemy: $\lim x_n = x$ lub $x_n \to x$.

Fakt 2.1 $\lim x_n = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim d(x, x_n) = 0.$

Ćwiczenie. Niech $z_n = (x_n, y_n) \in X \times Y$. Wtedy $z_n \to z = (x, y)$ w metryce ρ_1 lub ρ_2 $\Leftrightarrow$ $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$.

Fakt 2.2 *Ciąg zbieżny jest* ciągiem Cauchy'ego, *tzn.*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall m, n \geq N \;\; d(x_m, x_n) \leq \epsilon.$$

Definicja. Niech (x_n) będzie ciągiem. Jeżeli $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ jest funkcją rosnącą (wtedy w szczególności $\phi(n) \geq n$) to funkcję $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_{\phi(n)}$ nazywamy *podciągiem* ciągu (x_n).

Twierdzenie 2.3 *$F \subset X$ jest domknięty* $\Leftrightarrow$

$$\forall \; (x_n) \subset F \textit{ jeżeli } x = \lim x_n \textit{ to } x \in F.$$

Definicja. Niech $A \subset X$.

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0 \; \exists a \in A \;\; d(x, a) < r\}.$$

Zbiór $\bar{A}$ nazywamy *domknięciem* zbioru A. Oczywiście $A \subset \bar{A}$.

Fakt 2.4 $x \in \bar{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (a_n) \subset A$ *taki że* $x = \lim a_n$.

Fakt 2.5 *$\bar{A}$ jest domknięty.*

Fakt 2.6 *Jeżeli F jest domknięty oraz $A \subset F$ to $\bar{A} \subset F$. (Więc $\bar{A}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A.)*

Wniosek 2.7 *A jest domknięty* $\Leftrightarrow \quad A = \bar{A}$.

Przykład. – $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{I\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{(a, b)} = [a, b]$.

Ćwiczenie. Niech $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$. Wtedy $x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

Definicja. $x \in X$ jest punktem *skupienia* zbioru A jeżeli

$$x \in \overline{A \setminus \{x\}} \; ,$$

tzn. dla każdego $r > 0$ istnieje taki punkt $a \in A$, że $x \neq a$ oraz $d(x, a) < r$.
Więc $x \in X$ jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists \;\; (a_n) \subset A \setminus \{x\} \text{ taki, że } \; x = \lim a_n \; .$$

Definicja. $x \in A$ jest punktem *izolowanym* w zbiorze A jeżeli $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$, tzn. jeżeli istnieje takie $r > 0$, że $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Definicja. Niech $A \subset X$.

$$\operatorname{int} A = \{x \in X \mid \exists r > 0 \;\; B(x, r) \subset A\}.$$

Zbiór $\operatorname{int} A$ nazywamy *wnętrzem* zbioru A.

3 Funkcje ciągłe

Definicja. Funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest *ciągła* jeżeli dla każdego zbioru otwartego $U \subset Y$ jego przeciwobraz $f^{-1}(U)$ jest otwarty w X.

Przykład. – Funkcja identycznościowa id: $X \longrightarrow X$ jest ciągła.
– Funkcja stała $f(x) = y_0$ $(y_0 \in Y)$ jest ciągła.
– Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x \leq 0 \\ 1 & \text{jeżeli } x > 0 \end{cases}$$

nie jest ciągła.
– Funkcja Weierstrassa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{jeżeli } x \in I\mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest ciągła.

Twierdzenie 3.1 (Warunek ciągłości Cauchy'ego) *$f : X \longrightarrow Y$ jest ciągła $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X \;\; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x' \in X$*

$$d_X(x, x') < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Twierdzenie 3.2 (Warunek ciągłości Heinego) *$f : X \longrightarrow Y$ jest ciągła $\Leftrightarrow$*

$$\forall (x_n) \quad \lim x_n = x \;\Rightarrow\; \lim f(x_n) = f(x).$$

Ćwiczenie. $f = (f_1, f_2) : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ jest ciągła $\Leftrightarrow$ f_1, f_2 są ciągłe.

Twierdzenie 3.3 *Niech $f : X \longrightarrow Y$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) f jest ciągła,

(ii) dla każdego zbioru domkniętego $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ jest domknięty w X,

(iii) dla każdego $A \subset X$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Fakt 3.4 *Funkcja spełniająca warunek Lipschitza, tzn. taka że*

$$\exists C > 0 \ \ \forall x, x' \in X \ \ d_Y(f(x), f(x')) \le C\, d_X(x, x'),$$

jest ciągła.

Lemat 3.5 *Niech $A \subset X$. Wtedy*

$$\forall\ x, x' \in X \ \ |d(x, A) - d(x', A)| \le d(x, x').$$

Wniosek 3.6 *Funkcja $X \ni x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ jest ciągła.*

Fakt 3.7 *Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Y \longrightarrow Z$ są ciągłe to $g \circ f : X \longrightarrow Z$ jest ciągła.*

Definicja. Przekształcenie ciągłe wzajemnie jednoznaczne $h : X \longrightarrow Y$ jest *homeomorfizmem* jeżeli przekształcenie odwrotne $h^{-1} : Y \longrightarrow X$ jest ciągłe.

