

# Osobliwości Odwzorowań Różniczkowalnych

## Literatura Pomocnicza:

1. V.I.Arnold, S.M.Gusein-Zade, A.N.Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Birkhäuser 1985,
2. J.W.Bruce, P.G.Giblin, *Curves and Singularities*, Cambridge University Press, Cambridge 1992,
3. Th.Bröcker, L.Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Math. Soc., Lectures Notes 17,
4. M.Golubitsky, V.Guillemin, *Stable Mappings and their Singularities*, Springer Verlag 1973,
5. J.Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press 1968,
6. M.Spivak, *Analiza na Rozmaitościach*, PWN 2005,
7. Z.Szafraniec, Notatki do wykładu "Geometria zbiorów analitycznych"
8. Z.Szafraniec, Notatki do wykładu "Osobliwości i Katastrofy"

## 1 Rozmaitości

**Definicja.** Podzbiór  $M \subset \mathbb{R}^k$  nazywa się  $m$ -wymiarową gładką rozmaitością (w  $\mathbb{R}^k$ ), jeżeli dla każdego punktu  $p \in M$  jest spełniony następujący warunek: Istnieje taki zbiór otwarty  $U$  zawierający  $p$ , zbiór otwarty  $V \subset \mathbb{R}^k$  i gładki dyfeomorfizm  $h : U \rightarrow V$ , że

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{0}\}) = \{y \in V : y_{m+1} = \dots = y_k = 0\} .$$

**Twierdzenie 1.1** Niech  $A \subset \mathbb{R}^k$  będzie otwarty, i niech  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^s$  będzie taką funkcją gładką, że jeżeli  $g(p) = q_0$  to pochodna  $Dg(p)$  jest rzędu  $s$ . Wówczas  $g^{-1}(q_0)$  jest  $(k - s)$ -wymiarową rozmaitością w  $\mathbb{R}^k$ .  $\square$

**Twierdzenie 1.2** Podzbiór  $M \subset \mathbb{R}^k$  jest  $m$ -wymiarową rozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu  $p \in M$  istnieje taki zbiór otwarty  $U$  zawierający  $p$ , zbiór otwarty  $W \subset \mathbb{R}^m$ , oraz różnowartościowa gładka funkcja  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ , że

$$(i) \quad \phi(W) = M \cap U,$$

(ii) pochodna  $D\phi(w)$  ma rząd  $m$  dla każdego  $w \in W$ ,

(iii)  $\phi^{-1} : M \cap U \rightarrow W$  jest ciągła.  $\square$

Taką funkcję  $\phi$  nazywamy *układem współrzędnych* w otoczeniu  $p$ , a funkcję  $\phi^{-1} : M \cap U \rightarrow W$  nazywamy *mapą*.

**Definicja.** Jeżeli  $p = \phi(a)$ , to odwzorowanie

$$D\phi(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

jest liniowe i różnowartościowe. *Przestrzeń styczną*  $T_pM$  do rozmaitości  $M$  w punkcie  $p$  definiujemy jako:

$$T_pM = \text{Im}(D\phi(a)).$$

Można pokazać, że  $T_pM$  jest podprzestrzenią liniową wymiaru  $m$ , i nie zależy od wyboru układu współrzędnych.

$M \subset \mathbb{R}^k$  -  $m$ -wymiarowa rozmaitość,  
 $N \subset \mathbb{R}^s$  -  $n$ -wymiarowa rozmaitość.

**Definicja.** Funkcja  $f : M \rightarrow N$  jest *gładka* ( $C^\infty$ ) jeżeli dla dowolnych układów współrzędnych

$$\phi : W \rightarrow M, \quad \psi : V \rightarrow N,$$

odpowiednio w punktach  $p \in M$  oraz  $f(p) \in N$ , odwzorowanie

$$\psi^{-1} \circ f \circ \phi : W \rightarrow V$$

jest klasy  $C^\infty$ . W szczególności pochodna  $D(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , gdzie  $p = \phi(a)$ , istnieje i jest liniowa.

Jeżeli funkcja  $f : M \rightarrow N$  jest gładka, to w każdym punkcie  $p \in M$  istnieje indukowane liniowe *odwzorowanie styczne* (lub *pochodna*):

$$Df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N.$$

Dla każdego  $p \in M$  :

$$\text{rk}[Df(p)] \leq \min\{m, n\} .$$

**Definicja.**  $p \in M$  jest *punktem regularnym*, jeżeli rząd

$$\text{rk}[Df(p)] = n$$

(Wtedy koniecznie  $m \geq n$  .) Jeżeli  $m = n$  to powyższy warunek jest równoważny temu, że  $\det[Df(p)] \neq 0$  .

Jeżeli  $m < n$  to punkty regularne nie istnieją!

**Definicja.**  $q \in N$  jest *wartością regularną*, jeżeli  $f^{-1}(q) = \emptyset$  lub każdy punkt  $p \in f^{-1}(q)$  jest regularny. W takim wypadku  $f^{-1}(q)$  jest zbiorem pustym, lub rozmaitością wymiaru  $m - n$  (i podrozmaitością w  $M$ ). Jeżeli  $m < n$  , to  $q \in N$  jest wartością regularną wtedy i tylko wtedy, gdy  $f^{-1}(q) = \emptyset$ .

**Definicja.** Punkt  $p \in M$  jest *krytyczny*, jeżeli nie jest regularny, tj.

$$\text{rk}[Df(p)] < n$$

(Jeżeli  $m < n$  to wszystkie punkty w  $M$  są krytyczne.)

**Definicja.** Punkt  $q \in N$  jest *wartością krytyczną*, jeżeli istnieje taki punkt krytyczny  $p \in M$  , że  $q = f(p)$ . Każdy punkt w  $M$  jest albo regularny albo krytyczny. Rozmaitość  $N$  jest rozłączną sumą zbioru wartości regularnych i zbioru wartości krytycznych.

**Twierdzenie 1.3 (Tw. Sarda)** *Zbiór wartości krytycznych jest podzbiorem miary zero w  $N$  . Jeżeli  $m < n$  , to  $f(M)$  jest zbiorem wartości krytycznych, więc ma miarę zero.  $\square$*

**Twierdzenie 1.4 (Wn. z Tw. o rzędzie)** *Założmy, że  $p \in M$  oraz  $\text{rk}[Df(p)] = \min\{m, n\}$ . Istnieją takie układy współrzędnych  $\phi : W \rightarrow M$  ,  $\psi : V \rightarrow N$  , że*

(i)  $\mathbf{0} \in W$  oraz  $\phi(\mathbf{0}) = p$  ,

(ii)  $\mathbf{0} \in V$  oraz  $\psi(\mathbf{0}) = f(p)$  ,

(iii) jeżeli  $m \leq n$  , to

$$\psi^{-1} \circ f \circ \phi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) ,$$

(iv) jeżeli  $n \leq m$ , to

$$\psi^{-1} \circ f \circ \phi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n). \quad \square$$

**Definicja.** Punkt  $p \in M$  jest *nieosobliwy* jeżeli

$$\text{rk}[Df(p)] = \min\{m, n\}$$

Wtedy spełniony jest Wniosek z Tw. o Rzędzie.

**Definicja.** Punkt  $p \in M$  jest *osobliwy* jeżeli

$$\text{rk}[Df(p)] < \min\{m, n\}.$$

Jeżeli  $n \leq m$  to punkt jest regularny (odp. krytyczny) wtedy i tylko wtedy gdy jest to punkt nieosobliwy (odp. osobliwy.)

**Definicja.** Funkcja  $f : M \rightarrow N$  jest *immersją*, jeżeli  $\dim M \leq \dim N$  oraz każdy punkt  $p \in M$  jest nieosobliwy, tzn.  $\text{rk}[Df(p)] = m$ .

**Definicja.** Funkcja  $f : M \rightarrow N$  jest *submersją*, jeżeli  $\dim N \leq \dim M$  oraz każdy  $p \in M$  jest punktem regularnym (czyli nieosobliwym), tzn.  $\text{rk}[Df(p)] = n$ .

Weźmy dowolne:  $g = (g_1, \dots, g_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\eta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  - dodatnia funkcja ciągła. Zdefiniujmy:

$$U(g, \eta, r) = \{f = (f_1, \dots, f_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \mid$$

$$\forall |\alpha| \leq r, \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall 1 \leq j \leq n : |D^\alpha f_j(x) - D^\alpha g_j(x)| < \eta(x)\}$$

W zbiorze  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  można wprowadzić topologię indukowaną przez bazę  $\{U(g, \eta, r)\}$ . Jest to tzw. *topologia Whitney'a* w  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ .

Podobnie można wprowadzić topologię Whitney'a w  $C^\infty(M, N)$ . Przestrzeń topologiczna  $C^\infty(M, N)$  ma własność Baire'a!

**Definicja.**  $f_1, f_2 : M \rightarrow N$  są  *$C^\infty$ -równoważne* (odp. *topologicznie równoważne*) jeżeli istnieją takie dyfeomorfizmy (odp. homeomorfizmy)  $h_1 : M \rightarrow M$ ,  $h_2 : N \rightarrow N$ , że

$$f_1 = h_2 \circ f_2 \circ h_1.$$

Jest to relacja równoważności w  $C^\infty(M, N)$ .

