Topologia I

Ćwiczenia do wykładu

Przestrzenie metryczne

Sprawdź, że przedstawione poniżej przestrzenie są przestrzeniami metrycznymi oraz opisz jak wyglądają kule w tych przestrzeniach:

1. $X = \mathbf{R}$, $d(x, y) = |x - y|$
2. X - dowolny zbiór

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x = y \\ 1 & \text{jeżeli } x \neq y \end{cases}$$

(metryka *"0-1"*)

3. $X = \mathbf{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

   a) $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
   (metryka *euklidesowa*)

   b) $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
   (metryka *taksówkowa*)

   c)

$$d(x,y) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{jeżeli } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

   (metryka *rzeka*)

   d) $d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$
   (metryka *króla szachowego*)

   e)

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{jeżeli punkty } x,\ y \text{ oraz } \mathbf{0} \text{ są współliniowe} \\ \|x\| + \|y\| & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

   (metryka *kolejowa*)

4. $X = \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$
   $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
   (metryka *euklidesowa*)

5. $X = \mathbf{R}^3$, x, $y \in \mathbf{R}^3$

   $$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{jeżeli punkty } x, y \text{ oraz } \mathbf{0} \text{ są współliniowe} \\ \|x\| + \|y\| & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

   (metryka *jeż*)

6. $X = C[0,1]$ - zbiór rzeczywistych funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$

   a) $d(f,g) = \max_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|$

   b) $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

7. Niech $(X, \| \ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Sprawdź, że funkcja $d(x,y) = \|x-y\|$ jest metryka w X.

8. Niech (X, d_1), (Y, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi. Niech $\rho_1, \ \rho_2 : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbf{R}$:

   a) $\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$,

   b) $\rho_2((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2}$.

   Sprawdź, że $\rho_1, \ \rho_2$ są metrykami na $X \times Y$. Pokaż, że każda kula $B(z_0, r_1)_{\rho_1}$ zawiera pewną kulę $B(z_0, r_2)_{\rho_2}$ (gdzie $z_0 \in X \times Y$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$), i na odwrót.

9. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Pokaż, korzystając z nierówności trójkąta, że dla dowolnego skończonego ciągu $x_1, \ldots, x_k$ spełniona jest nierówność:

   $$d(x_1, x_k) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{k-2}, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_k) \ .$$

   Ta nierówność jest też nazywana *nierównością trójkąta*

10. Udowodnij, że diam $B(x, r) \le 2r$.

11. Udowodnij, że każda kula jest zbiorem otwartym.

12. Zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą pewnej rodziny kul.

13. Udowodnij, że w przestrzeni z metryką "0-1" każdy zbiór jest otwarty.

14. Które ze zbiorów

a) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$,
b) $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$,
c) $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} \leq 1\}$,
d) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$,
e) $E = \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$

są otwarte (odp. domknięte, ograniczone).

15. Udowodnij, że skończona suma zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

16. Pokaż przykład zbioru przeliczalnego, który nie jest domknięty.

17. Niech $A \subset X$ będzie takim zbiorem, że
$$\forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad A \cap B(a, r_a) = \{a\}.$$
Wtedy
$$\forall a, b \in A \ \text{ jeżeli } a \neq b \text{ to } \quad B(a, \frac{r_a}{2}) \cap B(b, \frac{r_b}{2}) = \emptyset.$$

18. Jeżeli U - otwarty, F - domknięty, to $U \setminus F$ jest otwarty oraz $F \setminus U$ jest domknięty.

19. Załóżmy, że $U \subset X$ oraz $V \subset Y$ są zbiorami otwartymi w przestrzeniach X oraz Y. Pokaż, że $U \times V$ jest otwarty w $(X \times Y, \rho_1)$.

20. Załóżmy, że A jest domkniętym podzbiorem w X oraz $F \subset A$. Pokaż, że zbiór F jest domknięty w podprzestrzeni A wtedy i tylko wtedy, gdy F jest domknięty w X.