W takim wypadku przestrzenie X i Y są *homeomorficzne.*

Ćwiczenie. Jeżeli X i Y są homeomorficzne oraz Y i Z są homeomorficzne, to X i Z są homeomorficzne.

Fakt 3.8 *Niech $h : X \longrightarrow Y$ będzie homeomorfizmem.*

Zbiór $A \subset X$ jest otwarty (odp. domknięty) $\Leftrightarrow$ $h(A) \subset Y$ jest otwarty (odp. domknięty).

4 Przestrzenie ośrodkowe

Definicja. Zbiór $A \subset X$ jest *gęsty* w przestrzeni X (odp. w zbiorze $P \subset X$) jeżeli $\bar{A} = X$ (odp. jeżeli $A \subset P$ oraz $P \subset \bar{A}$).

Lemat 4.1 *$A \subset X$ jest gęsty $\Leftrightarrow$ dla każdego niepustego otwartego zbioru U, $U \cap A \neq \emptyset$.*

Przykład. – $\mathbb{Q}, I\mathbb{Q}$ są gęste w $\mathbb{R}$.
– $\mathbb{N}$ nie jest a gęsty w $\mathbb{R}$.
– (a, b) nie jest gęsty w $\mathbb{R}$.

Definicja. Przestrzeń X (odp. zbiór $P \subset X$) jest *ośrodkowa* jeżeli istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór A gęsty w X (odp. gęsty w zbiorze P).

Przykład. – $\mathbb{R}$ jest przestrzenią ośrodkową.
– $\mathbb{R}^2$ jest przestrzenią ośrodkową.
– Płaszczyzna z metryką "kolejową" nie jest ośrodkowa.

Ćwiczenie. Jeżeli X, Y są ośrodkowe to $X \times Y$ jest ośrodkowa.

Twierdzenie 4.2 *Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest funkcją ciągłą, "na" oraz X jest przestrzenią ośrodkową, to Y jest ośrodkowa.*

Wniosek 4.3 *Jeżeli przestrzenie X i Y są homeomorficzne to X jest przestrzenią ośrodkową $\Leftrightarrow$ Y jest przestrzenią ośrodkową.*

Wniosek 4.4 $\mathbb{R}^2$ *i płaszczyzna z metryką "kolejową" nie są homeomorficzne.*

Twierdzenie 4.5 *Każdy podzbiór W w przestrzeni ośrodkowej X jest podprzestrzenią ośrodkową.*

Uwaga. $W = \{\sqrt{2}\} \times \mathbb{R}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}^2$, zbiór $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest przeliczalnym gęstym podzbiorem $\mathbb{R}^2$, ale $W \cap A = \emptyset$.

Ćwiczenia. – Zbiór pusty jest przestrzenią ośrodkową.
– Załóżmy, że $X \times Y$ jest niepustą przestrzenią ośrodkową. Udowodnij, że X, Y są ośrodkowe.

Definicja. Rodzinę U_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, podzbiorów przestrzeni X nazywamy *pokryciem* przestrzeni X (odp. *pokryciem* zbioru $A \subset X$), jeżeli

$$X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \quad (\text{odp. } A \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha\ ).$$

Pokrycie jest *otwarte* jeżeli każdy zbiór U_α jest otwarty.

Przykład. – $U_1 = (-\infty, 1]$, $U_2 = [0, 3)$, $U_3 = (2, \infty)$ jest pokryciem $\mathbb{R}$,

ale nie jest pokryciem otwartym.
– $U_n = (-n, n),\ n \in \mathbb{N}$, jest otwartym pokryciem $\mathbb{R}$.
– $U_k = (k, k+2),\ k \in \mathbb{Z}$, jest pokryciem otwartym $\mathbb{R}$.

Definicja. Jeżeli $r > 0$ to *skończoną* (odp. *przeliczalną*) *r–siecią* nazywamy taki skończony (odp. przeliczalny) zbiór $S \subset X$, że

$$\forall x \in X \ \ \exists s \in S \text{ taki że } d(x,s) < r$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \bigcup_{s \in S} B(s,r).$$

Przykłady. – $S = \{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\}$ jest skończoną 1/4–siecią w $[0,1]$.
– $S = \mathbb{Z}$ jest przeliczalną 2–siecią w $\mathbb{R}$.
– $S = \mathbb{Q}$ jest przeliczalną r–siecią dla każdego $r > 0$.

Fakt 4.6 *W przestrzeni ośrodkowej, dla każdego $r > 0$ istnieje przeliczalna r–sieć.*

Twierdzenie 4.7 (Lindelöfa) *Jeżeli X jest przestrzenią ośrodkową, to z każdego otwartego pokrycia U_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, przestrzeni X można wybrać pokrycie co najwyżej przeliczalne, tzn.*

$$\exists \quad \alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(k), \ldots \ \in \mathcal{A} \quad :$$

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{\alpha(k)}$$

Przykład. W płaszczyźnie z metryką ”kolejową” twierdzenie Lindelöfa nie jest spełnione.

