Podstawowe Własności
Pierścieni

Literatura Pomocnicza:

1. S.Balcerzyk,T.Józefiak, *Pierścienie przemienne*, PWN
2. A.Białynicki-Birula, *Algebra*, PWN
3. J.Browkin, *Teoria ciał*, PWN
4. D.Cox, J.Little, D.O'Shea, *Ideals, varieties and algorithms*, Springer-Verlag
5. S.Lang, *Algebra*, PWN

1 Pierścienie, algebry

Niech P będzie przemiennym pierścieniem z jedynką. Wtedy

- $1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P$ jest zbiorem jednoelementowym
- 0 jest jedynym elementem neutralnym dla dodawania
- 1 jest jedynym elementem neutralnym dla mnożenia
- $\forall \;\; x \in P, \;\; 0 \cdot x = 0$

Każde ciało K jest pierścieniem. Zbiór wielomianów $K[\mathbb{X}] = K[X_1, \ldots, X_n]$ jest pierścieniem.

Definicja. Odwzorowanie pierścieni $h : P \;\rightarrow\; S$ nazywamy *homomorfizmem* jeżeli $\forall \;\; x, y \in P$

$$h(x + y) = h(x) + h(y)$$

$$h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$$

$$h(1) = 1$$

- $h(0) = 0$
- $\ker h = \{x \in P \mid h(x) = 0\}$ – *jądro* h
- $\operatorname{Im} h = \{s \in S \mid \exists\, x \in P \;\; s = h(x)\}$ – *obraz* h
- Homomorfizm $h : P \;\to\; S$ jest *izomorfizmem*, jeżeli istnieje homomorfizm odwrotny $g : S \to P$, tzn. $g \circ h = \mathrm{id}_P$, $h \circ g = \mathrm{id}_S$
- Homomorfizm h jest izomorfizmem
  $\Leftrightarrow$ h jest wzajemnie jednoznaczny, tzn. różnowartościowy i "na"
  $\Leftrightarrow$ $\ker h = \{0\}$ oraz $\operatorname{Im} h = S$

Definicja. Jeżeli istnieje homomorfizm $\eta : R \to P$, to pierścień P nazywamy R–algebrą.

- Pierścień wielomianów $K[\mathbb{X}]$ jest K–algebrą
- Jeżeli P jest K–algebrą a K jest ciałem, to P jest w naturalny sposób przestrzenią wektorową nad K. Dla $r \in K$ oraz $p \in P$ definiujemy iloczyn $r \cdot p = \eta(r) \cdot p$.

  W szczególności $K[\mathbb{X}]$ jest K–przestrzenią wektorową.

Definicja. Element $p \in P$ nazywamy

- *odwracalnym*, jeżeli istnieje taki $s \in P$, że $ps = 1$
- *dzielnikiem zera*, jeżeli istnieje taki $s \in P$, $s \neq 0$, że $ps = 0$ (Jeżeli $p \neq 0$ to p jest *właściwym dzielnikiem zera.*)
- *nilpotentnym*, jeżeli istnieje taka liczba naturalna $n \geq 1$, że $p^n = 0$. (Przyjmujemy, że jeżeli $p \neq 0$ to $p^0 = 1$.)

Definicja. P^* – zbiór elementów odwracalnych w P.
(Zawsze $1 \in P^*$; $0 \notin P^*$ o ile $1 \neq 0$.)

Fakt 1.1 *Jeżeli $a^n = 0$ oraz p jest odwracalny, to $p + a$ też jest odwracalny.*

Definicja. Jeżeli P nie zawiera właściwych dzielników zera, to nazywamy go pierścieniem *bez dzielników zera* (lub *dziedziną całkowitości*).

Fakt 1.2 *Każdy element $p \in P \setminus \{0\}$ jest odwracalny*
$\Leftrightarrow$ *P jest ciałem.*

Ćwiczenia.

1. Element odwracalny nie jest dzielnikiem zera (o ile $1 \neq 0$).
2. Dzielnik zera nie jest odwracalny (o ile $1 \neq 0$).
3. Jeżeli P jest pierścieniem bez dzielników zera, to zbiór elementów odwracalnych w P jest zbiorem elementów odwracalnych w $P[X]$.
4. Jeżeli iloczyn $p \cdot q$ jest odwracalny, to p oraz q są odwracalne.
5. Jeżeli p jest nieodwracalny, to dla dowolnego q, element $p \cdot q$ jest nieodwracalny.
6. W pierścieniu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, element "3" jest odwracalny, element "2" jest właściwym dzielnikiem zera i elementem nilpotentnym.
7. Każdy właściwy element nilpotentny jest właściwym dzielnikiem zera.
8. Dowolny pierścień jest $\mathbb{Z}$–algebrą.
9. $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$.
10. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{1, 3\}$.

2 Ideały

Definicja. *Ideałem* pierścienia P nazywamy każdy podzbiór $I \subset P$ spełniający warunki:
(a) $r, s \in I \quad \Rightarrow \quad r + s \in I$
(b) $r \in I,\ p \in P \quad \Rightarrow \quad r \cdot p \in I$

- $\{0\},\ P$ są ideałami. Każdy ideał $I \neq P$ nazywamy *właściwym*
- Ideał I zawiera element odwracalny $\Leftrightarrow\ I = P$
- Wybierzmy $p_1, \ldots, p_k \in P$. Wtedy

$$I = \{p_1 a_1 + \cdots + p_k a_k \mid p_1, \ldots, p_k \in P\}$$

jest ideałem. Mówimy, że I jest *generowany* przez $a_1, \ldots, a_k$, i oznaczamy $I = (a_1, \ldots, a_k)$.
Jeżeli I ma jeden generator a, to mówimy że $I = (a)$ jest *ideałem głównym.*

- W ciele K istnieją tylko dwa ideały: $\{0\}$, K. Jeżeli $P \neq \{0\}$ posiada tylko dwa ideały $\{0\}$ oraz P, to P jest ciałem
- Jeżeli $h : P \to S$ jest homomorfizmem pierścieni, to $\ker h$ jest ideałem
- Jeżeli $V \subset K^n$ to

$$I(V) = \{f \in K[\mathbb{X}] \mid f_{|V} \equiv 0\}$$

jest ideałem w $K[\mathbb{X}]$.