Ciągi zbieżne, domknięcie, wnętrze zbioru

21. Udowodnij, że $x = \lim x_n$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lim d(x, x_n) = 0$.

22. Udowodnij, że

a) granica ciągu jest jednoznacznie wyznaczona, tzn. jeżeli $x_n \to x$ oraz $x_n \to y$ to $x = y$,

b) ciąg zbieżny jest ograniczony,

c) podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny,

d) ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

23. Niech U będzie zbiorem otwartym oraz $\lim x_n = x \in U$. Udowodnij, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) należą do U.

24. Niech $A \subset X$. Pokaż, że każdy punkt należący do zbioru A jest punktem izolowanym lub punktem skupienia zbioru A.

25. Czy punkt skupienia zbioru A może być punktem izolowanym w podprzestrzeni A? Czy punkt izolowany w podprzestrzeni A może być punktem skupienia zbioru A?

26. Niech $z_n = (x_n, y_n) \in X \times Y$. Udowodnij, że $z_n \to z = (x, y)$ (w metryce ρ_1 lub ρ_2) wtedy i tylko wtedy gdy $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$.

27. Czy zawsze $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$? Czy iloczyn kartezjański dwóch zbiorów domkniętych jest domknięty?

28. Udowodnij, że jeżeli A jest podzbiorem ograniczonym $\mathbf{R}$ to $\operatorname{diam} A = \sup A - \inf A$.

29. Udowodnij, że jeżeli $\operatorname{diam} A \leq c$ to $\operatorname{diam} \bar{A} \leq c$. Czy zawsze $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \bar{A}$?

30. Pokaż, że

a) $\bar{\emptyset} = \emptyset$,

b) $\bar{X} = X$,

c) jeżeli $A \subset B$ to $\bar{A} \subset \bar{B}$,

d) $\bar{A} \setminus \bar{B} \subset \overline{A \setminus B}$,

e) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,

f) $\overline{\overline{A}} = \bar{A}$.

31. Udowodnij, że jeżeli U jest zbiorem otwartym oraz $U \cap A = \emptyset$, to $U \cap \bar{A} = \emptyset$.

32. Udowodnij, że $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$. Czy odwrotna inkluzja jest zawsze prawdziwa?

33. Którym z symboli "=", "$\subset$", "$\supset$" można zawsze zastąpić "?" we wzorze $\bigcap_\alpha \bar{A}_\alpha \ ? \ \overline{\bigcap_\alpha A_\alpha}$, a w szczególności we wzorze $\bar{A} \cap \bar{B} \ ? \ \overline{A \cap B}$.

34. Niech $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$. Udowodnij, że $x \in \bar{A}$ wtedy i tylko wtedy gdy $d(x, A) = 0$.

35. Udowodnij, że

    a) $\operatorname{int} A$ jest zawsze otwarty,

    b) jeżeli U jest otwarty oraz $U \subset A$ to $U \subset \operatorname{int} A$, czyli $\operatorname{int} A$ jest największym zbiorem otwartym zawartym w A,

    c) $\operatorname{int} \emptyset = \emptyset$,

    d) $\operatorname{int} X = X$,

    e) $\operatorname{int} A \cap B = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$,

    f) $\operatorname{int} (\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$,

    g) $\operatorname{int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

36. Którym z symboli "=", "$\subset$", "$\supset$" można zawsze zastąpić "?" we wzorze

    a) $\operatorname{int} \bigcup_\alpha A_\alpha \ ? \ \bigcup_\alpha \operatorname{int} A_\alpha$,

    b) $\operatorname{int} \bigcap_\alpha A_\alpha \ ? \ \bigcap_\alpha \operatorname{int} A_\alpha$.

37. Znajdź domknięcie $\bar{A}$, wnętrze $\operatorname{int} A$ oraz ograniczenie $\operatorname{Fr} A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$ zbioru A:

    a) $A = [0, 1) \cup \{5, 6, 7\}$,

    b) $A = \mathbf{N}$,

    c) $A = \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$,

    d) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$

Odwzorowania ciągłe

38. Uzasadnij, że odwzorowanie identycznościowe oraz odwzorowanie stałe są funkcjami ciągłymi.

39. Niech X będzie przestrzenią z metryką "0-1", a Y dowolną przestrzenią metryczną. Udowodnij, że każde odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ jest ciągłe.