5 Przestrzenie zwarte

Definicja. Zbiór $K \subset X$ jest *zwarty*, jeżeli z każdego ciągu punktów tego zbioru można wybrać podciąg zbieżny do punktu ze zbioru K, tzn

$$\forall (x_n) \subset K \ \ \exists x \in K \ \ \exists (x_{\phi(n)}) \ \ x = \lim x_{\phi(n)}.$$

Przykład. – $\mathbb{R}, (a,b), (-\infty, a)$ nie są zwarte.
– $X = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ nie jest zwarty.
– $\emptyset$ jest zwarty.

Fakt 5.1 *Odcinek* $[a, b]$ *jest zwarty.*

Fakt 5.2 *Zbiór zwarty jest domknięty.*

Fakt 5.3 *Załóżmy, że* X *jest zwarta. Wtedy*
$K \subset X$ *jest zwarty* $\Leftrightarrow$ K *jest domknięty.*

Fakt 5.4 *Jeżeli* $A \subset X$ *oraz* $B \subset Y$ *są zbiorami zwartymi to* $A \times B \subset X \times Y$ *jest zwarty.*

Ćwiczenie. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

Wniosek 5.5 *Iloczyn kartezjański skończonej rodziny zbiorów zwartych jest zwarty.*

Wniosek 5.6 $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ *jest zwarty.*

Fakt 5.7 *Zbiór zwarty jest ograniczony.*

Twierdzenie 5.8 (Bolzano–Weierstrassa) $K \subset \mathbb{R}^n$ *jest zwarty* $\Leftrightarrow$ K *jest domknięty i ograniczony.*

Przykład. W płaszczyźnie z metryką "kolejową" kula domknięta o środku $\mathbf{0}$ i dodatnim promieniu jest domknięta, ograniczona, ale nie jest zwarta.

Fakt 5.9 *Jeżeli* K *jest zbiorem zwartym, to dla każdego* $r > 0$ *istnieje skończona* r*-sieć w* K*.*

Wniosek 5.10 *Każdy zbiór zwarty jest ośrodkowy.*

Twierdzenie 5.11 (Borela–Lebesgue'a) *Z każdego pokrycia zbioru zwartego zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone.*

Twierdzenie 5.12 (Cantora) *Jeżeli* K *jest zwarty oraz* $F_i \subset K$ *są takimi zbiorami domkniętymi, niepustymi, że* $K \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ *tworzą ciąg zstępujący to*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset.$$

Przykład. $F_i = [i, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots$ tworzą zstępującą rodzinę domkniętych niepustych zbiorów w $\mathbb{R}$ oraz $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$.

Twierdzenie 5.13 (Lebesgue'a) *Niech U_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, będzie otwartym pokryciem zbioru zwartego $K \subset X$. Wtedy $\exists \delta > 0$ taka, że*

$$\forall x \in K \ \ \exists_{\alpha \in \mathcal{A}} \ \ B(x, \delta) \subset U_\alpha.$$

(Liczbę δ nazywamy liczbą Lebesgue'a *pokrycia U_α.)*

Fakt 5.14 *Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest funkcją ciągłą, $K \subset X$ jest zwarty to $f(K) \subset Y$ jest zwarty.*
(Więc jeżeli X jest przestrzenią zwartą to $f(X) \subset Y$ jest zwarty.)

Wniosek 5.15 *Jeżeli przestrzenie X i Y są homeomorficzne to X jest zwarta $\Leftrightarrow$ Y jest zwarta.*

Wniosek 5.16 *Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest ciągła, X jest zwarta, $A \subset X$ jest domknięty to $f(A)$ jest zwarty, a więc również domknięty.*

Fakt 5.17 *Jeżeli $h : X \longrightarrow Y$ jest funkcją ciągłą, wzajemnie jednoznaczną oraz X jest przestrzenią zwartą, to h jest homeomorfizmem.*

Fakt 5.18 *Funkcja ciągła $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ na przestrzeni zwartej X jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy, tzn.*

$$\exists x_1, x_2 \in X \ \ \forall x \in X \ \ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Twierdzenie 5.19 (Heinego) *Funkcja ciągła $f : X \longrightarrow Y$ na przestrzeni zwartej X jest jednostajnie ciągła, tzn.*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, x' \in X \ \ d_X(x, x') < \delta \ \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

6 Przestrzenie zupełne

Lemat 6.1 *Elementy ciągu Cauchy'ego tworzą zbiór ograniczony.*

Lemat 6.2 *Ciąg Cauchy'ego, zawierający podciąg zbieżny, jest zbieżny.*

Definicja. Przestrzeń X (odp. zbiór $A \subset X$) jest *zupełna* jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego w X (odp. w A) jest zbieżny w X (odp. w A).

Wniosek 6.3 *X jest zupełna $\Leftrightarrow$ każdy ciąg Cauchy'ego zawiera podciąg zbieżny w X.*

Przykład. – $\mathbb{Q}$ nie jest przestrzenią zupełną.
– (a, b) nie jest zbiorem zupełnym.