**Definicja.** Odwzorowanie  $f \in C^\infty(M, N)$  jest  $C^\infty$ -stabilne (odp. topologicznie stabilne) jeżeli istnieje takie otwarte otoczenie  $\mathcal{U}$  punktu  $f$  w  $C^\infty(M, N)$ , że każde odwzorowanie  $f_1 \in \mathcal{U}$  jest  $C^\infty$ -równoważne (odp. topologicznie równoważne) z odwzorowaniem  $f$ .

**Twierdzenie 1.5** Jeżeli  $M$  jest zwarta, to każda submersja  $f : M \rightarrow N$  jest  $C^\infty$ -stabilna.  $\square$

## 2 Immersje

**Twierdzenie 2.1** Załóżmy, że  $n \geq 2m$  oraz

$$f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

jest odwzorowaniem gładkim. Wtedy

(i) istnieje takie przekształcenie liniowe  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  o dowolnie małej normie, że

$$g = f + A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

jest immersją. Ponadto

(ii) jeżeli  $n = 2m$ ,  $x \neq y$  oraz  $g(x) = g(y)$  to wektory

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}(x), \frac{\partial g}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}(y),$$

są liniowo niezależne w  $\mathbb{R}^{2m}$ , więc tworzą bazę w  $\mathbb{R}^{2m}$ ,

(iii) jeżeli  $n = 2m$ , to  $g$  nie ma punktów potrójnych, tzn. dowolny przeciwobraz  $g^{-1}(z)$  ma co najwyżej dwa punkty,

(iv) jeżeli  $n > 2m$  to  $g$  jest różnowartościowe.

**Twierdzenie 2.2** Niech  $M, N$  będą takimi rozmaitościami, że  $\dim N \geq 2 \dim M$ . Istnieje otwarty gęsty podzbiór  $\mathcal{U} \subset C^\infty(M, N)$  złożony z odwzorowań spełniających poniższe warunki:

(i) jeżeli  $f \in \mathcal{U}$  to  $f$  jest immersją,

(ii) jeżeli  $\dim N = 2 \dim M$ , to punkty podwójne odwzorowania  $f$  są przecięciami normalnymi, tzn. jeżeli  $f(p) = f(q)$ ,  $p \neq q$ ,  $v_1, \dots, v_m$  jest bazą przestrzeni stycznej  $T_p M$ ,  $w_1, \dots, w_m$  jest bazą przestrzeni stycznej  $T_q M$ , to wektory

$$Df(p)v_1, \dots, Df(p)v_m, Df(q)w_1, \dots, Df(q)w_m$$

tworzą bazę przestrzeni stycznej  $T_{f(p)}N$ ,

(iii) jeżeli  $\dim N = 2 \dim M$ , to  $f$  nie ma punktów potrójnych,

(iv) jeżeli  $\dim N > 2 \dim M$ , to  $f$  jest różnowartościowym włożeniem.  $\square$

**Twierdzenie 2.3** Niech  $M, N$  będą takimi rozmaitościami, że  $M$  jest zwarta, oraz  $\dim N \geq 2 \dim M$ . Wtedy  $f : M \rightarrow N$  jest  $C^\infty$  – stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy  $f \in \mathcal{U}$ .  $\square$

Jak sprawdzić, że wielomianowe odwzorowanie  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  jest immersją:

SINGULAR:

```
> ring r=0,(x,y),dp;
> poly f1=x-2xy+y3;
> poly f2=y-3x4+x*y2;
> poly f3=x+2y+y4;
> poly f4=x3-y3;
> ideal F=f1,f2,f3,f4;
> ideal i=minor(jacob(F),2);
> ideal I=groebner(i);
> I;
I[1]=1
> exit;
```

Auf Wiedersehen.

Jak sprawdzić, że wielomianowe odwzorowanie ze sfery o promieniu 10 jest immersją (A.Nowel, I.Krzyżanowska, Z.Sz. / J. of Pure and Appl. Algebra (2010)):

SINGULAR:

```
> ring r=0,(x,y,z),dp;
```

```

> poly w=100-x2-y2-z2;
> poly f1=x-y3;
> poly f2=y+2*x*z;
> poly f3=xz-y2;
> poly f4=yz+3x2;
> ideal F=w,f1,f2,f3,f4;
> ideal i=w,minor(jacob(F),3);
> ideal I=groebner(i);
> I;
I[1]=1
> exit;
Auf Wiedersehen.

```

### 3 Funkcje Morse'a

**Fakt 3.1** Niech  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Punkt  $p \in M$  jest krytyczny wtedy i tylko wtedy, gdy w dowolnym układzie współrzędnych  $\phi : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (M, p)$  :

$$\forall i : \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = 0$$

**Definicja.** Punkt krytyczny  $p \in M$  jest niezdegenerowany, gdy w dowolnym układzie współrzędnych  $\phi : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (M, p)$  wyznacznik Hessjanu

$$\det \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0}) \right]_{i,j=1}^m \neq 0.$$

Niech  $i(p)$  oznacza znak wyznacznika Hessjanu.

**Fakt 3.2** Wartość  $i(p)$  nie zależy od wyboru układu współrzędnych.  $\square$

**Twierdzenie 3.3** Niech  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ . Wtedy

(i) istnieje taka funkcja liniowa

$$L(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m$$

o dowolnie małej normie, że funkcja

$$g(x) = f(x) + L(x)$$

ma wyłącznie niezdegenerowane punkty krytyczne,

(ii) funkcja  $g$  przyjmuje różne wartości w różnych punktach krytycznych.

**Definicja.**  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  jest funkcją Morse'a, jeżeli wszystkie punkty krytyczne są niezdegenerowane. Przedstawione poniżej twierdzenia są konsekwencjami teorii Morse'a:

**Twierdzenie 3.4** Funkcje Morse'a są otwartym gęstym podzbiorem przestrzeni  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Twierdzenie 3.5** Załóżmy, że  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  spełnia warunki:

- (a)  $f$  jest funkcją Morse'a,
- (b) dla dowolnego zbioru zwartego  $K \subset \mathbb{R}$  przeciwobraz  $f^{-1}(K)$  jest zwarty (czyli  $f$  jest odwzorowaniem właściwym),
- (c)  $f$  ma skończenie wiele punktów krytycznych w  $f^{-1}(K)$ ,
- (d) funkcja  $f$  przyjmuje różne wartości w różnych punktach krytycznych.

Wtedy funkcja  $f$  jest  $C^\infty$ -stabilna.  $\square$

**Twierdzenie 3.6** Jeżeli rozmaitość  $M$  jest zwarta, to  $f$  jest  $C^\infty$ -stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki (a),(d). Zbiór funkcji spełniających te warunki jest otwarty i gęsty w  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Definicja.** Podzbiór przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  nazywamy hiperpłaszczyzną (odp. otwartą półprzestrzenią) jeżeli istnieje funkcja linowa  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  oraz stała  $c \in \mathbb{R}$  taka, że ten podzbiór ma postać  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L(x) = c\}$  (odp.  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid L(x) < c\}$ )

**Definicja.** Zbiór  $S \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy ścianą, jeżeli jest przekrojem skończonej rodziny złożonej z hiperpłaszczyzn oraz otwartych półprzestrzeni.

Ściana jest zbiorem wypukłym, jej wymiar jest równy wymiarowi najmniejszej podprzestrzeni afinicznej w której ściana jest zawarta

Jeżeli  $S$  jest ścianą, to domknięcie  $\bar{S}$  oraz brzeg  $\partial S = \bar{S} \setminus S$  jest sumą skończonej rodziny rozłącznych ścian.

**Definicja.** Domknięty zbiór  $W \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy wielościanem, jeżeli istnieje taka skończona rodzina  $\{S_i\}$  parami rozłącznych ścian, że

- $W = \bigcup_i S_i$ ,
- dla każdej ściany  $S_j$  :  $\overline{S_j}$  oraz  $\partial S_j$  są sumami pewnych ścian z rodziny  $\{S_i\}$ .

**Definicja.** *Charakterystyką Eulera* wielościanu  $W$  nazywamy liczbę całkowitą:

$$\chi(W) = \sum_i (-1)^{\dim(S_i)} .$$

**Definicja.** Niech  $X$  będzie zbiorem homeomorficznym z pewnym wielościanem  $W$  . Liczbę

$$\chi(X) := \chi(W)$$

nazywamy *charakterystyką Eulera* zbioru  $X$ .

**Twierdzenie 3.7** *Jeżeli istnieje taka funkcja Morse'a  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  , posiadająca tylko skończenie wiele punktów krytycznych, że dla każdego  $y_0 \in \mathbb{R}$  przeciwobraz  $f^{-1}[-\infty, y_0]$  jest zwarty, to*

(i) *charakterystyka Eulera  $\chi(M)$  jest zdefiniowana,*

(ii)  $\chi(M) = \sum i(p)$  , *gdzie  $p$  przebiega zbiór punktów krytycznych funkcji  $f$  .  $\square$*

Jak sprawdzić, że wielomian  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją Morse'a:

```
> ring r=0, (x,y,z), dp;
> poly f=x-3y+2z-xyz+x*y^2-5x^2*z+5y*z;
> ideal F=f;
> ideal j=jacob(F), det(jacob(jacob(F)));
> ideal J=groebner(j);
> J;
J[1]=1
> exit;
```

Auf Wiedersehen.