- Jeżeli $I \subset K[\mathbb{X}]$ jest ideałem, to definiujemy

$$V(I) = \{p \in K^n \mid \forall\, f \in I \quad f(p) = 0\}$$

- Przekrój dowolnej rodziny ideałów jest ideałem. W szczególności, dla dowolnego zbioru $A \subset P$ istnieje najmniejszy ideał w P zawierający A, równy przekrojowi rodziny wszystkich ideałów zawierających A.
Nazywamy go ideałem *generowanym przez* A, i oznaczamy: (A)
Jeżeli $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, wtedy $(A) = (a_1, \ldots, a_k)$
- Ideał (A) składa się z tych elementów, które można przedstawić w postaci $p_1a_1 + \ldots + p_sa_s$, gdzie $s \geq 1$, $a_1, \ldots, a_s \in A$, $p_1, \ldots, p_s \in P$
- Niech I_1, I_2 będą ideałami. Wtedy

$$I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in I_1,\ a_2 \in I_2\}$$

jest najmniejszym ideałem zawierającym I_1 oraz I_2

- Pierścień P nazywamy *pierścieniem ideałów głównych*, gdy wszystkie ideały w P są główne. $\mathbb{Z}$ oraz pierścień wielomianów jednej zmiennej $K[X]$ są pierścieniami ideałów głównych.

Ćwiczenia.

1. $r, s \in I \quad \Rightarrow \quad r - s \in I$

2. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Wtedy $I = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(x_0) = 0\}$ jest ideałem właściwym generowanym przez $X - x_0$

3. Niech $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Wtedy
$$I = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(x_1) = \cdots = f(x_k) = 0\}$$
jest ideałem właściwym. Jakie są generatory I? Czy I jest główny?

4. Niech $p = (p_1, \ldots, p_n) \in K^n$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Używając wzoru Taylora pokaż, że $I(\{p\})$ jest generowany przez $X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n$

5. Jeżeli $I \subset P$ jest ideałem, P jest $K-$ algebrą, to I jest $K-$podprzestrzenią liniową w P

6. Ideał $I \subset K[\mathbb{X}]$ jest właściwy $\Leftrightarrow$ I nie zawiera żadnej stałej

7. $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h(m) = m$, jest homomorfizmem, ale $h((2))$ nie jest ideałem.

8. Jeżeli $I \subset J$ to $I + J = J$.

9. Czy $X^2 \in K[X, Y]$ należy do ideałów (X^3, X^4), (X^3, Y^4), $(X + 1, Y + 1)$, $(X^2 + Y, Y)$, $(X^3 + 1, X^2 + X + 1)$

10. $I \cdot J = \{a_1 b_1 + \cdots + a_s b_s \mid a_i \in I,\ b_i \in J\}$ jest ideałem.
Czy $I \cdot J = \{ab \mid a \in I,\ b \in J\}$?

11. $I \cdot J \subset I$ oraz $I \cdot J \subset J$.

12. Jeżeli $I_1, \ldots, I_n$ są ideałami, to zdefiniowany indukcyjnie zbiór $I_1 \cdots I_n = (I_1 \cdots I_{n-1}) \cdot I_n$ jest ideałem.

13. Którym z symboli "$\subset$", "$=$", "$\supset$"można zawsze zastąpić symbol "?"we wzorze
$$I_1 \cdots I_n \ ?\ I_1 \cap \ldots \cap I_n$$

3 Kongruencje, pierścień ilorazowy

Niech I będzie ideałem w pierścieniu P.

- Relacja $a \equiv b \Leftrightarrow a - b \in I$ jest relacją równoważności.
- $p \equiv 0 \Leftrightarrow p \in I$.

- Jeżeli $a_1 \equiv a_2$ oraz $b_1 \equiv b_2$, to wtedy $a_1 + b_1 \equiv a_1 + b_2$ oraz $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2$.

- Klasy abstrakcji relacji "$\equiv$" nazywamy *warstwami.* Warstwa stowarzyszna z elementem p jest zbiorem postaci $\{p + a \mid a \in I\}$. Oznaczac ją będziemy symbolem $p + I$ lub $[p]$.

- Zbiór klas abstrakcji, oznaczany symbolem P/I, jest pierścieniem z działaniami zdefiniowanymi w naturalny sposób na reprezentantach warstw:
$$[p] + [q] = [p + q]$$
$$[p] \cdot [q] = [p \cdot q]$$
Pierscień P/I jest nazywany *pierścieniem ilorazowym.*

- Odwzorowanie $\kappa : P \to P/I$ zdefiniowane jako $\kappa(p) = [p]$ jest surjektywnym homomorfizmem, $\ker \kappa = I$. Odwzorowanie κ jest nazywane *kanonicznym homomorfizmem.*

- Niech $h : P \to S$ będzie homomorfizmem. Załóżmy, że $I = \ker h$. Wtedy istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h^* : P/I \to S$, taki ze $h = h^* \circ \kappa$. Nazywamy go *homomorfizmem indukowanym.*

- Jeżeli P jest R algebrą, to P/I też jest R algebrą. A więc jeżeli $R = K$ jest ciałem, to wtedy P/I jest przestrzenią wektorową nad ciałem K, a homomorfizm kanoniczny $\kappa : P \to P/I$ jest odwzorowaniem K–liniowym.