Fakt 6.4 *Zbiór zwarty jest zupełny.*

Fakt 6.5 *Jeżeli każdy zbiór ograniczony w X zawiera się w pewnym zbiorze zwartym, to X jest przestrzenią zupełną.*

Fakt 6.6 $\mathbb{R}^n$ *jest przestrzenią zupełną.*

Fakt 6.7 *Jeżeli $A \subset X$ jest zbiorem zupełnym to A jest domknięty.*

Fakt 6.8 *Niech X będzie przestrzenią zupełną.*
Zbiór $A \subset X$ jest zupełny $\Leftrightarrow$ A jest domknięty w X.

Wniosek 6.9 *$A \subset \mathbb{R}^n$ jest zupełny $\Leftrightarrow$ A jest domknięty w $\mathbb{R}^n$.*

Twierdzenie 6.10 (Warunek zupełności Cantora) *Przestrzeń X jest zupełna $\Leftrightarrow$ dla każdego zstępującego ciągu zbiorów niepustych domkniętych $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$*

$$\exists x \in X \quad \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

Przykład. Niech $F_1 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, oraz niech F_n dla $n > 1$ będzie dowolnym odcinkiem domkniętym o długości $1/2^n$ zawartym w F_{n-1}. Wtedy

$$\exists x \in \mathbb{R} \ : \ \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \ .$$

Definicja. Zbiór $B \subset X$ jest *brzegowy*, jeżeli nie zawiera żadnego niepustego zbioru otwartego, tzn. jeżeli $U \neq \emptyset$ jest otwarty to $U \setminus B \neq \emptyset$.

Przykład. – Zbiory skończone w $\mathbb{R}^n$ są brzegowe.
– Odcinki, proste, okręgi w $\mathbb{R}^2$ są brzegowe.
– $\mathbb{Q}, I\mathbb{Q}$ są brzegowymi podzbiorami $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 6.11 (Baire'a) *Jeżeli X jest przestrzenią zupełną a zbiory $B_1, B_2, \ldots$ są brzegowe i domknięte w X, to suma*

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

jest zbiorem brzegowym.

Definicja. $A \subset X$ jest *nigdzie gęsty* jeżeli $\bar{A}$ jest zbiorem brzegowym.

Przykład. – Zbiory skończone w $\mathbb{R}^n$ są nigdzie gęste.
– Odcinki, $\mathbb{Q}$ nie są nigdzie gęste w $\mathbb{R}$.
– Odcinki, $\mathbb{Q} \times \{0\}$ są nigdzie gęste w $\mathbb{R}^2$.

Wniosek 6.12 (I z Twierdzenia Baire'a) *Przeliczalna suma zbiorów nigdzie gęstych w przestrzeni zupełnej X jest zbiorem brzegowym.*

Uwaga. Suma ta może nie być już zbiorem domkniętym, np. $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$.

Wniosek 6.13 (II z Twierdzenia Baire'a) *Jeżeli X jest przestrzenią zupełną a zbiory $G_1, G_2, \ldots$ są gęste i otwarte w X, to przekrój*

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

jest zbiorem gęstym.

Definicja. Przekształcenie $f : X \longrightarrow X$ jest *zwężające* jeżeli istnieje stała $0 \leq C < 1$, taka że

$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq C\, d(x, y).$$

Wniosek 6.14 *Przekształcenie zwężające jest ciągłe.*

Twierdzenie 6.15 (Tw. Banacha o przekształceniu zwężającym) *Jeżeli X jest przestrzenią zupełną oraz $f : X \longrightarrow X$ jest zwężające, to istnieje dokładnie jeden punkt $\bar{x} \in X$ taki, że*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

(Mówimy, że $\bar{x}$ jest punktem stałym *przekształcenia f)*

Uwaga – Założenia, że X jest zupełna oraz że $C < 1$ są istotne.
– Odcinek (a, b) jest homeomorficzny z prostą $\mathbb{R}$, która jest przestrzenią zupełną, ale odcinek nie jest zbiorem zupełnym. P

7 Przestrzenie spójne

Definicja. Przestrzeń X jest *niespójna* jeżeli istnieją niepuste, domknięte i rozłączne zbiory A, B, takie że

$$X = A \cup B$$

Fakt 7.1 *X jest niespójna $\Leftrightarrow$ istnieją niepuste, otwarte i rozłączne zbiory A, B, takie że $X = A \cup B$*

Definicja. Przestrzeń X jest *spójna* jeżeli X nie jest niespójna.

Przykład. – Zbiór $\emptyset$ jest spójny.
– Przestrzeń $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest niespójna.
UWAGA: Zbiory $A = (-\infty, 0)$ oraz $B = (0, +\infty)$ są jednocześnie otwartymi i domkniętymi podzbiorami przestrzeni $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
– Przestrzeń jednopunktowa jest spójna.
– Przestrzeń z metryką "0-1" zawierająca co najmniej dwa punkty jest niespójna.

Ćwiczenie. Załóżmy, że X jest spójna, $A \subset X$ oraz $\emptyset \neq A \neq X$.Wtedy
– jeżeli A jest otwarty to nie jest domknięty,
– jeżeli A jest domknięty to nie jest otwarty.