40. Udowodnij, że odwzorowanie $f = (f_1, f_2) : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy f_1, f_2 są ciągłe.

41. Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdej kuli w Y jest otwarty w X.

42. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Udowodnij, że funkcja $d : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła.

43. Niech $f : X \to X$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że funkcja
$$p = p(x) = d(f(x), x) : X \to \mathbf{R}$$
jest ciągła.

44. Czy przekształcenie identycznościowe $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ jest ciągłe jeżeli w dziedzinie i przeciwdziedzinie weźmiemy parami inne metryki, np. metrykę euklidesową, "kolejową", "rzekę", "0-1".

45. Czy przekształcenie $f(x) = (2x, 3x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ jest ciągłe, jeżeli w $\mathbf{R}$ weźmiemy metrykę euklidesową, a w $\mathbf{R}^2$ metrykę euklidesową, metrykę "rzekę", metrykę "kolejową".

46. Czy przekształcenie identycznościowe $C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1]$ jest ciągłe, jeżeli w dziedzinie i przeciwdziedzinie weźmiemy metryki $d_1(f, g) = \max_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|$ oraz
$d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$?
(Sprawdź oba możliwe przypadki wyboru kolejności metryk.)

47. Czy $\max(x, y) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą?
Wskazówka: Pokazać, że:
$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{jeżeli punkt } (x, y) \text{ leży w półpłaszczyźnie } x \ge y \\ y & \text{jeżeli punkt } (x, y) \text{ leży w półpłaszczyźnie } x \le y \end{cases}$$
Następnie sprawdzić, czy przeciwobrazy zbiorów domkniętych są domknięte.

48. Niech $f, g : X \to \mathbf{R}$ będą ciągłe, niech $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Czy $h : X \to \mathbf{R}$ jest ciągła?

49. Załóżmy, że A, $B \subset X$ są takimi zbiorami domkniętymi, że $A \cup B = X$. Niech $f : A \longrightarrow Y$, $g : B \longrightarrow Y$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $\forall x \in A \cap B \;\; f(x) = g(x)$. Zdefiniujmy $h : X \longrightarrow Y$:
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{gdy } x \in A \\ g(x) & , \text{gdy } x \in B \end{cases}$$

Sprawdź, że h jest funkcją ciągłą.

50. Niech $f, g : X \to \mathbf{R}$ będą ciągłe. Czy jeżeli $x_n \to x$ oraz $f(x_n) \leq g(x_n)$, to $f(x) \leq g(x)$?

51. Udowodnij, że jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem ciągłym to wykres $W_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ jest domkniętym podzbiorem w $X \times Y$. Czy implikacja odwrotna jest prawdziwa?

52. Niech $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ będzia funkcją rosnącą i "na". Pokaż, że f jest ciągła (sprawdź, że spełniony jest warunek Cauchy'ego ciągłości). Stosując podobne metody sprawdź, że funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest ciągła.

53. Niech $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ będzie ciągła oraz $f(x_0) > 0$. Udowodnij, że
$$\exists r > 0 \;\; \forall x \in B(x_0, r) \quad \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < 2f(x_0).$$

54. Udowodnij, że jeżeli f, $g : X \longrightarrow Y$ są przekształceniami ciągłymi to zbiór $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ jest domknięty.

55. Niech $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ będzie taką funkcją, że
$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \lim_{h \longrightarrow 0} (f(x+h) - f(x-h)) = 0.$$
Czy f musi być funkcją ciągła?

Przestrzenie ośrodkowe

56. Które z poniższych przestrzeni są ośrodkowe?
    a) prosta $\mathbf{R}$,
    b) płaszczyzna $\mathbf{R}^2$,
    c) płaszczyzna z metryką "kolejową",
    d) płaszczyzna z metryką "rzeka",
    e) płaszczyzna z metryką "0-1".

57. Udowodnij, że jeżeli przestrzenie X, Y są ośrodkowe to przestrzeń $X \times Y$ też jest ośrodkowa.

58. Niech X będzie taką przestrzenią ośrodkową, że każdy $p \in X$ jest punktem izolowanym. Czy przestrzeń X może być nieprzeliczalna?