- Niech $h : P \to S$ będzie surjektywnym homomorfizmem K–algebr (K–ciało), niech $I = \ker h$. Wtedy $h^* : P/\ker h \to S$ jest izomorfizmem, oraz
$$\dim_K S = \dim_K P/I.$$

- Jeżeli $J \subset I$ są ideałami, to istnieje surjektywny homomorfizm $h : P/J \to P/I$. Wtedy:
h jest izomorfizmem $\Leftrightarrow$ $J = I$ $\Leftrightarrow$ $\dim_K P/J = \dim_K P/I$.

Ćwiczenia.

1. Jeżeli $I = (m) \subset \mathbb{Z}$, to $\mathbb{Z}/I = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

2. Niech $I \subset K[X]$ (K – ciało). Wtedy istnieje wielomian h taki, że $I = (h)$.

   Weźmy $f, g \in K[X]$. Dzieląc te wielomiany z resztą przez h otrzymamy:

$$f = ph + r_1, \ \deg(r_1) < \deg(h),$$
$$g = qh + r_2, \ \deg(r_2) < \deg(h).$$

   Wtedy $f \equiv g \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2$.

3. $\mathbb{R}[X]/(X+7)$ jest izomomorficzny z $\mathbb{R}$.

4. $\mathbb{R}[X]/(X^2+5)$ jest izomorficzny z $\mathbb{C}$.

5. $\mathbb{R}[X]/(X^2-3)$ jest izomorficzny z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

6. Jeżeli $0 \neq h \in \mathbb{R}[X]$ jest wielomianem posiadającym tylko jednokrotne pierwiastki, to $\mathbb{R}[X]/(h)$ jest izomorficzny (jako $\mathbb{R}$–agebra!) z

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{r} \times \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{s},$$

   gdzie r jest liczbą pierwiastków rzeczywistych, s jest połową liczby pierwiastków nie leżących na osi rzeczywistej. Czy można podobnie opisać $\mathbb{R}[X]/(h)$ jeżeli dopuścimy istnienie pierwiastków wielokrotnych?

4 Chińskie twierdzenie o resztach

Jeżeli $P_1, \ldots, P_n$ są pierścieniami, to ich iloczyn kartezjański $P_1 \times \cdots \times P_n$, z naturalnie zdefiniowamymi działaniami, jest też pierścieniem.

Uwaga. Jeżeli $P_1, \ldots, P_n$ są ciałami, to $P_1 \times \cdots \times P_n$ nie musi być ciałem.

Będziemy od teraz zakładać, że wszystkie pierścienie są K-algebrami dla ustalonego ciała K.

Skoro teraz każdy P_i jest K–algebrą, to $P_1 \times \cdots \times P_n$ jest też K–algebrą.

Niech $I_1, \ldots, I_n$ będą ideałami w pierścieniu P. Dla $1 \leq k \leq n$ oraz $p \in P$, $[p]_k$ oznaczać będzie warstwę elementu p w P/I_k.

Ćwiczenie.

1. Odwzorowanie $h : P \to P/I_1 \times \cdots \times P/I_n$:

$$h(p) = ([p]_1, \ldots, [p]_n)$$

jest homomorfizmem K–algebr.

Twierdzenie 4.1 (Chińskie twierdzenie o resztach) *Załóżmy, że* $\forall\ k \neq \ell$, $I_k + I_\ell = P$. *Wtedy*

(i) $I_1 \cap \ldots \cap I_n = I_1 \cdots I_n$.

(ii) Istnieje kanoniczny izomorfizm K–algebr

$$P/I_1 \cap \ldots \cap I_n \simeq P/I_1 \times \cdots \times P/I_n$$

zdefiniowany wzorem $p + I_1 \cap \ldots \cap I_n \mapsto ([p]_1, \ldots, [p]_n)$.

Przykład. Jeżeli $m_1, \ldots, m_n$ są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi, to

$$\mathbb{Z}/m_1 \cdots m_n \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}.$$

Wniosek 4.2 *Załóżmy, że* $\forall\ k \neq \ell$, $I_k + I_\ell = P$. *Wtedy*

$$\dim_K P/I_1 \cap \ldots \cap I_k < \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\ 1 \leq k \leq n \quad \dim_K P/I_k < \infty.$$

Wniosek 4.3 *Jeżeli* $\forall\ k \neq \ell$, $I_k + I_\ell = P$ *oraz* $I_1 \cap \ldots \cap I_n = I_1 \cdots I_n = \{0\}$ *to*

$$P \simeq P/I_1 \times \cdots \times P/I_n.$$

5 Ideały pierwsze i maksymalne

Definicja. Ideał $I \subset P$ nazywamy *pierwszym*, gdy dla dowolnych elementów $a, b \in P$:

$$ab \in I \;\Rightarrow\; a \in I \text{ lub } b \in I.$$

- Jeżeli I jest pierwszy, $a_1 \cdots a_n \in I$ to $\exists\, 1 \leq i \leq n \quad a_i \in I$.
- Jeżeli $P \;\to\; S$ jest homomorfizmem oraz S jest pierścieniem bez dzielników zera, to $\ker h$ jest ideałem pierwszym.
- $\{0\} \subset P$ jest ideałem pierwszym wtedy i tylko wtedy, gdy P jest pierścieniem bez dzielników zera.
- Ideał I jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy P/I jest pierścieniem bez dzieników zera.
- Jeżeli $h : P \;\to\; S$ jest homomorfizmem oraz $J \subset S$ ideałem pierwszym, to $h^{-1}(J) \subset P$ jest ideałem pierwszym.

Definicja. Ideał właściwy $I \subset P$ nazywamy *maksymalnym*, gdy dla każdego ideału $J \subset P$:

$$I \subset J \;\Rightarrow\; J = I \text{ lub } J = P.$$

- I jest ideałem maksymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy P/I jest ciałem.
- Ideał maksymalny jest pierwszy.
- Każdy ideał zawiera się w pewnym ideale maksymalnym.