Ćwiczenie. $A \subset X$ jest przestrzenią niespójną jeżeli istnieją niepuste rozłączne zbiory A_1, A_2, takie że

$$A = A_1 \cup A_2, \quad \bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset.$$

Twierdzenie 7.2 *Odcinek $[a, b]$ jest spójny.*

Twierdzenie 7.3 *Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest ciągła, "na" oraz X jest spójna, to Y jest spójna.*

Wniosek 7.4 *Jeżeli X i Y są homeomorficzne to*
X jest spójna $\Leftrightarrow$ Y jest spójna.

Twierdzenie 7.5 *Jeżeli $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$, gdzie każda podprzestrzeń X_α jest spójna oraz $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha \neq \emptyset$, to przestrzeń X jest spójna.*

Przykład. Odcinki, półproste, prosta są spójne.

Twierdzenie 7.6 *Iloczyn kartezjański $X \times Y$ przestrzeni spójnych jest spójny.*

Ćwiczenie. Krzywe łamane są spójne.

Lemat 7.7 *Jeżeli dla każdej pary punktów w X istnieje podprzestrzeń spójna zawierająca te punkty, to X jest spójna.*

Twierdzenie 7.8 *Zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ jest spójny $\Leftrightarrow$ każde dwa punkty w U dają się połączyć za pomocą łamanej zawartej w U.*

Definicja. Przestrzeń X jest *łukowo spójna* jeżeli $\forall x, y \in X$ istnieje funkcja ciągła $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$, taka że $f(a) = x$, $f(b) = y$.

Wniosek 7.9 *Przestrzeń łukowo spójna jest spójna.*

Ćwiczenie. Podaj przykład przestrzeni spójnej, która nie jest łukowo spójna.

Twierdzenie 7.10 (Własność Darboux) *Jeżeli X jest spójna, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła to*

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \textit{jeżeli } f(x_1) \leq y \leq f(x_2) \ \textit{ to } \ \exists x \in X \quad f(x) = y.$$

Twierdzenie 7.11 *Jeżeli $A \subset X$ jest spójny to $\bar{A}$ jest spójny.*

Ćwiczenie. Podaj przykład takiego spójnego zbioru A, że $\operatorname{int} A$ nie jest spójny.

Wniosek 7.12 *Jeżeli X zawiera zbiór gęsty, spójny to X jest spójna.*

Definicja. Zbiór spójny $S \subset X$ nazywamy *składową* jeżeli dla dowolnego zbioru spójnego P zawierającego S, $P = S$.

Wniosek 7.13 *Jeżeli S jest składową, $S \subset P$ oraz P jest spójny to $S = P$.*

Przykład. Każdy punkt izolowany w przestrzeni X jest składową.

Przykład. Zbiór jednopunktowy $\{0\} \subset \mathbb{R}$ jest spójny, ale nie jest składową przestrzeni $\mathbb{R}$.

Przykład. Zbiór $(-\infty, 0)$ jest składową przestrzeni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
UWAGA: Zbiór ten jest jednocześnie otwarty i domknięty w przestrzeni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Fakt 7.14 *Składowe są domknięte, parami rozłączne.*

Przykład. W przestrzeni $\{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}$ każdy punkt jest składową. Punkt $\{0\}$ jest składową, ale nie jest otwarty.

Twierdzenie 7.15 *Przestrzeń metryczna jest sumą swoich składowych.*

Fakt 7.16 *Dwa punkty w X należą do jednej składowej $\Leftrightarrow$ istnieje podzbiór spójny który zawiera te punkty.*

Twierdzenie 7.17 *Przestrzeń jest spójna $\Leftrightarrow$ ma dokładnie jedną składową.*

Fakt 7.18 *Homeomorfizm przekształca składowe na składowe.*

Wniosek 7.19 *Jeżeli X i Y są homeomorficzne to*

$$\begin{aligned} \#\ \textit{składowe w}\ X &= \#\ \textit{składowe w}\ Y, \\ \#\ \textit{składowe zwarte w}\ X &= \#\ \textit{składowe zwarte w}\ Y. \end{aligned}$$

8 Ciągi funkcji

Niech f oraz (f_n) będą funkcjami $X \longrightarrow Y$.

Definicja. Ciąg funkcji (f_n) jest *zbieżny punktowo* do f jeżeli

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x) \text{ w } Y.$$

Definicja. Ciąg funkcji (f_n) jest *zbieżny jednostajnie* do f jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \geq N \qquad \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \geq N \; \forall x \in X \qquad d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon.$$

Fakt 8.1 *Jeżeli ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f to to jest zbieżny punktowo do f.*

Ćwiczenie. Niech $f_n : [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$: $f_n(x) = x^n$, oraz

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x < 1 \\ 1 & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$$

Pokaż, że (f_n) jest zbieżny punktowo do f, ale nie jest zbieżny jednostajnie do f.