Jak sprawdzić, że wielomian  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  przyjmuje różne wartości w różnych punktach krytycznych:

```
> ring r=0, (x,y,w), dp;
> poly f=x^6+2y^6-3xy^3+5x^2y^2-x^4y+2x-3y;
```

```

> ideal i=jacob(f),w-f;
> option(redSB);
> ideal I=std(i);
> vdim(I);
25
> ring s=0,(x,y,w),lp;
> ideal J=fglm(r,I);
> poly p=J[1];
> leadexp(p);
0,0,25
> gcd(p,diff(p,w));
1
> exit;
Auf Wiedersehen.

```

(Program sprawdził, że wielomian  $f = f(x, y)$  ma co najwyżej 25 punktów krytycznych w dziedzinie zespolonej, oraz ma co najmniej 25 różnych zespolonych wartości w tych punktach. Implikuje to, że wartości w punktach krytycznych leżących w  $\mathbb{R}^2$  są różne.)

## 4 Odwzorowania pomiędzy powierzchniami

**Fakt 4.1** Niech  $(f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie gładkie. Istnieje wtedy taki zbiór  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$  miary zero, że jeżeli  $(a_1, \dots, a_4) \notin \Sigma$ , to odwzorowanie

$$(g_1, g_2) = (f_1 - a_1x_1 - a_2x_2, f_2 - a_3x_1 - a_4x_2)$$

ma rząd  $\geq 1$  w każdym punkcie. W szczególności można zakładać, że  $\max |a_i|$  jest dowolnie małe.

**Fakt 4.2** Załóżmy, że  $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest odwzorowaniem którego pochodna w punkcie  $p \in \mathbb{R}^2$  ma rząd  $\geq 1$ . Wtedy można wprowadzić takie współrzędne  $\phi(x_1, x_2)$  w otoczeniu punktu  $p$ , że

$$g \circ \phi(x_1, x_2) = (x_1, h(x_1, x_2)).$$

**Definicja.** Jeżeli  $N'$  jest podrozmaitością zawartą w rozmaitości  $N$ , to liczbę  $\text{codim } N' = \dim N - \dim N'$  nazywamy *kwymiarem* podrozmaitości  $N'$ .

**Twierdzenie 4.3** Jeżeli  $N'$  jest podrozmaitością zawartą w  $N$ , oraz przekształcenie  $f : M \rightarrow N$  jest submersją, to  $f^{-1}(N')$  jest podrozmaitością zawartą w  $M$  o kowymiarze równym  $\text{codim } N'$ , lub zbiorem pustym. Wtedy  $\dim f^{-1}(N') = \dim M - \text{codim } N'$ .  $\square$

**Twierdzenie 4.4** Niech  $h = h(x, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie  $C^\infty$ -funkcją. Zdefiniujmy

$$s(x, z) = h(x, z) + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 x z + b_4 z^3.$$

Istnieje taki zbiór  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$  miary zero, że jeżeli  $(b_1, \dots, b_4) \notin \Sigma$ , to w każdym punkcie  $p \in \mathbb{R}^2$ :

- (i) albo  $\partial s / \partial z(p) \neq 0$ ,
- (ii) albo  $\partial s / \partial z(p) = 0$ , oraz  $\partial^2 s / \partial z^2(p) \neq 0$ ,
- (iii) albo  $\partial s / \partial z(p) = 0$ ,  $\partial^2 s / \partial z^2(p) = 0$ , oraz  $\partial^2 s / \partial x \partial z(p) \neq 0$  &  $\partial^3 s / \partial z^3(p) \neq 0$

W szczególności można zakładać, że  $\max |b_i|$  jest dowolnie małe.

**Fakt 4.5** Załóżmy, że  $f = (x, s(x, z)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Jeżeli  $\partial s / \partial z(p) \neq 0$ , to  $p$  jest punktem regularnym. Możemy wtedy znaleźć współrzędne  $\phi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, p)$ ,  $\psi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, f(p))$  w których  $\psi^{-1} \circ f \circ \phi$  ma postać

$$(x, z) \mapsto (x, z).$$

Takie przedstawienie w postaci kielka  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  nazywa się postacią normalną odwzorowania  $f$  w punkcie  $p$ .

**Fakt 4.6 (H. Whitney (1955))** Załóżmy, że  $f = (x, s(x, z)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Jeżeli  $\partial s / \partial z(p) = 0$  oraz  $\partial^2 s / \partial z^2(p) \neq 0$ , to postać normalna odwzorowania  $f$  w punkcie  $p$  ma postać

$$(x, z) \mapsto (x, z^2).$$

**Fakt 4.7 (H. Whitney (1955))** Załóżmy, że  $f = (x, s(x, z)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Jeżeli  $\partial s / \partial z(p) = 0$  oraz  $\partial^2 s / \partial z^2(p) = 0$ , oraz

$$\partial^2 s / \partial x \partial z(p) \neq 0 \quad \& \quad \partial^3 s / \partial z^3(p) \neq 0$$

to postać normalna odwzorowania  $f$  w punkcie  $p$  ma postać

$$(x, z) \mapsto (x, z^3 - xz). \quad \square$$

**Twierdzenie 4.8 (H. Whitney (1955))** *Istnieje taki otwarty gęsty podzbiór  $\mathcal{T} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , że dla  $p \in \mathbb{R}^2$  oraz  $f \in \mathcal{T}$  kielek  $f : (\mathbb{R}^2, p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, f(p))$  ma jedną z trzech postaci normalnych:*

- (i)  $(x, z) \mapsto (x, z)$  – gdy  $p$  jest punktem regularnym,
- (ii)  $(x, z) \mapsto (x, z^2)$  – wtedy  $p$  jest punktem złożenia (fold),
- (iii)  $(x, z) \mapsto (x, z^3 - xz)$  – wtedy  $p$  jest ostrzem (cusp).  $\square$

Można postawić pytania: Kiedy takie odwzorowanie jest stabilne, lub lokalnie stabilne? Czy to twierdzenie jest spełnione w klasie funkcji holomorficznych  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ?

### Osobliwości odwzorowań wielomianowych $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{odwzorowanie wielomianowe}$$

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} .$$

Jeżeli  $J(p) \neq 0$ , to  $p$  jest punktem regularnym.

$$F_1 = \frac{\partial(J, f_1)}{\partial(x, y)} , \quad F_2 = \frac{\partial(J, f_2)}{\partial(x, y)} .$$

$$I := \left\langle J, F_1, F_2, \frac{\partial(J, F_1)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(J, F_2)}{\partial(x, y)} \right\rangle \subset \mathbb{R}[x, y] .$$

**Twierdzenie 4.9 (Krzyżanowska, Sz., J. Math. Soc. Japan (2014))**

*Jeżeli  $I = \mathbb{R}[x, y]$ , to  $f \in \mathcal{T}$ .  $\square$*

Weźmy  $f = (x^2y^3 - x^2y + xy^2 - x, x^3y - x^2y + y^3 + x - y)$ . Używając programu SINGULAR można sprawdzić, że  $f \in \mathcal{T}$ , oraz ma 8 ostrzy. Poniżej przedstawiamy, jak sprawdzić, że  $f \in \mathcal{T}$ :

```
ring r=0, (x,y), dp;
poly f1= x2*y3-x2*y+x*y2-x ;
poly f2= x3*y-x2*y+y3+x-y ;
poly J=diff(f1,x)*diff(f2,y)-diff(f1,y)*diff(f2,x);
poly F1=diff(J,x)*diff(f1,y)-diff(J,y)*diff(f1,x);
poly F2=diff(J,x)*diff(f2,y)-diff(J,y)*diff(f2,x);
poly G1=diff(J,x)*diff(F1,y)-diff(J,y)*diff(F1,x);
```

```

poly G2=diff(J,x)*diff(F2,y)-diff(J,y)*diff(F2,x);
ideal i=J,F1,F2,G1,G2;
ideal I=groebner(i);
I;
I[1]=1
exit;
Auf Wiedersehen
(obliczenia trwały mniej niz 1 sek.)

```

## 5 Osobliwości Thoma-Boardmana

**Definicja.**  $f : M \rightarrow N$  odwzorowanie gładkie.

$$\begin{aligned} \Sigma^i(f) &= \{p \in M \mid \text{rk}[Df(p)] = \dim(M) - i\} \\ &= \{p \in M \mid \dim \text{Ker}[Df(p)] = i\}. \end{aligned}$$

Niech  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wtedy  $\Sigma^0(f) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \text{rk}[Df(p)] = 2\}$  jest zbiorem punktów regularnych,

$$\begin{aligned} \Sigma^1(f) &= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \text{rk}[Df(p)] = 1\}, \\ \Sigma^2(f) &= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \text{rk}[Df(p)] = 0\}. \end{aligned}$$

$\Sigma^1(f) \cup \Sigma^2(f)$  – zbiór punktów krytycznych.