Ćwiczenia

1. Załóżmy, że $h : P \;\to\; S$ jest surjektywnym homomorfizmem oraz $I \subset P$ jest ideałem pierwszym. Czy $h(I) \subset S$ jest zawsze pierwszy?
2. $(n) \subset \mathbb{Z}$ jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.
3. Niech $f \in \mathbb{Z}[X]$ będzie wielomianem stopnia 2 . Ideał (f) jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy f nie ma pierwiastków rzeczywistych.

4. Niech $h : P \to S$ będzie surjektywnym homomorfizmem oraz niech $I \subset P$ będzie ideałem maksymalnym. Czy $h(I) \subset S$ jest zawsze ideałem maksymalnym?

5. Niech P będzie pierścieniem ideałów głównych bez dzielników zera. Niezerowy ideał właściwy I jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy I jest maksymalny.

6 Pierścienie noetherowskie

Definicja Pierścień nazywamy *noetherowskim*, gdy każdy ideał tego pierścienia jest skończenie generowany.

- Każdy pierścień ideałów głównych jest noetherowski.
- Każde ciało jest pierścieniem noetherowskim

Twierdzenie 6.1 *Poniższe warunki są równoważne:*

(i) *P jest noetherowski,*

(ii) *Każdy wstępujący ciąg ideałów $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ stabilizuje się, tzn. dla pewnego n: $I_n = I_{n+1} = \cdots$.*

(iii) *Każda niepusta rodzina ideałów posiada element maksymalny ze względu na relacje zawierania.*

Twierdzenie 6.2 (Twierdzenie Hilberta o bazie) *Jeżeli P jest noetherowski, to pierścień wielomianów $P[X]$ jest też noetherowski.*

Więc pierścień wielomianów n–zmiennych $K[\mathbb{X}] = K[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$ o współczynnikach w ciele K jest noetherowski.

Ćwiczenia.

1. $\mathbb{Z}[X]$ nie jest pierścieniem ideałów głównych.

2. Niech I będzie ideałem w pierścieniu noetherowskim P. Wtedy pierścień P/I jest noetherowski.

3. Niech I, J będa takimi ideałami w pierścieniem noetherowskim P, że:
$$\forall\ f \in I\ \ \exists\ k > 0\quad f^k \in J,$$
$$\forall\ g \in J\ \ \exists\ \ell > 0\ \ g^\ell \in I.$$
Wtedy istnieją stałe $r, s > 0$ takie, że $I^r = \underbrace{I \cdots I}_{r} \subset J, \quad J^s \subset I.$

4. Niech f_α będzie dowolną rodziną wielomianów w $K[\mathbb{X}]$. Oznaczmy

$$V = \bigcap_\alpha f_\alpha^{-1}(0).$$

Każdy zbiór tej postaci nazywamy *zbiorem algebraicznym.* Pokaż, że istnieje skończony podzbiór indeksów $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ taki, że

$$V = \bigcap_{i=1}^{m} f_{\alpha_i}^{-1}(0),$$

a więc każdy zbiór algebraiczny może być opisany za pomocą skończonej ilości równań.

7 Twierdzenie Hiberta o zerach

Twierdzenie 7.1 *Załóżmy, że* $\mathbf{m} \subset \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ *jest ideałem maksymalnym.*

Wtedy istnieje jednoznacznie wyznaczony punkt $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ *taki, że*

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_p = \{f \in \mathbb{C}[\mathbb{X}] \mid f(p) = 0\} = (X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n).$$

Wniosek 7.2 *Jeżeli* $\mathbf{m} \subset \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ *jest ideałem maksymalnym, to*

$$\mathbb{C}[\mathbb{X}]/\mathbf{m} \simeq \mathbb{C}.$$

Przykład. Ideał $(X^2 + 1) \subset \mathbb{R}[X]$ jest maksymalny, ale

$$\mathbb{R}[\mathbb{X}]/(X^2 + 1) \not\simeq \mathbb{R}.$$

Definicja. Jeżeli I jest ideałem, to

$$\mathrm{rad}(I) = \{p \in P \mid \exists\, n > 0 \quad p^n \in I\}$$

jest ideałem. Nazywamy go *radykałem ideału* I.

Twierdzenie 7.3 (Tw. Hilberta o zerach I) *Niech* $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$. *Wtedy układ równań* $f_1 = \cdots = f_r = 0$ *ma rozwiazanie w* $\mathbb{C}^n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy ideał* $(f_1, \ldots, f_r) \subset \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ *jest właściwy, tzn. nie zawiera żadnego elementu odwracalnego, czyli niezerowej stałej.*

Twierdzenie 7.4 (Tw. Hilberta o zerach II) *Niech $I \subset \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ będzie ideałem, niech $V = V(I)$. Załóżmy, że $g \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ jest takim wielomianem, że $g_{|V} \equiv 0$.*

Wtedy istnieje $m > 0$ takie, że $g^m \in I$ (czyli $g \in \mathrm{rad}(I)$).

Ćwiczenia. Dla $K = \mathbb{C}$:

1. $V(f_1, \ldots, f_r) = V(g_1, \ldots, g_s) \Leftrightarrow \mathrm{rad}(f_1, \ldots, f_r) = \mathrm{rad}(g_1, \ldots, g_s)$, czyli
   $V(I) = V(J) \Leftrightarrow \mathrm{rad}(I) = \mathrm{rad}(J)$.
2. $I \subset J \quad \Rightarrow \quad V(I) \supset V(J)$.
3. $V(I) \supset V(J) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rad}(I) \subset \mathrm{rad}(J)$.
4. $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.
5. $V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$.
6. $V(I^k) = V(I)$.
7. $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$.
8. Jeżeli $V(I) = V(J)$, to istnieją $k, \ell > 0$ takie, że
   $$I^k \subset J \text{ oraz } J^\ell \subset I.$$
9. W których z powyższych zadań można zastąpić ciało $\mathbb{C}$ przez $\mathbb{R}$?