Definicja. Załóżmy, że X jest zwarta. Będziemy oznaczać:

(i) $C(X,Y) = \{f : X\longrightarrow Y \mid f \text{ jest ciągła}\}$

(ii) jeżeli $f, g \in C(X,Y)$ to

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$$

Fakt 8.2 $d(f,g) < \infty$.

Ćwiczenie. – $(C(X,Y), d)$ jest przestrzenią metryczną.
– Załóżmy, że $f \in C(X,Y)$ oraz $f_n \in C(X,Y)$. Wtedy ciąg funkcji (f_n) jest zbieżny do f w $(C(X,Y), d)$ $\Leftrightarrow$ (f_n) jest zbieżny jednostajnie do f.

Twierdzenie 8.3 *Jeżeli X jest zwarta, Y–zupełna to $C(X,Y)$ jest przestrzenią zupełną.*

Lemat 8.4 *Jeżeli (f_n) jest ciągiem w $C(X,Y)$ zbieżnym do funkcji f, to $f \in C(X,Y)$.*

Uwaga. W poprzednim Ćwiczeniu zakładamy z góry, że $f \in C(X,Y)$, w Lemacie 8.4 założenia są słabsze.

Twierdzenie 8.5 (Peano (1890)) *Istnieje funkcja ciągła*

$$f : [0,1]\longrightarrow[0,1] \times [0,1]$$

która jest "na".

9 Przeliczalne iloczyny kartezjańskie

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Dla $x, y \in X$ zdefiniujmy

$$\bar{d}(x, y) = \min(d(x, y), 1).$$

Ćwiczenie. – $(X, \bar{d})$ jest przestrzenią metryczną.
– $\operatorname{diam}(X, \bar{d}) \leq 1$.
– id: $(X, d) \longrightarrow (X, \bar{d})$ jest homeomorfizmem.

Wniosek 9.1 *Każda przestrzeń metryczna jest homeomorficzna z przestrzenią ograniczoną.*

Niech (X_i, d_i), $i = 1, 2, \ldots$, będzie przeliczalną rodziną wspólnie ograniczonych przestrzeni metrycznych, tzn.

$$\exists M \quad \forall i \quad \operatorname{diam} X_i \leq M.$$

Symbol $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ (lub krócej $\prod X_i$) będzie oznaczał przeliczalny iloczyn kartezjański przestrzeni X_i.

Fakt 9.2 *Dla $x = (x_i), y = (y_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ zdefiniujmy*

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}$$

Jest to metryka w $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Niech (x^n) będzie ciągiem w $\prod X_i$ oraz niech $x \in \prod X_i$. Oznaczmy:
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$,
$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_i^1, \ldots), x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_i^2, \ldots), \ldots,$
$x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_i^n, \ldots), \ldots.$

Twierdzenie 9.3 $x^n \longrightarrow x$ *w* $\prod X_i \;\Leftrightarrow\; \forall i \quad \lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$.

Ćwiczenie. Rzut $\prod X_i \longrightarrow X_i$ jest ciągły.

Twierdzenie 9.4 *Funkcje $f_i : Y \longrightarrow X_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ są ciągłe $\Leftrightarrow$ funkcja $f = (f_1, f_2, \ldots) : Y \longrightarrow \prod X_i$ jest ciągła.*

Twierdzenie 9.5 *Przestrzenie $X_1, X_2, \ldots$ są zwarte $\Leftrightarrow$ $\prod X_i$ jest przestrzenią zwartą.*

Definicja. Przestrzeń $I^\omega = \prod_{i=1}^{\infty}[0, 1]$ nazywamy *kostką Hilberta.*

Wniosek 9.6 *I^ω jest przestrzenią zwartą.*

Twierdzenie 9.7 *Dla każdej zwartej przestrzeni metrycznej Y istnieje zwarty podzbiór w kostce Hilberta który jest homeomorficzny z Y.*

10 Przestrzenie topologiczne

Definicja. *Przestrzenią topologiczną* nazywamy zbiór X wraz z pewną rodziną $\mathcal{O}$ jego podzbiorów spełniających następujące aksjomaty:

(i) $\emptyset$ oraz X należą do $\mathcal{O}$,

(ii) jeżeli $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ to $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$,

(iii) jeżeli $U_s \in \mathcal{O}$ dla każdego $s \in S$ to $\bigcup_{s \in S} U_s \in \mathcal{O}$

Zbiory $U \in \mathcal{O}$ nazywamy *zbiorami otwartymi*, rodzinę $\mathcal{O}$ nazywamy *topologią.*

Przykład. Każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią topologiczną.

Przykład. X – dowolny zbiór. Rodzina $\mathcal{O}$ składająca się z $\emptyset$ oraz X jest topologią. Jest to tzw. topologia *antydyskretna*

Przykład. $X = \mathbb{R}^2$. Przyjmijmy, że $U \in \mathcal{O}$ jeżeli istnieje wielomian $f(x, y)$, taki że $U = \{(x, y) \mid f(x, y) \neq 0\}$. Jest to tzw. topologia *Zariskiego.*

W dwóch ostatnich przykładach nie istnieje żadna metryka która by definiowała te same zbiory otwarte.