59. Niech X będzie przestrzenią ośrodkową zawierającą tylko skończenie wiele punktów skupienia. Czy przestrzeń X może być nieprzeliczalna?

60. Czy przekrój dwóch zbiorów gęstych jest zawsze gęsty? Czy przekrój dwóch zbiorów otwartych gęstych jest zawsze otwarty i gęsty.

61. Niech $f, g : X \longrightarrow Y$ będą ciągłe. Załóżmy, że $A \subset X$ jest podzbiorem gęstym, oraz że $\forall\ a \in A \quad f(a) = g(a)$. Udowodnij, że
$\forall x \in X \quad f(x) = g(x)$.

62. Niech $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Niech $c = f(1)$. Udowodnij, że

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = cx$$

63. Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie przekształceniem ciągłym, $A \subset X$ zbiorem gęstym. Załóżmy, że $\forall a, b \in A$, jeżeli $a \neq b$ to $f(a) \neq f(b)$. Czy f musi być różnowartościowe?

Przestrzenie zwarte

64. Które ze zbiorów przedstawionych w zadaniu 14 są zwarte?

65. Załóżmy, że w zbiorze A istnieją elementy $a_1, a_2, \ldots$ takie, że

$$\exists \delta > 0 \quad \forall i \neq j \quad d(a_i, a_j) \geq \delta.$$

Uzasadnij, że A nie jest zbiorem zwartym.

66. Czy zbiór $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ jest zwarty w $\mathbf{R}^2$ z metryką

    a) euklidesową,
    b) "kolejową",
    c) "0-1"?

67. Niech $F_n, n = 1, 2, \ldots$ będzie takim ciągiem podzbiorów płaszczyzny $\mathbf{R}^2$, że:
   - F_1 jest domkniętym "pełnym" kołem,
   - F_n powstaje w ten sposób, że w każde koło ze zbioru F_{n-1} zastępujemy przez zawarte w nim dwa mniejsze domknięte rozłączne "pełne" koła.

   Pokaż, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jest nieprzeliczalnym zbiorem zwartym.

68. Udowodnij, że suma skończonej rodziny zbiorów zwartych jest zwarta.

69. Udowodnij, że przekrój dowolnej rodziny zbiorów zwartych jest zwarty.

70. Czy jeżeli $A \times B$ jest zwartym podzbiorem w $X \times Y$, to A (odp. B) jest zawsze zwartym podzbiorem w X (odp. Y)?

71. Udowodnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny w przestrzeni X do x_0 wtedy i tylko wtedy gdy z każdego podciągu $(x_{\phi(n)})$ można wybrać podciąg $(x_{\phi(\psi(n))})$ zbieżny w X do x_0.

72. Jeżeli Y jest przestrzenią zwartą, to przekształcenie $f : X \longrightarrow Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy wykres $W_f \subset X \times Y$ jest domknięty w $X \times Y$.

   Wskazówka: Żeby udowodnić warunek ciągłości Heinego, weź dowolny podciąg $(x_{\phi(n)})$ ciągu $x_n \to x$, a następnie udowodnij, że istnieje podciąg $f(x_{\phi(\psi(n))}) \to f(x)$.

73. Jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to przekształcenie $f : X \longrightarrow Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy wykres W_f jest zwarty.

   Wskazówka: Żeby udowodnić warunek ciągłości Heinego, weź dowolny podciąg $(x_{\phi(n)})$ ciągu $x_n \to x$, a następnie udowodnij, że istnieje podciąg $f(x_{\phi(\psi(n))}) \to f(x)$.

74. Niech A będzie takim zbiorem, że $K = \bar{A}$ jest zwarty. Pokaż, że dla każdego $r > 0$ istnieje skończony podzbiór $S \subset A$ taki, że $K \subset \bigcup_{s \in S} B(s, r)$.

75. Niech $K_1, \ldots, K_n, \ldots$ będzie przeliczalną rodziną zwartych podzbiorów przestrzeni X, takich że $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0$ oraz $\bigcap_1^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Czy $\bigcup_1^{\infty} K_n$ jest zawsze zwarty?