8 Rozszerzenia całkowite

Niech B będzie pierścieniem bez dzielników zera.
Definicja. Podzbiór $A \subset B$ nazywamy *podpierścieniem*, jeżeli A z działaniami indukowanymi z B jest pierścieniem.

Załóżmy, że $A \subset B$ jest podpierścieniem.
Definicja. Mówimy, że element $b \in B$ jest *całkowity względem A*, jeżeli istnieje taki wielomian unormowany $f \in A[X]$, że $f(b) = 0$, tzn.:

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

dla pewnych $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$.

B nazywamy *rozszerzeniem całkowitym pierścienia* A, jeżeli każdy element $b \in B$ jest całkowity względem A.

Podzbiór $M \subset B$ nazywamy *skończenie generowanym A–modułem*, jeżeli istnieją $b_1, \ldots, b_s \in B$, takie że

$$M = \{a_1 b_1 + \cdots + a_s b_s \mid a_i \in A\} = A\, b_1 + \cdots + A\, b_s.$$

Ćwiczenia.

1. Jeżeli M jest skończenie generowanym A–modułem, to
   $m_1, m_2 \in M \quad \Rightarrow \quad m_1 + m_2 \in M,$
   $a \in A, m \in M \quad \Rightarrow \quad a \cdot m \in M.$

2. Jeżeli $b_1, \ldots, b_s \in B$ to

   $$A[b_1, \ldots, b_s] = \{f(b_1, \ldots, b_s) \mid f \in A[X_1, \ldots, X_s]\}$$

   jest podpierścieniem w B. Wyjaśnij, jaka jest różnica pomiędzy $A[b_1, \ldots, b_s]$ oraz $A\, b_1 + \cdots + A\, b_s$.

3. Niech $k \subset L$ będą ciałami. Wtedy $b \in L$ jest całkowity względem k wtedy i tylko wtedy, gdy b jest algebraiczny względem k.

Lemat 8.1 *Jeżeli $b \in B$ jest całkowity względem A, to $A[b] = \{h(b) \mid h \in A[X]\}$ jest skończenie generowanym A–modułem.*

Twierdzenie 8.2 *Poniższe warunki są równoważne:*

(i) B jest rozszerzeniem całkowitym A,

(ii) jeżeli $b_1, \ldots, b_s \in B$, to $A[b_1, \ldots, b_s]$ jest skończenie generowanym A–modułem,

(iii) każdy skończony podzbiór zbioru B jest zawarty w pewnym podpierścieniu $C \subset B$, który jest skończenie generowanym A–modułem.

Wniosek 8.3 *Jeżeli B jest skończenie generowanym A–modułem, to B jest rozszerzeniem całkowitym A.*

Wniosek 8.4 *Zbiór wszystkich elementów w B cakowitych względem A jest podpierścieniem w B.*

Twierdzenie 8.5 *Jezeli $A \subset B \subset C$ są pierścieniami bez dzielników zera, B jest rozszerzeniem całkowitym A oraz C jest rozszerzeiem całkowitym B, to C jest rozszerzeniem całkowitym A.*

Niech k będzie ciałem, zaś $k[\mathbb{X}]$ pierścieniem wielomianów. Niech

$$k(\mathbb{X}) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in k[\mathbb{X}],\ g \neq 0 \right\}$$

będzie ciałem funkcji wymiernych. Oczywiście istnieje naturalne zanurzenie $k[\mathbb{X}] \subset k(\mathbb{X})$.

Twierdzenie 8.6 *Jeżeli $h \in k(\mathbb{X})$ jest całkowity względem $k[\mathbb{X}]$, to $h \in k[\mathbb{X}]$.*

Wniosek 8.7 *Załóżmy, że ciało k jest podciałem ciała L.Załóżmy, że element $b \in L$ jest przestępny względem ciała k, tzn. b nie jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach z k. Wtedy*

$$k[X] \simeq k[b], \quad k(X) \simeq k(b).$$

Jeżeli $f \in k(b)$ jest całkowity względem $k[b]$, to $f \in k[b]$. (Oczywiście $k[b] \subset k(b)$.)

9 Pierścienie lokalne

Definicja. Pierścień A nazywamy *lokalnym*, gdy zawiera dokładnie jeden ideał maksymalny $\mathbf{m}$. Np. każde ciało jest pierścieniem lokalnym, $\mathbf{m} = \{0\}$.

Fakt 9.1 *Jeżeli I jest ideałem właściwym w pierścieniu lokalnym A, to A/I jest pierścieniem lokalnym.*

Twierdzenie 9.2 *Poniższe warunki są równoważne:*

(i) A jest pierścieniem lokalnym,

(ii) zbiór elementów nieodwracalnych w A jest ideałem (właściwym)

Twierdzenie 9.3 (Lemat Nakayamy I) *Niech I, J będą ideałami w pierścieniu lokalnym $(A, \mathbf{m})$.*

Załóżmy, że I jest skończenie generowany oraz $I \subset J + \mathbf{m} \cdot I$. Wtedy $I \subset J$.