**Przykład.** Jeżeli  $f \in \mathcal{T}$  (z Tw. Whitney’a 4.8), to  $\Sigma^1(f)$  jest jednowymiarową rozmaitością,  $\Sigma^2(f)$  jest zbiorem pustym.

**Ćwiczenie.** Jak wyglądają te zbiory dla  $(x, z) \mapsto (x^2, z^2)$ ,  $(x, z) \mapsto (x, z^3)$ .

**Definicja.** Jeżeli  $\Sigma^i(f)$  jest rozmaitością, to

$$\Sigma^{i,j}(f) = \Sigma^j(f \mid \Sigma^i(f)).$$

**Ćwiczenie.** Jak wyglądają zbiory  $\Sigma^{i,j}(f)$  dla kielków:

$(x, z^2)$ ,  $(x, z^3 - xz)$ ,  $(x^2, z^2)$ ,  $(x, z^3)$ .

Zawsze:  $M \supset \Sigma^i(f) \supset \Sigma^{i,j}(f)$ .

Ponieważ  $\text{Ker}[D(f|\Sigma^i(f))(p)] = \text{Ker}[Df(p)] \cap T_p(\Sigma^i(f))$ , oraz  $\dim \text{Ker}[Df(p)] = i$ , więc  $j \leq i$ .

**Definicja.** Jeżeli  $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , to można indukcyjnie zdefiniować

$$\Sigma^I(f) = \Sigma^{i_n}(f|\Sigma^{i_1, \dots, i_{n-1}}(f)),$$

o ile pojawiające się w kolejnych krokach zbiory są rozmaitościami. Zbiór ten może być niepusty tylko wtedy, gdy

$$m \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n.$$

**Twierdzenie 5.1** Jeżeli odwzorowania  $f, g : M \rightarrow N$  są  $C^\infty$ -równoważne, to zbiory  $\Sigma^I(f)$ ,  $\Sigma^I(g)$  są homeomorficzne, i dyfeomorficzne o ile są rozmaitościami.

**Definicja.** Niech  $W \subset N$  będzie podrozmaitością kowymiaru  $k$ . Odwzorowanie gładkie  $f : M \rightarrow N$  jest **transwersalne** do podrozmaitości  $W$ , jeżeli dla każdego punktu  $p \in f^{-1}(W)$  :

$$Df(p)(T_p M) + T_{f(p)}W = T_{f(p)}N,$$

lub równoważnie, jeżeli złożenie

$$Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)}N \rightarrow T_{f(p)}N/T_{f(p)}W$$

jest surjekcją.

Jeżeli  $m < k$ , to transwersalność oznacza, że  $f^{-1}(W) = \emptyset$ .

**Uwaga.** Jeżeli  $f$  jest submersją, to  $f$  jest transwersalne do każdej podrozmaitości  $W \subset N$ .

W otoczeniu punktu  $f(p) \in W \subset N$  można wprowadzić takie współrzędne  $(y_1, \dots, y_n)$ , że lokalnie  $W$  jest opisane przez równanie  $y_1 = \dots = y_k = 0$ . Załóżmy, że  $f = (f_1, \dots, f_n)$  w otoczeniu punktu  $p$ . Wtedy warunek transwersalności w punkcie  $f(p)$  jest równoważny temu, że macierz

$$\left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right], \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq m,$$

ma rząd  $k$  dla dowolnego układu współrzędnych  $(x_1, \dots, x_m)$  w pobliżu  $p$ .

**Twierdzenie 5.2** Jeżeli  $f : M \rightarrow N$  jest transwersalne do podrozmaitości  $W \subset N$  kowymiary  $k$ , to  $f^{-1}(W) \subset M$  jest podrozmaitością kowymiary  $k$ , lub zbiorem pustym.

**Wniosek 5.3** Jeżeli  $\dim M = \text{codim } W$  oraz  $f : M \rightarrow N$  jest transwersalne do  $W$ , to  $f^{-1}(W)$  jest dyskretnym podzbiorem  $M$ , tzn.  $f^{-1}(W)$  składa się z punktów izolowanych.  $\square$

**Twierdzenie 5.4** Jeżeli  $W \subset N$  jest domkniętą podrozmaitością, to zbiór odwzorowań transwersalnych do  $W$  jest otwarty i gęsty w  $C^\infty(M, N)$ .

**Ćwiczenie 5.5** Jeżeli  $f : M \rightarrow N$  jest transwersalne do  $W$ , oraz  $p \in f^{-1}(W)$ , to dla każdego otwartego otoczenia  $U$  punktu  $p$  w  $M$  istnieje takie otwarte otoczenie  $\mathcal{U}$  odwzorowania  $f$  w  $C^\infty(M, N)$ , że jeżeli  $g \in \mathcal{U}$ , to  $g^{-1}(W) \cap U \neq \emptyset$ .  $\square$

W takim przypadku możemy mówić, że punkty z  $f^{-1}(W)$  są **nieusuwalne**.

**Lemat 5.6** Niech  $LA(m, n) = \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  będzie przestrzenią  $(n \times m)$ -macierzy, oraz niech

$$LA(m, n; r) \subset LA(m, n)$$

będzie podzbiorem macierzy mających rząd  $r$ . Wtedy  $LA(m, n; r)$  jest podrozmaitością w  $LA(m, n)$  kowymiary

$$(m - r) \cdot (n - r)$$

dla  $r \leq \min(m, n)$ .

**Lemat 5.7** Niech  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie gładkim odwzorowaniem, niech  $W \subset LA(m, n)$  będzie podrozmaitością. Wtedy dla prawie każdego liniowego odwzorowania  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , (tzn. dla prawie każdej  $(n \times m)$ -macierzy), odwzorowanie  $\gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow LA(m, n)$ :

$$x \mapsto D(f + A)(x) = Df(x) + A$$

jest transwersalne do  $W$ .

Niech  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i \leq m$ . Przypomnijmy, że

$$\Sigma^i(f) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{rk}[Df(x)] = m - i\}$$

**Twierdzenie 5.8 (R.Thom, Tw. o Transwersalności)** *Istnieje taki zbiór  $U \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = LA(m, n)$ , którego dopełnienie ma miarę zero, że*

$$\forall A \in U \quad \forall i \leq m \quad : \quad \text{zbiór } \Sigma^i(f + A)$$

*jest podrozmaitością w  $\mathbb{R}^m$  kowymiaru  $(n - m + i) \cdot i$ , lub zbiorem pustym.*

Poniżej formułujemy wersję Tw. Thoma o Transwersalności udowodnioną przez Boardmana.

**Twierdzenie 5.9 (Tw. o Transwersalności)** *Istnieje taki zbiór  $\mathcal{T} \subset C^\infty(M, N)$ , będący przekrojem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych i gęstych, że dla  $f \in \mathcal{T}$  oraz  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , zbiór*

$$\Sigma^I(f) = \Sigma^{i_1, \dots, i_k}(f)$$

*jest rozmaitością kowymiaru  $\nu_I(m, n)$ , lub zbiorem pustym.*

*(Punkty z  $\Sigma^I(f)$  są "nieusuwalne".)  $\square$*

Funkcja  $\nu_I(m, n)$  została w pełni opisana przez Boardmana. W szczególnych przypadkach:

$$\nu_i(m, n) = (n - m + i) \cdot i ,$$

$$\nu_{i,j}(m, m) = i^2 + \frac{j}{2}(2i^2 - ij + 2j - i) ,$$

$$\nu_I(m, n) = (n - m + 1) \cdot k , \quad \text{gdzie } I = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k$$

**Ćwiczenie 5.10 (5.10)** *Osobliwościami nieusuwalnymi (o ile istnieją) są np.:*

- $\Sigma^1, \Sigma^{1,1}, \Sigma^{1,0}$  dla  $m = n = 2$ ,
- $\Sigma^1, \Sigma^{1,1}, \Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,1,1}, \Sigma^{1,1,0}$  dla  $m = n = 3$ ,
- $\Sigma^1, \Sigma^{1,1}, \Sigma^{1,0}, \Sigma^{1,1,1}, \Sigma^{1,1,1,1}, \Sigma^2, \Sigma^{2,0}$  dla  $m = n = 4$ .

Formy normalne **nieusuwalnych** osobliwości:

- $\Sigma^{m,0}(m, 1) : (x_1, \dots, x_m) \mapsto \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_m^2$
- $\Sigma^{1,0}(2, 2) : (x, y) \mapsto (x, y^2)$

- $\Sigma^{1,1}(2,2) : (x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$

Formy normalne **nieusuwalnych** osobliwości z  $\Sigma^1(2,2)$  mają jedną z powyższych postaci.