Definicja. $F \subset X$ jest *domknięty* jeżeli $X \setminus F \in \mathcal{O}$

Definicja. $A \subset X$ jest *gęsty* jeżeli dla każdego niepustego zbioru $U \in \mathcal{O}$, $A \cap U \neq \emptyset$.

Przestrzeń X jest *ośrodkowa*, jeżeli zawiera podzbiór przeliczalny gęsty.

Definicja. Niech $(X, \mathcal{O}), (Y, \mathcal{O}')$ będą przestrzeniami topologicznymi. Funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest *ciągła*, jeżeli

$$\forall U \in \mathcal{O}' \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{O}.$$

Definicja. $K \subset X$ jest *zwarty* jeżeli z każdego otwartego pokrycia zbioru K można wybrać pokrycie skończone.

Aksjomaty oddzielania

Definicja. Przestrzeń topologiczna X jest *T_1–przestrzenią* jeżeli dla każdej pary $x, y \in X, x \neq y$, istnieje taki zbiór otwarty U, że $x \in U$ oraz $y \notin U$.

Twierdzenie 10.1 *X jest T_1–przestrzenią* $\Leftrightarrow$
$\forall x \in X \quad \{x\}$ jest domknięty w X.

Definicja. Przestrzeń topologiczna X jest *T_2–przestrzenią* (lub *przestrzenią Hausdorffa*) jeżeli dla każdej pary $x, y \in X, x \neq y$ istnieją zbiory otwarte U, V takie, że

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \emptyset$$

Przykład. $\mathbb{R}^2$ z topologią Zariskiego jest T_1–przestrzenią, nie jest T_2–przestrzenią.

Twierdzenie 10.2 *Jeżeli X jest T_2–przestrzenią oraz K jest zwarty, to K jest domknięty.*

11 Homotopie, grupa podstawowa

Definicja. Niech $f_0, f_1 : X \to Y$ będą ciągłe. Przekształcenie f_0 jest *homotopijne* z przekształceniem f_1, jeżeli istnieje takie przekształcenie ciągłe $H = H(x,t) : X \times [0,1] \to Y$, zwane homotopią od f_0 do f_1 (lub między f_0 oraz f_1), że

$$H(x,0) = f_0(x) \text{ oraz } H(x,1) = f_1(x) \text{ dla każdego } x \in X \ .$$

Piszemy wówczas $f_0 \simeq_H f_1$ lub $f_0 \simeq f_1$.

Przykład.

$$X = S^1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\ ,$$

$$f_0 = f_0(x,y) = (x,y), \quad f_1(x,y) = (2x,2y)$$

są ciagłymi przekształceniami $S^1 \to Y$.

Odwzorowanie $H : S^1 \times [0,1] \to Y$ zdefiniowane wzorem

$$H((x,y),t) = ((t+1)x, (t+1)y)$$

jest homotopią od f_0 do f_1.

Fakt 11.1 *Każde dwa przekształcenia ciągłe w wypukły podzbiór przestrzeni euklidesowej są homotopijne.*

Przykład. Niech $f_0, f_1 : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ będą zdefiniowane wzorem

$$f_0(x,y) = (x,y), \quad f_1(x,y) = (1,0)\ .$$

Odwzorowania f_0, f_1 **nie są homotopijne.**

Twierdzenie 11.2 *Relacja homotopii jest relacją równoważności w zbiorze przekształceń ciągłych z przestrzeni X do przestrzeni Y.*

Niech $x_0 \in X$ będzie ustalonym punktem, nazywanym punktem *bazowym*. *Pętlą w X (zaczepioną w punkcie x_0)* nazywamy każde odwzorowanie ciągłe $a = a(s) : [0,1] \to X$ takie, że $a(0) = x_0$ oraz $a(1) = x_0$.

Niech $P(X, x_0)$ oznacza zbiór takich pętli.

Dla dowolnych $a, b \in P(X, x_0)$ określmy ich złożenie $a \star b$ wzorem

$$(a \star b)(s) = \begin{cases} a(2s) & \text{jeżeli } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ a(2s-1) & \text{jeżeli } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

Oczywiście $a \star b \in P(X, x_0)$.

Pętlę stałą $e \equiv x_0$ nazywamy pętlą *trywialną.*

Dla pętli $a \in P(X, x_0)$ określamy pętlę *przeciwną* $\bar{a}$ wzorem

$$\bar{a}(s) = a(1-s) \ \text{ dla } \ 0 \le s \le 1\ .$$

Oczywiście e oraz $\bar{a}$ należą do $P(X, x_0)$.

Definicja. Pętle $a, a' \in P(X, x_0)$ są *homotopijne* (piszemy $a \simeq a'$), jeżeli istnieje takie odwzorowanie ciągłe $H = H(s,t) : [0,1] \times [0,1] \to X$ takie, że

(i) $H(s, 0) = a(s),\ H(s, 1) = a'(s)$ dla $0 \leq s \leq 1$,

(ii) $H(0,t) = x_0,\ H(1,t) = x_0$ dla $1 \leq t \leq 1$.