Wniosek 9.4 (Lemat Nakayamy II) *Jeżeli I jest takim skończenie generowanym ideałem w pierściniu lokalnym $(A, \mathbf{m})$, że $I = \mathbf{m} \cdot I$, to wtedy $I = \{0\}$.*

Wniosek 9.5 *Jeżeli A jest lokalnym pierścieniem noetherowskim, to dla dowolnych ideałów $I, J \subset A$:*

(i) $I \subset J + \mathbf{m} \cdot I \quad \Rightarrow \quad I \subset J,$

(ii) $I = \mathbf{m} \cdot I \quad \Rightarrow \quad I = \{0\}.$

Twierdzenie 9.6 *Załóżmy, że $(A, \mathbf{m})$ jest pierścieniem lokalnym i K–algebrą, gdzie $K \simeq A/\mathbf{m}$. Załóżmy też, że ideał maksymalny $\mathbf{m}$ jest skończenie generowany oraz I jest ideałem w A.*

Wtedy poniższe warunki są równoważne:

(1) $\dim_K A/I < \infty$

(2) $\exists\, \ell \quad \mathbf{m}^\ell \subset I$

(3) $\exists\, \ell \quad \mathbf{m}^\ell + I = \mathbf{m}^{\ell+1} + I$

Symbolem $\mathbb{N}$ oznaczmy zbiór złożony z zera i liczb naturalnych, tzn. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definicja. Każdy napis

$$\sum_\alpha a_\alpha \mathbb{X}^\alpha = \sum_\alpha a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n},$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ oraz $a_\alpha \in K$, nazywamy *formalnym szeregiem potęgowym.*

Zbiór szeregów potęgowych oznaczamy symbolem

$$K[[\mathbb{X}]] = K[[X_1, \ldots, X_n]].$$

$K[[\mathbb{X}]]$ z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia jest K-algebrą.

Twierdzenie 9.7 *$K[[\mathbb{X}]]$ jest pierścieniem noetherowskim i lokalnym. Ideał maksymalny $\mathbf{m}$ składa się z tych szeregów, których wyraz wolny jest równy zero.*

Ćwiczenie. Dla dowolnego ideału $I \subset K[\mathbb{X}]$ i punktu $p \in V(I)$; niech

$$\mathbf{m}_p = \{f \in K[\mathbb{X}] \mid f(p) = 0\} = (X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n) \subset K[\mathbb{X}]$$

będzie ideałem maksymalnym stowarzyszonym z punktem p. Wtedy dla każdej liczby naturalnej k;

1. pierścień ilorazowy $K[\mathbb{X}]/(I+\mathbf{m}_p^k)$ jest pierścieniem noetherowskim i lokalnym, gdzie jedynym ideałem maksymalnym jest
$$[\mathbf{m}_p] = (I + \mathbf{m}_p)/(I + \mathbf{m}_p^k),$$
2. $f = f(\mathbb{X})$ jest odwracalny w $K[\mathbb{X}]/(I + \mathbf{m}_p^k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyraz wolny $f(p) \neq 0$,
3. znajdź $(2 + X_1^2 - X_2)^{-1}$ w $K[\mathbb{X}]/m_0^6$,
4. znajdź $(2 + X_1^2 - X_2)^{-1}$ w $K[[\mathbb{X}]]$.

10 Algebry skończenie wymiarowe

Niech $I \subset K[\mathbb{X}]$ będzie ideałem. Niech

$$V(I) = V(I)_K = \{p \in K^n \mid \forall\ f \in I,\ f(p) = 0\},$$

oznacza zbiór zer ideału I. Niech

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_K = K[\mathbb{X}]/I$$

oznacza K-algebrę stowarzyszoną z ideałem I. (Symbolu $V(I)_K$ lub $\mathcal{A}_K$ używa się aby podkreślić jakie ciało K rozpatrujemy.)

Twierdzenie 10.1 *(i)* $\dim_K \mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(I) = \emptyset$,

(ii) $\dim_K \mathcal{A} < \infty \quad \Rightarrow \quad V(I)$ *jest zbiorem skończonym,*

(iii) $K = \mathbb{C}$ *oraz* $V(I)_C = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \dim_C \mathcal{A}_C = 0$,

(iv) $V(I)_C$ *– skończony* $\quad \Rightarrow \quad \dim_C \mathcal{A}_C < \infty$.

Definicja. Algebra $\mathcal{A}$ jest *skończenie wymiarowa*, jeżeli

$$\dim_K \mathcal{A} < \infty.$$

Ćwiczenia.

1. Załóżmy, że $X^3 - XY$ oraz $Y^2 + X - Y$ należą do ideału $I \subset K[X,Y]$. Pokaż, że $\dim_K \mathcal{A} \leq 6$.

2. Niech $f_i \in K[\mathbb{X}] = K[X_1, \ldots, X_n]$ będą takimi wielomianami, że
$$f_i = X_i^{k(i)} + p_i \quad (1 \leq i \leq n)$$
gdzie wielomian p_i ma stopień $< k(i)$. Niech
$$f_1, \ldots, f_n \in I \subset K[\mathbb{X}], \quad \mathcal{A} = K[\mathbb{X}]/I \ .$$
Pokaż, że $\dim_K \mathcal{A} < \infty$.

3. Niech $I = (X^2+Y, XY-1) \subset K[X,Y]$. Pokaż,że $\dim_K K[X,Y]/I < \infty$.

Ćwiczenia

1. Jeżeli $f = \sum c_\alpha \mathbb{X}^\alpha \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$, to $\bar{f} = \sum \overline{c_\alpha} \mathbb{X}^\alpha \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ oraz $\tilde{f} = \frac{1}{2} \sum (c_\alpha + \overline{c_\alpha}) \mathbb{X}^\alpha \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$.

2. Jeżeli $f \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ to: $\quad f \in \mathbb{R}[\mathbb{X}] \quad \Leftrightarrow \quad f = \bar{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = \tilde{f}$.

Fakt 10.2 *Niech $g, f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$. Oznaczmy:*
I_R – ideał generowany przez $f_1, \ldots, f_r$ w $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$
I_C – ideał generowany przez $f_1, \ldots, f_r$ w $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$
Wtedy

(i) $g \in I_R \quad \Leftrightarrow \quad g \in I_C$,
więc $I_R = I_C \cap \mathbb{R}[\mathbb{X}]$.

(ii) $I_R = \mathbb{R}[\mathbb{X}] \quad \Leftrightarrow \quad I_C = \mathbb{C}[\mathbb{X}]$.