Poniżej podajemy postać normalną w kilku ważnych przypadkach:

- $\Sigma^{1,0}(3,3) : (x, y, z) \mapsto (x, y, z^2)$
- $\Sigma^{1,1,0}(3,3) : (x, y, z) \mapsto (x, y, z^3 + yz)$
- $\Sigma^{1,1,1}(3,3) : (x, y, z) \mapsto (x, y, z^4 + xy^2 + yz)$
- $\Sigma^{1,0}(4,4) : (x, y, z, w) \mapsto (x, y, z, w^2)$
- $\Sigma^{1,1,0}(4,4) : (x, y, z, w) \mapsto (x, y, z, w^3 + wz)$
- $\Sigma^{1,1,1,0}(4,4) : (x, y, z, w) \mapsto (x, y, z, w^4 + yw^2 + zw)$
- $\Sigma^{1,1,1,1}(4,4) : (x, y, z, w) \mapsto (x, y, z, w^5 + xw^3 + yw^2 + zw)$
- $\Sigma^2(4,4) : (x, y, z, w) \mapsto (x, y, zw, z^2 \pm w^2 + xz + yw)$ .

Poniżej przedstawiamy Tw. o rządzie odwzorowania ograniczonego do podrozumności:

**Twierdzenie 5.11** *Niech  $p \in \mathbb{R}^m$ , oraz niech  $h_1, \dots, h_s : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  będą takimi funkcjami, że gradienty  $\nabla(h_1)(p), \dots, \nabla(h_s)(p)$  są liniowo-niezależne, oraz  $h_1(p) = y_1, \dots, h_s(p) = y_s$ .*

*Wtedy, z Tw. o Funkcji Uwikłanej,*

$$W = \{x \in \mathbb{R}^m \mid h_1(x) = y_1, \dots, h_s(x) = y_s\}$$

*jest  $(m - s)$ -rozumnością w otoczeniu punktu  $p$ .*

*Jeżeli  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , to*

$$\begin{aligned} \text{rk}[D(f|W)(p)] &= \text{rk}[D(f_1, \dots, f_n, h_1, \dots, h_s)(p)] - s \\ &= \text{rk}[\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_n(p), \nabla h_1(p), \dots, \nabla h_s(p)] - s. \quad \square \end{aligned}$$

## 6 Efektywny opis typu osobliwości

$$f = (f_1, \dots, f_n) : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) .$$

Jak efektywnie znaleźć typ osobliwości odwzorowania  $f$  w punkcie  $\mathbf{0}$  ?

$[Df(x)]$  – macierz jacobiego ,

$$r := \text{rk} [Df(\mathbf{0})] , \quad i := m - r ,$$

$$\mathbf{0} \in \Sigma^i(f) .$$

Jak sprawdzić, czy  $\Sigma^i(f)$  jest rozmaitością ?

Niech  $m_1(x), \dots, m_s(x)$  będą wyznacznikami wszystkich  $(r+1) \times (r+1)$ -minorów macierzy  $[Df(x)]$ .

$$r = \text{rk} [Df(\mathbf{0})] \quad \Rightarrow \quad m_1(\mathbf{0}) = \dots = m_s(\mathbf{0}) = 0 ,$$

$$M(x) := (m_1(x), \dots, m_s(x)) ,$$

$$\Sigma^i(f) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid m_1(x) = \dots = m_s(x) = 0\} = M^{-1}(\mathbf{0})$$

w pobliżu  $\mathbf{0}$  .

$[DM(x)]$  – macierz jacobiego,

$$p := \text{rk} [DM(\mathbf{0})] .$$

Oczywiście  $p \leq \min\{m, s\}$  .

Po ewentualnej zamianie kolejności zmiennych oraz minorów, można założyć, że  $p \times p$ -macierz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x_1}(\mathbf{0}) & \dots & \frac{\partial m_1}{\partial x_p}(\mathbf{0}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial m_p}{\partial x_1}(\mathbf{0}) & \dots & \frac{\partial m_p}{\partial x_p}(\mathbf{0}) \end{bmatrix}$$

ma rząd  $p$ . Z Tw. o Funkcji Uwikłanej, w pobliżu  $\mathbf{0}$  zbiór

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m \mid m_1(x) = \dots = m_p(x) = 0\}$$

jest  $(m-p)$ -wymiarową rozmaitością .

**Fakt 6.1** Załóżmy, że ideały w  $\mathcal{E}(m)$  generowane przez  $m_1(x), \dots, m_p(x)$  oraz  $m_1(x), \dots, m_s(x)$  są równe. Wtedy

$$\Sigma^i(f) = P$$

w pobliżu  $\mathbf{0}$  , czyli  $\Sigma^i(f)$  jest  $(m-p)$ -wymiarową rozmaitością.

Niech  $N(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x), m_1(x), \dots, m_p(x))$ .

**Fakt 6.2**  $\text{rk} [D(f|\Sigma^i(f))(x)] = \text{rk} [DN(x)] - p$ .  $\square$

**Fakt 6.3** Niech  $j = m - \text{rk} [DN(\mathbf{0})]$ . Wtedy  $\mathbf{0} \in \Sigma^{i,j}(f)$ .

**Przykład: SINGULAR**

```
> ring R=0, (x,y,z), ds;
> poly f1=x^2-y^2-xz- ... +4xz^3+5yz^3+z^4;
> poly f2=x-z+yz;
> poly f3=x-y-2z+xyz;
> ideal f=f1,f2,f3;
> matrix Df=jacob(f);
> LIB "linalg.alg";
> matrix Df0=subst(Df,x,0,y,0,z,0);
> int r=mat_rk(Df0);
> r;
2
```

Więc  $i = 3 - 2 = 1$ .

```
> ideal M=minor(Df,3);
> M;
M[1]=-x+y+2z- ... -10y^2z^4-4yz^5
> matrix DM=jacob(M);
> matrix DM0=subst(DM,x,0,y,0,z,0);
> int p=mat_rk(DM0);
> p;
1
> ideal K=M[1];
> ideal gM=std(M);
> ideal gK=std(K);
> reduce(gM,gK);
_[1]=0
> reduce(gK,gM);
_[1]=0 .
```

Idealy  $M$  oraz  $K$  są więc równe.

```

> ideal N=f,M[1];
> matrix DN=jacob(N);
> matrix DNO=subst(DN,x,0,y,0,z,0);
> int j=3-mat_rk(DNO);
j;
j=1
> exit;

```

Auf Wiedersehen

Odwzorowanie  $f$  ma w punkcie  $\mathbf{0}$  osobliwość  $\Sigma^{1,1}$ . W podobny sposób można sprawdzić, że jest to osobliwość  $\Sigma^{1,1,1}$ . **Nie wynika z tego jeszcze, że osobliwość ta jest nieusuwalna !!!**

**Twierdzenie 6.4** *Niech*

$$f(x, z_2, \dots, z_m) = (h(x, z_2, \dots, z_m), z_2, \dots, z_m) : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}).$$

Założmy, że

$$(a) \quad h(\mathbf{0}) = \frac{\partial h}{\partial x}(\mathbf{0}) = \dots = \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(\mathbf{0}) = 0, \quad k \leq m,$$

(b) gradienty  $\nabla(\frac{\partial h}{\partial x})(\mathbf{0}), \dots, \nabla(\frac{\partial^k h}{\partial x^k})(\mathbf{0})$  są liniowo-niezależne.

Wtedy

$$(i) \quad \mathbf{0} \in \Sigma^I(f), \text{ gdzie } I = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k,$$

(ii)  $\Sigma^I(f) = \{p \in \mathbb{R}^m \mid \frac{\partial h}{\partial x}(p) = \dots = \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(p) = 0\}$  jest  $(m - k)$ -wymiarową rozmaitością w pobliżu  $\mathbf{0}$ ,

(iii) jeżeli  $\frac{\partial^{k+1} h}{\partial x^{k+1}}(\mathbf{0}) \neq 0$  to  $\mathbf{0} \in \Sigma^{I,0}(f)$ .

**Ćwiczenie 6.5** *Odwzorowanie  $f = (x^2, z_2, \dots, z_m) : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$  posiada w  $\mathbf{0}$  osobliwość typu  $\Sigma^{1,0}$ . Odwzorowanie*

$$f = (x^{k+1} + z_2 x^{k-1} + \dots + z_k x, z_2, \dots, z_m) : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}), \text{ dla } 2 \leq k \leq m \text{ posiada osobliwość typu } (I, 0) = \underbrace{((1, \dots, 1))}_k, 0).$$

**Ćwiczenie 6.6** *Opisać te osobliwości gdy  $m = 2, 3$ .*

## 7 Algebra kielków

$\mathcal{E} = \mathcal{E}(n)$  -  $\mathbb{R}$ -algebra  $C^\infty$ - kielków  $(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(n) = \{a \in \mathcal{E}(n) | a(\mathbf{0}) = 0\}$  - **jedyny** ideał maksymalny w  $\mathcal{E}(n)$ .

$\mathfrak{m}(n) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

$\mathcal{E}(n)$  - jest przemiennym pierścieniem lokalnym, nie jest noetherowski, posiada dzielniki zera.

$(\mathcal{B}(n), \circ)$  - grupa odwracalnych  $C^\infty$ -kielków  $(\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ .

Kiełek  $H : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$  należy do  $\mathcal{B}(n)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det[DH(\mathbf{0})] \neq 0 .$$

$C^\infty$  - kiełek  $F = (F_1, \dots, F_n) : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$  indukuje homomorfizm  $\mathbb{R}$ -algebr

$$F^* : \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{E}(m) :$$

$$\mathcal{E}(n) \ni a \mapsto a \circ F = a(F) \in \mathcal{E}(m) .$$

$F^*(\mathfrak{m}(n))$  - ideał w  $\mathcal{E}(m)$  generowany przez

$$F^*(x_1) = F_1, \dots, F^*(x_n) = F_n,$$

$$F^*(\mathfrak{m}(n)) \subset \mathfrak{m}(m),$$

Jeżeli  $K : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbf{0})$ , to  $K \circ F : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbf{0})$ , oraz

$$(K \circ F)^* = F^* \circ K^* : \mathcal{E}(k) \rightarrow \mathcal{E}(m) .$$

**Twierdzenie 7.1 (Tw. Przygotowawcze)** *Jeżeli  $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{E}(m)$  są takimi kielkami, że ich warstwy rozpinają przestrzeń wektorową  $\mathcal{E}(m)/F^*(\mathfrak{m}(n))$ , to dla każdego  $g \in \mathcal{E}(m)$  istnieją takie  $a_1, \dots, a_s \in \mathcal{E}(n)$ , że*

$$\begin{aligned} g &= F^*(a_1) \cdot g_1 + \dots + F^*(a_s) \cdot g_s \\ &= a_1(F) \cdot g_1 + \dots + a_s(F) \cdot g_s \quad \square \end{aligned}$$

**Definicja.**  $\mathcal{R}_F = \mathcal{E}(m)/F^*(\mathfrak{m}(n))$  - **pierścień stowarzyszony z odwzorowaniem  $F$** . Jeżeli  $H \in \mathcal{B}(n)$ , to

- $H^* : \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{E}(n)$  jest izomorfizmem  $\mathbb{R}$  - algebr,
- $(H^*)^{-1} = (H^{-1})^*$ ,
- $H^*(\mathfrak{m}(n)) = \mathfrak{m}(n)$ .

**Definicja.** Kiełki  $F, G : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$  są **równoważne**, jeżeli istnieją takie  $H^1 \in \mathcal{B}(n)$ ,  $H^2 \in \mathcal{B}(m)$ , że

$$F = H^1 \circ G \circ H^2 .$$

**Fakt 7.2** Jeżeli kiełki  $F, G$  są równoważne, to pierścienie  $\mathcal{R}_F, \mathcal{R}_G$  są izomorficzne.

Jeżeli  $n \geq m$ , to często  $\dim_R \mathcal{R}_F < \infty$ .

**Ćwiczenie 7.3** Sprawdzić, czy kiełki  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  dane wzorami:  $f_1 = (x, y^2)$ ,  $f_2 = (x, y^3 - xy)$ ,  $f_3 = (x, y^3)$  są równoważne? .

SINGULAR

```
> ring r=0,(x,y),ds;
> ideal f1=x,y2;
> ideal F1=std(f1);
> vdim(F1);
2
> F1;
x
y2
> kbase(F1);
y
1
 $\mathbf{0} \in \Sigma^{1,0}(f_1)$  ,  $\dim_R \mathcal{R}_{f_1} = 2$  .
```

SINGULAR

```
> ideal f2=x,y3-xy;
> ideal F2=std(f2);
> vdim(F2);
3
> F2;
x
y3
> kbase(F2);
y2
y
1
```

$\mathbf{0} \in \Sigma^{1,1}(f_2)$  ,  $\dim_R \mathcal{R}_{f_2} = 3$  .

SINGULAR

```
> ideal f3=x,y3;
> ideal F3=std(f3);
> vdim(F3);
3
> F3;
x
y3
> kbase(F3);
y2
y
1
```

$\mathbf{0} \in \Sigma^{1,0}(f_3)$  ,  $\dim_R \mathcal{R}_{f_3} = 3$

Żadna para tych kielków nie jest równoważna !

**Przykład.** Niech  $F = (x^2, z_2, \dots, z_m) : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$  dla  $k = 1$ ,  
lub  $F = (x^{k+1} + z_2 x^{k-1} + \dots + z_k x, z_2, \dots, z_m) : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$   
dla  $2 \leq k \leq m$ . Wtedy  $\mathcal{R}_F \simeq \mathbb{R}[x]/\langle x^{k+1} \rangle$ .

Używając takich samych argumentów, jak w dowodzie Tw. 6.6 w wykładzie *Geometria Zbiorów Analitycznych*, można udowodnić

**Twierdzenie 7.4** *Jeżeli  $\dim_R \mathcal{R}_F < \infty$ , to  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$  jest punktem izolowanym w  $F^{-1}(\mathbf{0})$ .  $\square$*

**Wniosek 7.5** *Jeżeli  $f : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{0}) = y_0$ ,*

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) ,$$

*oraz  $\dim_R \mathcal{R}_{\nabla f} < \infty$ , to  $\mathbf{0}$  jest izolowanym punktem krytycznym.*

*Więc z Tw. o Funkcji Uwikłanej, w pobliżu  $\mathbf{0}$ , zbiór  $f^{-1}(y_0) \setminus \{\mathbf{0}\}$  oraz każdy ze zbiorów  $f^{-1}(\delta)$ , dla  $\delta \neq y_0$ , jest  $(m-1)$ -rozmaitością lub zbiorem pustym.  $\square$*

**Przykład.** SINGULAR

```
> ring r=0,(x,y,z),ds;
```

```

> poly f=6-2x2y2-xyz+xz3-4y5+2y*x4;
> ideal n=jacob(f);
> ideal N=std(n);
> vdim(N);

```

24

```
exit;
```

Ponieważ  $\dim_R \mathcal{R}_{\nabla f} = 24$ , więc kielek  $f$  ma izolowany punkt krytyczny w  $\mathbf{0}$ .

**Twierdzenie 7.6** *Niech  $F = (F_1, \dots, F_n) : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ , gdzie  $n < m$ , i niech  $I \subset \mathcal{E}(m)$  będzie ideałem generowanym przez  $F_1(x), \dots, F_n(x)$  oraz wyznaczniki wszystkich  $n \times n$ -minorów macierzy  $DF(x)$ .*

*Jeżeli  $\dim_R \mathcal{E}(m)/I < \infty$ , to w pewnym otoczeniu  $\mathbf{0}$  zbiór  $F^{-1}(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  jest  $(m - n)$ -rozmaitością, lub zbiorem pustym, więc zbiór  $F^{-1}(\mathbf{0})$  ma **izolowaną osobliwość** w  $\mathbf{0}$ .*

**Przykład. SINGULAR**

```

> ring r=0, (x,y,z,w), ds;
> poly f1=z2*y-x*w2+3x2*z-y3*w+w3-3z4;
> poly f2=xyz-2x2*w2-x4-5y3+5z3-4w3;
> ideal F=f1,f2;
> ideal I=F,minor(jacob(F),2);
> vdim(std(I));

```

74

Ponieważ  $\dim_R \mathcal{E}(m)/I = 74 < \infty$ , to w pewnym otoczeniu  $\mathbf{0}$  zbiór  $F^{-1}(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  jest 2-rozmaitością, lub zbiorem pustym, więc zbiór  $F^{-1}(\mathbf{0})$  ma **izolowaną osobliwość** w  $\mathbf{0}$ .

**Twierdzenie 7.7** (a) *Jeżeli  $\dim_R \mathcal{R}_F = 1$ , to  $\mathcal{R}_F \simeq \mathbb{R}$ ,*

(b) *Jeżeli  $\dim_R \mathcal{R}_F = 2$ , to  $\mathcal{R}_F \simeq \mathbb{R}[x]/\langle x^2 \rangle$ ,*

(c) *Jeżeli  $\dim_R \mathcal{R}_F = 3$ , to  $\mathcal{R}_F$  jest izomorficzny z jednym z poniższych pierścieni:*

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^3 \rangle,$$

$$\mathbb{R}[x, y]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle,$$

(d) *Jeżeli  $\dim_R \mathcal{R}_F = 4$ , to  $\mathcal{R}_F$  jest izomorficzny z jednym z poniższych pierścieni:*

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^4 \rangle,$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}[x, y] / \langle x^2, xy, y^3 \rangle, \\ & \mathbb{R}[x, y] / \langle x^2 + y^2, xy \rangle = \mathbb{R}[x, y] / \langle x^2 + y^2, xy, y^3 \rangle, \\ & \mathbb{R}[x, y] / \langle x^2 - y^2, xy \rangle = \mathbb{R}[x, y] / \langle x^2 - y^2, xy, y^3 \rangle, \\ & \mathbb{R}[x, y, z] / \langle x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

**Pytanie.** Co różni te powyższe pierścienie, które mają ten sam wymiar?

## 8 Formy dwuliniowe

- $V$  -  $\mathbb{R}$ -przestrzeń wektorowa skończonego wymiaru
- $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  - odwzorowanie dwuliniowe symetryczne
- $\Phi^2 : V \rightarrow \mathbb{R} : \Phi^2(v) = \Phi(v, v)$  - forma kwadratowa
- istnieją podprzestrzenie liniowe  $V_1, V_2 \subset V$  maksymalnego wymiaru spełniające:

$$\forall v \in V_1 \setminus \{0\} : \Phi^2(v) = \Phi(v, v) > 0,$$

$$\forall v \in V_2 \setminus \{0\} : \Phi^2(v) = \Phi(v, v) < 0$$

- $\sigma(\Phi^2) = \dim_{\mathbb{R}} V_1 - \dim_{\mathbb{R}} V_2 \in \mathbb{Z}$

Liczbę  $\sigma(\Phi^2)$  nazywamy *sygnaturą* formy kwadratowej  $\Phi^2$ .