Dla ustalonego $0 \leq t \leq 1$:
$a_t(s) = H(s,t) : [0,1] \to X$ jest ciagłe
$a_t(0) = H(0,t) = x_0$, $a_t(1) = H(1,t) = x_0$,

więc każde $a_t \in P(X, x_0)$, oraz
$a_0(s) = H(s, 0) = a(s)$,
$a_1(s) = H(s, 1) = a'(s)$,
czyli $a_0 = a,\ a_1 = a'$.

Fakt 11.3 *Dla dowolnej pętli a, pętle $a \star e$, $e \star a$, a są homotopijne.*

Twierdzenie 11.4 *Relacja "$\simeq$" w $P(X, x_0)$ jest relacją równoważności.*

Definicja. Klasę (abstrakcji) reprezentowaną przez pętlę a oznaczamy symbolem $[a]$.

Zbiór klas oznaczamy symbolem $\pi_1(X, x_0)$.

Twierdzenie 11.5 *Jeżeli $a, a', b, b' \in P(X, x_0)$ oraz $a \simeq a',\ b \simeq b'$, to $a \star b \simeq a' \star b'$ oraz $\bar{a} \simeq \bar{a}'$.*

Definicja. Dla $[a], [b] \in \pi_1(X, x_0)$ definiujemy iloczyn $[a] \star [b]$ jako klasę pętli $a \star b$ w $\pi_1(X, x_0)$.

Niech $[e] \in \pi_1(X, x_0)$ oznacza klasę reprezentowaną przez petlę trywialną e.

Fakt 11.6 *Dla dowolnych* $[a], [b], [c] \in \pi_1(X, x_0)$*:*

(i) $([a] \star [b]) \star [c] = [a] \star ([b] \star [c])$,

(ii) $[a] \star [e] = [e] \star [a] = [a]$,

(iii) $[a] \star [\bar{a}] = [\bar{a}] \star [a] = [e]$.

Więc $\pi_1(X, x_0)$ *z mnożeniem "*$\star$*" jest grupą z elementem neutralnym* $[e]$.

Definicja. Grupę $\pi_1(X, x_0)$ nazywamy *grupą podstawową* (lub *pierwszą grupą homotopii*) przestrzeni X w punkcie x_0 (lub przy punkcie x_0).

Twierdzenie 11.7 *Jeżeli* X *jest przestrzenią łukowo spójną, to grupa* $\pi_1(X, x_0)$ *nie zależy, z dokładnością do izomorfizmu, od wyboru punktu* x_0.

W tym przypadku nazywamy ją grupą podstawową przestrzeni X*, i oznaczamy* $\pi_1(X)$ *zamiast* $\pi_1(X, x_0)$.

Twierdzenie 11.8 *(i)* $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{[e]\}$ *jest trywialną grupą jednoelementową,*

(ii) $\pi_1(S^1)$ *jest izomorficzna z grupą* $\mathbb{Z}$*,*

(iii) $\pi_1(S^2) = \{[e]\}$ *jest trywialną grupą jednoelementową,*

(iv) $\pi_1(T^2)$ *- grupa podstawowa dwuwymiarowego trusa - jest izomorficzna z* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*,*

(i) $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ *jest izomorficzna z* $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Definicja. Mówimy, że łukowo spójna przestrzeń X jest *jednospójna*, jeżeli grupa podstawowa $\pi_1(X)$ jest trywialna, tzn. $\pi_1(X) = \{[e]\}$.

Twierdzenie 11.9 *Jeżeli* $f : X \to Y$ *jest ciągłe, to odwzorowanie*

$$\pi_1(X, x_0) \ni [a] \ \mapsto \ [f \circ a] \in \pi_1(Y, f(x_0))$$

jest homomorfizmem grup.

Oznaczamy je

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

i nazywamy homomorfizmem indukowanym *przez przekształcenie f.*

Jeżeli $h : X \to Y$ jest homeomorfizmem, to $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ jest izomorfizmem grup, więc jeżeli spójne łukowo przestrzenie X oraz Y są homeomorficzne, to grupy $\pi_1(X)$ oraz $\pi_1(Y)$ są izomorficzne.

Wniosek 11.10 *Ponieważ grupa $\pi_1(T^2)$ nie jest izomorficzna z grupą $\pi_1(S^2)$, więc dwuwymiarowy torus T^2 nie jest homeomorficzny z dwuwymiarową sferą S^2.*

Definicja. Powiemy, że przestrzeń M jest k-wymiarową *rozmaitością*, jeżeli dla każdego punktu $p \in M$ istnieją homeomorficzne zbiory otwarte $U \subset M$, $W \subset \mathbb{R}^k$ takie, że $p \in U$.

- Prosta $\mathbb{R}$, okrąg S^1 – są 1-wymiarowymi rozmaitościami,
- Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$, sfera S^2, torus T^2 – są 2-wymiarowymi rozmaitościami,
- $S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ jest 3-wymiarową zwartą rozmaitością.

Twierdzenie 11.11 (Hipoteza Poincarégo) *Każda zwarta spójna jednospójna 3-wymiarowa rozmaitość M jest homeomorficzna z 3-wymiarową sferą S^3.*