Fakt 10.3 *Niech I_R (odp. I_C) będzie ideałem w $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$ (odp. w $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$) generowanym przez $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[\mathbb{X}]$. Wtedy*
$$\dim_R \mathbb{R}[\mathbb{X}]/I_R = \dim_C \mathbb{C}[\mathbb{X}]/I_C,$$
oraz
$$\dim_R \mathbb{C}[\mathbb{X}]/I_C = 2 \dim_C \mathbb{C}[\mathbb{X}]/I_C = 2 \dim_R \mathbb{R}[\mathbb{X}]/I_R.$$

Twierdzenie 10.4 *Niech* $f_1, \ldots, f_r \in K[\mathbb{X}]$. *Jeżeli*

$$0 < \dim_K K[\mathbb{X}]/(f_1, \ldots, f_r) < \infty$$

to $r \geq n$.

Ćwiczenie. Udowodnij powyższe Twierdzenie, gdy $n = 2$.

Definicja. Wielomian $h \in K[\mathbb{X}]$ jest *jednorodny stopnia* k jeżeli wszystkie jego jednomiany są stopnia k, tzn.

$$h = \sum_{\alpha} a_\alpha \mathbb{X}^\alpha, \qquad |\alpha| = k.$$

(Przyjmujemy że wielomian zerowy ma dowolny stopień!)

- Każdy wielomian f stopnia p daje się jednoznacznie przedstawić jako suma
$$f = (f)_0 + (f)_1 + \cdots + (f)_p,$$
gdzie $(f)_k$ jest sumą jednomianów z f stopnia k, oraz $(f)_p \neq 0$.
- Jeżeli h jest jednorodny stopnia $k \geq 1$, to $\mathbf{0} \in h^{-1}(0)$.
- Wielomiany jednorodne stopnia 0 są stałymi.

Ćwiczenia.

1. Niech $h_1, \ldots, h_s$ będą wielomianami jednorodnymi. Jeżeli
$$x_0 \in h_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap h_s^{-1}(0), \quad x_0 \neq \mathbf{0}$$
to prosta $K \cdot x_0$ jest zawarta w $h_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap h_s^{-1}(0)$. Więc $h_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap h_s^{-1}(0)$ jest
– zbiorem pustym jeżeli jeden z $h_i \neq 0$ jest stopnia 0,
– $= \{\mathbf{0}\}$, albo
– jest zbiorem nieskończonym. (Jeżeli $n = 2$ to w trzecim wypadku jest to skończona suma prostych przechodzących przez początek układu $\mathbf{0}$.)

2. Jednorodny wielomian $h \in \mathbb{C}[X, Y]$ daje się jednoznacznie (z dokładnością do niezerowej stałej) rozłożyć na iloczyn składników liniowych postaci $aX + bY$.

Twierdzenie 10.5 (Bézout I) *Jeżeli* $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{C}[\mathbb{X}] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ *są jednorodne stopni* $k_1, \ldots, k_n$ *to poniższe warunki są równoważne:*

(i) $h_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap h_n^{-1}(0)$ *jest skończony (tzn.* $= \{\mathbf{0}\}$*),*

(ii) $\dim_C \mathbb{C}[\mathbb{X}]/(h_1, \ldots, h_n) < \infty$,

(iii) $\dim_C \mathbb{C}[\mathbb{X}]/(h_1, \ldots, h_n) = k_1 \cdots k_n$.

Twierdzenie 10.6 (Bézout II) *Niech* $g_1, \ldots, g_n \in K[\mathbb{X}] = K[X_1, \ldots, X_n]$ *będą stopnia* $k_1, \ldots, k_n$ *(*$K = \mathbb{C}$ *lub* $K = \mathbb{R}$*). Niech* $h_1 = (g_1)_{k_1}, \ldots, h_n = (g_n)_{k_n}$.

Jeżeli $\{z \in \mathbb{C}^n \mid h_1(z) = \cdots = h_n(z) = 0\}$ *jest skończony (tzn.* $= \{\mathbf{0}\}$*), to*

$$\dim_K K[\mathbb{X}]/(g_1, \ldots, g_n) = k_1 \cdots k_n.$$

Twierdzenie 10.7 (Bézout I, wersja lokalna) *Jeżeli* $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{C}[\mathbb{X}] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ *są jednorodne stopni* $k_1, \ldots, k_n$ *to poniższe warunki są równoważne:*

(i) $h_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap h_n^{-1}(0)$ *jest skończony (tzn.* $= \{\mathbf{0}\}$*),*

(ii) $\dim_C \mathbb{C}[[\mathbb{X}]]/(h_1, \ldots, h_n) < \infty$,

(iii) $\dim_C \mathbb{C}[[\mathbb{X}]]/(h_1, \ldots, h_n) = k_1 \cdots k_n$.

Twierdzenie 10.8 (Bézout II, wersja lokalna) *Niech* $g_1, \ldots, g_n \in K[\mathbb{X}] = K[X_1, \ldots, X_n]$ *będą niezerowymi wielomianami. Wtedy istnieją niezerowe jednorodne wielomiany* h_i *stopnia* ℓ_i *takie, że*
$g_i = h_i +$ *jednomiany stopnia* $> \ell_i$.

Jeżeli $\{z \in \mathbb{C}^n \mid h_1(z) = \cdots = h_n(z) = 0\}$ *jest skończony (tzn.* $= \{\mathbf{0}\}$*), to*

$$\dim_K K[[\mathbb{X}]]/(g_1, \ldots, g_n) = \ell_1 \cdots \ell_n.$$

11 Bazy Gröbnera dla dwóch zmiennych

W zbiorze $\mathbb{N}^2$ można wprowadzić tzw. *porządek leksykograficzny z gradacją*:

Definicja. Jeżeli $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ należą do $\mathbb{N}^2$ to $\alpha > \beta$ jeśli $|\alpha| > |\beta|$, lub $|\alpha| = |\beta|$ i $\alpha_1 > \beta_1$.