**Przykład.**  $\Phi^2(x, y, z) = x^2 - xy + z^2 =$

$$x^2 - 2x \left( \frac{1}{2}y \right) + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + z^2 = \left( x - \frac{1}{2}y \right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + z^2.$$

Więc  $\sigma(\Phi^2) = 2 - 1 = 1$ .

## 9 Lokalny stopień topologiczny

Niech  $F = (f_1, \dots, f_n) : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$  będzie odwzorowaniem gładkim.

Zdefiniujmy:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_F &:= \mathcal{E}(n) / \langle f_1, \dots, f_n \rangle, \\ J &= \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}, \end{aligned}$$

$\mathcal{J}$  – warstwa Jacobianu  $J$  w  $\mathcal{R}_F$  .

Założmy, że  $\mathbf{0}$  jest punktem izolowanym zbioru  $F^{-1}(\mathbf{0})$ .

Niech  $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  będzie taką kulą domkniętą, że  $F^{-1}(\mathbf{0}) \cap B(r) = \{\mathbf{0}\}$ .

Jeżeli  $y \in \mathbb{R}^n$  jest wartością regularną leżącą bardzo blisko  $\mathbf{0}$ , to  $F^{-1}(y) \cap \partial B(r) = \emptyset$ , wartość Jacobianu  $J(p)$  jest różna od zera dla dowolnego  $p \in F^{-1}(y)$ , oraz suma

$$\sum_{p \in F^{-1}(y) \cap B(r)} \text{znak}(J(p))$$

nie zależy od wyboru wartości regularnej  $y$ .

**Definicja.** *Lokalnym stopniem topologicznym* w punkcie  $\mathbf{0}$  nazywamy liczbę całkowitą

$$\deg_0(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y) \cap B(r)} \text{znak}(J(p)),$$

gdzie  $y$  jest wartością regularną odwzorowania  $F$  leżącą bardzo blisko  $\mathbf{0}$ .

**Twierdzenie 9.1 (Eisenbud-Levine, Khimshiashvili)** .

(i)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_F < \infty \Rightarrow \mathbf{0}$  jest izolowany w  $F^{-1}(\mathbf{0})$ , oraz  $\mathcal{J} \neq 0$ ,

(ii) Niech  $\theta : \mathcal{R}_F \rightarrow \mathbb{R}$  będzie takim liniowym funkcjonatem, że  $\theta(\mathcal{J}) > 0$ . Zdefiniujmy dwuliniową formę symetryczną

$$\Theta : \mathcal{R}_F \times \mathcal{R}_F \rightarrow \mathbb{R} : \quad \Theta(a, b) = \theta(a \cdot b) ,$$

oraz stowarzyszoną z nią formę kwadratową

$$\Theta^2 : \mathcal{R}_F \rightarrow \mathbb{R} : \quad \Theta^2(a) = \Theta(a, a) = \theta(a^2) .$$

Forma  $\Theta^2$  jest niezdegenerowana, oraz

$$\deg_0(F) = \sigma(\Theta^2) .$$

**Przykład.**  $F(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$

$$I = \langle x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2 \rangle \subset \mathcal{E}(2) ,$$

$$x_2^3 = -x_2(x_1^2 - x_2^2) + \left(\frac{1}{2}x_1\right) \cdot 2x_1x_2 \in I ,$$

$$\mathcal{R}_F = \mathcal{E}(2)/I \simeq \mathcal{E}(2)/\langle x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_2^3 \rangle ,$$

$$x_1^2 \equiv x_2^2, \quad x_1x_2 \equiv 0, \quad x_2^3 \equiv 0 ,$$

$$\mathcal{R}_F = \{b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x_1 + b_3 \cdot x_2 + b_4 \cdot x_2^2\} ,$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix} = 4(x_1^2 + x_2^2) \equiv 8x_2^2 ,$$

$$\theta(b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x_1 + b_3 \cdot x_2 + b_4 \cdot x_2^2) = b_4 ,$$

$$\theta(\mathcal{J}) = 8 > 0 ,$$

$$\text{macierz formy } \Theta^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\sigma(\Theta) = 2 ,$$

$$\deg_0(F) = 2 .$$

**Przykład.** Program A.Łęckiego

4 4

$$x_1^5 - x_1x_2x_3x_4 + 2x_1^2x_3^2 :$$

$$x_2^4 + 3x_2x_3^2 - 4x_1^2x_3 :$$

$$x_3^4 - x_2^2x_4 + 5x_2x_3x_4 :$$

$$x_4^5 + 3x_1x_3^2 + 2x_2^2x_3 - x_4^7 :$$

Local complex degree = 186

Computations in real case

Rank of matrix = 186

Signature = 0

Czas: ok. 1.5 min. Więc  $\deg_0(F) = 0$ .

## 10 Punkty osobliwe hiperpowierzchni

Niech  $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  będzie wielomianem. Oznaczmy

$$S(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\},$$

$$L(r) = S(r) \cap f^{-1}(0),$$

$$A_-(r) = S(r) \cap \{f \leq 0\}, \quad A_+(r) = S(r) \cap \{f \geq 0\}.$$

Jeżeli  $r > 0$  jest dostatecznie małym promieniem, to topologia zbiorów  $L(r)$ ,  $A_+(r)$ ,  $A_-(r)$  jest dobrze zdefiniowana z dokładnością do homeomorfizmu.

**Twierdzenie 10.1 (Sullivan)** *Charakterystyka Eulera  $\chi(L(r))$  jest zawsze parzysta.*

**Ćwiczenie.** *Parasol Whitney'a jest powierzchnią opisaną równaniem  $f = x^2 - zy^2 = 0$ . Opisz zbiory  $L(r)$ ,  $A_+(r)$ ,  $A_-(r)$ , i znajdź ich charakterystykę Eulera.*

**Twierdzenie 10.2 (Khimshashvili)** *Jeżeli  $f$  ma izolowany punkt krytyczny w punkcie  $\mathbf{0}$ , tzn.  $\mathbf{0}$  jest punktem izolowanym w zbiorze  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = \mathbf{0}\}$ , to*

$$\chi(A_-(r)) = 1 - \deg_0(\nabla f),$$

$$\chi(A_+(r)) = 1 + (-1)^{n+1} \deg_0(\nabla f),$$

$$\chi(L(r)) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzyste,} \\ 2(1 - \deg_0(\nabla f)) & \text{jeżeli } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

**Przykład.** Niech  $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 - x_1x_2^2$ . Wtedy

$$\nabla f = (x_1^2 - x_2^2, -2x_1x_2) : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}),$$

$$\deg_0(\nabla f) = -2,$$

$$\chi(A_-(r)) = \chi(A_+(r)) = 3, \quad \chi(L(r)) = 6.$$

**Przykład.** Program A. Łęckiego

3 3

$$d(1; x_1^5 - x_2^6 + x_1x_2x_3 + 4x_2x_3^7 - 5x_1^2x_2^2x_3^2) :$$

$$d(2; x_1^5 - x_2^6 + x_1x_2x_3 + 4x_2x_3^7 - 5x_1^2x_2^2x_3^2) :$$

$$d(3; x_1^5 - x_2^6 + x_1x_2x_3 + 4x_2x_3^7 - 5x_1^2x_2^2x_3^2) :$$

Local complex degree = 40

Computations in real case

Rank of matrix = 40

Signature = 2

Czas: 1 sek. Więc dla  $f = x_1^5 - x_2^6 + x_1x_2x_3 + 4x_2x_3^7 - 5x_1^2x_2^2x_3^2$ :

$$\chi(A_-(r)) = -1, \quad \chi(A_+(r)) = 3, \quad \chi(L(r)) = 0.$$

**Uwaga.** Funkcja definiująca "parasol Whitney'a", tzn.  $f = x^2 - zy^2$ , nie spełnia założeń powyższego twierdzenia.

Jeżeli  $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  jest wielomianem jednorodnym, to topologia zbiorów  $S(r)$ ,  $L(r)$ ,  $A_+(r)$ ,  $A_-(r)$  nie zależy od wyboru promienia  $r$ . W szczególności te zbiory są homeomorficzne odpowiednio ze zbiorami:

$$S(1) = S^{n-1},$$

$$L(1) = S^{n-1} \cap f^{-1}(0),$$

$$A_-(1) = S^{n-1} \cap \{f \leq 0\}, \quad A_+(1) = S^{n-1} \cap \{f \geq 0\}.$$