Dla niezerowego wielomianu $f = \sum_\alpha a_\alpha \mathbb{X}^\alpha \in K[X, Y]$ oznaczmy

- $\mathrm{multideg}(f) = \max(\alpha \mid a_\alpha \neq 0)$,
- $\mathrm{LC}(f) = a_{\mathrm{multideg}(f)}$,
- $\mathrm{LM}(f) = \mathbb{X}^{\mathrm{multideg}(f)}$,
- $\mathrm{LT}(f) = a_{\mathrm{multideg}(f)} \mathbb{X}^{\mathrm{multideg}(f)}$.

Fakt 11.1
- $\mathrm{multideg}(f \cdot g) = \mathrm{multideg}(f) + \mathrm{multideg}(g)$,
- $\mathrm{LC}(f \cdot g) = \mathrm{LC}(f) \cdot \mathrm{LC}(g)$,
- $\mathrm{LM}(f \cdot g) = \mathrm{LM}(f) \cdot \mathrm{LM}(g)$,
- $\mathrm{LT}(f \cdot g) = \mathrm{LT}(f) \cdot \mathrm{LT}(g)$.

Definicja. Niech $I \subset K[\mathbb{X}]$ będzie niezerowym ideałem. Oznaczmy:

- $\mathrm{LT}(I) = \{\mathrm{LT}(f) \mid f \in I \setminus \{0\}\}$,
- $< \mathrm{LT}(I) >$ – ideał generowany przez $\mathrm{LT}(I)$.

Fakt 11.2 *Jeżeli jednomian $\mathbb{X}^\alpha \in < \mathrm{LT}(I) >$, to dla każdego $\beta \in \mathbb{N}^2$ jednomian $\mathbb{X}^\alpha \cdot \mathbb{X}^\beta = \mathbb{X}^{\alpha+\beta} \in < \mathrm{LT}(I) >$.*

Twierdzenie 11.3 *(i) Istnieją $g_1, \ldots, g_s \in I$ takie, że ideał $< \mathrm{LT}(I) >$ jest generowany przez $\mathrm{LM}(g_1), \ldots, \mathrm{LM}(g_s)$,*

(ii) $g_1, \ldots, g_s$ generują ideał I,

(iii) dla dowolnego $f \in K[\mathbb{X}]$ istnieje dokładnie jeden wielomian $g = g(f)$ oraz dokładnie jeden wielomian $r = r(f)$ takie, że

$$f = r(f) + g(f) = r + f,$$

$g \in I$ oraz żaden jednomian wielomianu r nie dzieli się przez żaden z jednomianów $\mathrm{LM}(g_1), \ldots, \mathrm{LM}(g_s)$.

Definicja. Wielomiany $g_1, \ldots, g_s$ nazywamy *bazą Gröbnera* ideału I. Wielomian $r(f)$ nazywamy *postacią normalną* wielomianu f. **(Uwaga: nie każdy zbiór generatorów ideału jest jego bazą Gröbnera!)**

Wniosek 11.4

- *Każdy element pierścienia ilorazowego $K[\mathbb{X}]/I$ daje się jednoznacznie przedstawić jako skończona K–liniowa kombinacja jednomianów które nie dzielą się przez żaden z jednomianów $\mathrm{LM}(g_1), \ldots, \mathrm{LM}(g_s)$,*
- *wymiar $\dim_K K[\mathbb{X}]/I$ jest równy ilości jednomianównie które nie dzielą się przez żaden z jednomianów $\mathrm{LM}(g_1), \ldots, \mathrm{LM}(g_s)$.*

Ćwiczenie. Niech $f_1, f_2 \in K[\mathbb{X}] = K[X, Y]$ będą takimi wielomianami, że

$$f_1 = X^{k(1)} + p_1, \quad f_2 = Y^{k(2)} + p_2,$$

gdzie wielomian p_i ma stopień $< k(i)$. Niech

$$I = (f_1, f_2) \subset K[\mathbb{X}].$$

Pokaż, że f_1, f_2 są bazą Gröbnera ideału I. (Można skorzystać z Twierdzenia Bézout.)

12 Dziedziny z jednoznacznością rozkładu

Niech P będzie dziedziną całkowitości.

Element $a \neq 0$ nazywamy *nierozkładalnym*, jeżeli nie jest odwracalny, i jeżeli $a = bc$, to b lub c jest odwracalny.

Zbiór wszystkich elementów P jest sumą parami rozłącznych zbiorów: $\{0\}$, zbiór elementów odwracalnych, zbiór elementow nierozkładalnych, zbiór elementow rozkładalnych.

Element nieodwracalny jest *pierwszy*, jeżeli:

$$a|bc \quad \Rightarrow \quad a|b \text{ lub } a|c \quad .$$

Fakt 12.1 *Elementy pierwsze są nieodwracalne.*

Dziedzinę całkowitości P nazywamy *dziedziną z jednoznacznością rozkładu*, jeżeli

(a) każdy element rozkładalny jest iloczynem pewnej liczby elementow nierozkładalnych,

(b) przedstawienie w postaci iloczynu jest jednoznaczne z dokładnością do porządku i stowarzyszenia.

Twierdzenie 12.2 *P jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) każdy element rozkładalny jest iloczynem elementów nierozkładalnych,

(ii) każdy element nierozkładalny jest pierwszy.

Twierdzenie 12.3 *Jeżeli P jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu, to pierścień wielomianów $P[x]$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.*

Twierdzenie 12.4 *Jeżeli K jest ciałem ułamków dziedziny z jednoznacznością rozkładu P i element $a \in P[x]$ jest nierozkładalny w $P[x]$, to a jest nierozkładalny w $K[x]$ lub $a \in P$ i a jest nierozkładalny w P.*

(Więc jeżeli a jest rozkładalny w $K[x]$, to jest też rozkładalny w $P[x]$.)