**Twierdzenie 10.3 (Sz., Bruce)** Niech  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  będzie wielomianem jednorodnym stopnia  $d$ , niech  $k$  będzie dowolną nieparzystą liczbą naturalną  $> d - 1$ . Zdefiniujemy:

$$H_1 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1^k, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} - x_n^k \right) : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}),$$

$$H_2 = \left( -\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1^k, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n} - x_n^k \right) : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}).$$

Wtedy punkt  $\mathbf{0}$  jest izolowany w  $H_1^{-1}(\mathbf{0})$ ,  $H_2^{-1}(\mathbf{0})$ , oraz

$$\chi(A_-(1)) = 1 - \deg_0(H_1) ,$$

$$\chi(A_+(1)) = 1 - \deg_0(H_2) ,$$

$$\chi(L(1)) = 1 + (-1)^n - \deg_0(H_1) - \deg_0(H_2) .$$

**Przykład.** Program A.Łęckiego

3 3

d(1;x1\*x2\*x3)-x1^3:

d(2;x1\*x2\*x3)-x2^3:

d(3;x1\*x2\*x3)-x3^3:

Local complex degree = 11

Computations in real case

Rank of matrix = 11

Signature = 3

3 3

-d(1;x1\*x2\*x3)-x1^3:

-d(2;x1\*x2\*x3)-x2^3:

-d(3;x1\*x2\*x3)-x3^3:

Local complex degree = 11

Computations in real case

Rank of matrix = 11

Signature = 3

Więc dla  $f = x_1x_2x_3$ :

$$\chi(A_1(1)) = -2, \chi(A_+(1)) = -2, \chi(L(1)) = -6 .$$

## 11 Charakterystyka Eulera hiperpowierzchni

Niech  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  będzie wielomianem stopnia  $d \geq 2$ :

$$f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} =$$

$$\underbrace{\sum_{|\alpha|=0} a_\alpha x^\alpha}_{f_0} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha x^\alpha}_{f_1} + \cdots + \underbrace{\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha x^\alpha}_{f_d} .$$

Zdefiniujmy wielomiany od  $n$  oraz  $n + 1$  zmiennych:

$$g(x_1, \dots, x_n) = f_d ,$$

$$h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}^d f_0 + x_{n+1}^{d-1} f_1 + \cdots + x_{n+1} f_{d-1} + f_d .$$

**Przykład.** Niech  $f = 3 - x_1 + x_1 x_2 + x_1^3 - x_2^3$ . Wtedy

$$g = x_1^3 - x_2^3 ,$$

$$h = 3x_3^3 - x_3^2 x_1 + x_3 x_1 x_2 + x_1^3 - x_2^3 .$$

Wielomiany  $g, h$  są jednorodnie stopnia  $d$ . Niech  $k$  będzie naturalną nieparzystą liczbą  $> d - 1$ . Zdefiniujmy:

$$G_1 = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} - x_1^k, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} - x_n^k \right) : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) ,$$

$$G_2 = \left( -\frac{\partial g}{\partial x_1} - x_1^k, \dots, -\frac{\partial g}{\partial x_n} - x_n^k \right) : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) ,$$

$$H_1 = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} - x_1^k, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_{n+1}} - x_{n+1}^k \right) : (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{0}) ,$$

$$H_2 = \left( -\frac{\partial h}{\partial x_1} - x_1^k, \dots, -\frac{\partial h}{\partial x_{n+1}} - x_{n+1}^k \right) : (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{0}) .$$

**Twierdzenie 11.1 (Sz.)** *Odwzorowania  $G_1, G_2, H_1, H_2$  mają izolowane zero w  $\mathbf{0}$ .*

*Niech  $W$  będzie hiperpowierzchnią w  $\mathbb{R}^n$  złożoną z zer wielomianu  $f$ :*

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} .$$

*Wtedy charakterystyka Eulera  $\chi(W)$  jest równa*

$$\frac{1}{2} (\deg_0(G_1) + \deg_0(G_2) - \deg_0(H_1) - \deg_0(H_2)) + (-1)^{n+1} .$$

Na stronach

<http://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/bildergalerie/gallery.html>

<http://wims.unice.fr/gallery/>

<http://mathworld.wolfram.com/AlgebraicSurface.html>

można znaleźć liczne przykłady algebraicznych powierzchni w  $\mathbb{R}^3$ . Jedną z nich jest *powierzchnia Nordstranda*:

<http://mathworld.wolfram.com/NordstrandsWeirdSurface.html>.

Jej równanie ma postać

$$25 [x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y)] + 50(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 125(x^2yz + y^2xz + z^2xy) + 60xyz - 4(xy + xz + yz) = 0 .$$

Używając programu A. Łęckiego można obliczyć, że

$$\deg_0(G_1) = -1, \quad \deg_0(G_2) = +7 ,$$

$$\deg_0(H_1) = 19, \quad \deg_0(H_2) = -9 .$$

Więc charakterystyka Eulera powierzchni Nordstranda jest równa -1.

Inny przykład to *powierzchnia Clebscha*:

<http://mathworld.wolfram.com/ClebschDiagonalCubic.html>.

Jej równanie ma postać

$$81(x^3 + y^3 + z^3) - 189(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 54xyz + 126(xy + xz + yz) - 9(x^2 + y^2 + z^2) - 9(x + y + z) + 1 = 0 .$$

Używając programu A. Łęckiego można obliczyć, że

$$\deg_0(G_1) = 0, \quad \deg_0(G_2) = 0 ,$$

$$\deg_0(H_1) = 6, \quad \deg_0(H_2) = 6 .$$

Więc charakterystyka Eulera powierzchni Clebscha jest równa -5.

Niech  $W_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$ ,  $W_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0\}$ .

**Twierdzenie 11.2** *Jeżeli  $d$  jest liczbą parzystą, to*

$$\chi(W_-) = \frac{1}{2} (\deg_0(G_1) - \deg_0(H_1)) ,$$

$$\chi(W_+) = \frac{1}{2} (\deg_0(G_2) - \deg_0(H_2)) .$$

**Przykład.** Jeżeli  $f$  jest takie, jak w definicji powierzchni Nordstranda, to  $\chi(W_-) = -10$ ,  $\chi(W_+) = +8$ .

Jeżeli liczba  $d$  jest nieparzysta, to trzeba zdefiniować odwzorowania:

$$h' = x_{n+1} \cdot h ,$$

$$H'_1 = \left( \frac{\partial h'}{\partial x_1} - x_1^{d+2}, \dots, \frac{\partial h'}{\partial x_{n+1}} - x_{n+1}^{d+2} \right) : (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{0}) ,$$

$$H'_2 = \left( -\frac{\partial h'}{\partial x_1} - x_1^{d+2}, \dots, -\frac{\partial h'}{\partial x_{n+1}} - x_{n+1}^{d+2} \right) : (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{0}) .$$

**Twierdzenie 11.3** *Odwzorowania  $H'_1, H'_2$  mają izolowane zero w  $\mathbf{0}$ , oraz*

$$\chi(W_-) = \frac{1}{2} ((-1)^n - \deg_0(H'_1)) ,$$

$$\chi(W_+) = \frac{1}{2} ((-1)^n - \deg_0(H'_2)) .$$

**Przykład.** Jeżeli  $f$  jest takie, jak w definicji powierzchni Clebscha, to  $\chi(W_-) = \chi(W_+) = -3$ .

## 12 Lokalna liczba łuków krzywej

Niech  $H = (h_1, \dots, h_{n-1}) : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-1}, \mathbf{0})$  będzie odwzorowaniem wielomianowym. Oznaczmy

$$\Omega = \det \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} ,$$

$$F = (\Omega, h_1, \dots, h_{n-1}) : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) .$$

Z Twierdzenia 7.6, jeżeli  $\dim_R \mathcal{R}_F < \infty$ , to w pobliżu  $\mathbf{0}$  zbiór  $H^{-1}(\mathbf{0})$  jest skończoną sumą łuków mających jeden punkt wspólny w  $\mathbf{0}$ . Niech  $b$  będzie liczbą tych łuków.

**Twierdzenie 12.1 (Aoki, Fukuda, Nishimura, Sun)** *Jeżeli  $\dim_R \mathcal{R}_F < \infty$ , to*

$$b = 2 \cdot \deg_0(F) .$$

**Przykład.** Niech  $H = (h_1, h_2) : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ , gdzie:

$$h_1 = x_1^5 - x_1x_2x_3 + x_2^3 + 4x_3^4 ,$$

$$h_2 = x_1^3x_2 - x_2x_3^3 - x_1^4x_3 .$$

Używając programu A.Łęckiego można sprawdzić, że  $\dim_R \mathcal{R}_F < \infty$  oraz  $\deg_0(F) = +6$ . Więc w pobliżu  $\mathbf{0}$  zbiór  $H^{-1}(\mathbf{0})$  jest sumą dwunastu łuków mających jeden punkt wspólny w  $\mathbf{0}$ .