76. Niech K_1, K_2, ... będa domkniętymi podzbiorami w $[0,1]\times[0,1]$ takimi, że $\forall\ n \quad \bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$.
    Czy zawsze $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$?

77. Niech X będzie przestrzenią zwartą, oraz $f, g : X \to \mathbf{R}$ niech będą funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że funkcja f jest dodatnia, i nie przyjmuje nigdy wartości zero. Pokaż, że istnieje taka dodatnia stała c, że zawsze $g(x) < c\, f(x)$.

78. Załóżmy, że każda funkcja ciągła $X \to \mathbf{R}$ jest ograniczona. Udowodnij, że X jest przestrzenią zwartą.

Jednostajna ciągłość

79. Czy funkcja $f(x) = 1/x : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ jest jednostajnie ciągła?

80. Pokaż, że jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest jednostajnie ciągła, (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego w X to $(f(x_n))$jest ciągiem Cauchy'ego w Y. Czy funkcje ciągłe mają zawsze tą własność?

81. Udowodnij, że jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ nie jest przekształceniem jednostajnie ciągłym to istnieją ciągi (p_i), (q_i) w X takie, że $d(p_i, q_i) \to 0$ oraz $\exists \epsilon > 0 \quad \forall i \quad d(f(p_i), f(q_i)) > \epsilon$.

82. Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie funkcją jednostajnie ciągła. Załóżmy, że X jest zbiorem ograniczonym. Czy $f(X)$ jest zawsze zbiorem ograniczonym?

83. Udowodnij, że funkcja ciągła $f : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$ jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy gdy istnieją skończone granice
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbf{R}\ , \quad \lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbf{R}$$

84. Czy funkcja $f(x) = \sin(1/x) : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ jest jednostajnie ciągła?

Przestrzenie zupełne

85. Które z poniższych przestrzeni są zupełne?

a) $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $[0,1]$, $(0,1)$ z metryką euklidesową,

b) $\mathbf{R}^n$ z metryką euklidesową,

c) $\mathbf{R}^2$ z metryką "kolejową",

d) $C[0,1]$ z metrykami opisanymi w zadaniu 6.

86. Załóżmy, że przestrzenie X, Y są zupełne. Czy $X \times Y$ jest zawsze przestgrzenią zupełną.

87. Załóżmy, że przestrzenie X, Y są homeomorficzne oraz X jest przestrzenią zupełną. Czy Y musi być przestrzenią zupełna?

88. Niech $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ będzie odwzorowanieniem danym wzorem:
$$f(x) = 3 - \frac{x}{9} + \cos\frac{x}{8}\ .$$
Pokaż, że f posiada punkt stały.

89. Niech $A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ będzie odwzorowanieniem danym wzorem:
$$A(x)(t) = \exp t + \frac{1}{3}x(t/2) \quad , \text{ gdzie } x = x(t) \in C[0,1].$$
Pokaż, że A posiada punkt stały.

90. Podaj przykłady przekształceń ciągłych $f : X \longrightarrow X$ bez punktów stałych dla $X = (0,1)$, $\mathbf{R}$, S^1, S^2.

91. Niech $f(x) = \ln(1 + e^x) : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Sprawdź, że
$$\forall x \neq y \quad |f(x) - f(y)| < |x - y|$$
oraz f nie posiada punktu stałego.

92. Załóżmy, że K jest zbiorem zwartym oraz $f : K \to K$ jest taką funkcją ciągłą, że $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ jeżeli $x \neq y$. Niech
$$p = p(x) = d(f(x), x) : K \to \mathbf{R},$$
$$c = \min\{p(x) : \ x \in X\}.$$
Pokaż, że $c = 0$, a więc f ma punkt stały.

93. Niech A będzie takim podzbiorem przestrzeni zupełnej X, że dla każdego $r > 0$ istnieje skończony podzbiór $S \subset X$ taki, że $A \subset \bigcup_{s \in S} B(s,r)$. Czy $K = \bar{A}$ jest zawsze zwarty?

94. Czy $\mathbf{Q}$ jest przekrojem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych?

95. Czy $\mathbf{IQ}$ (zbiór liczb niewymiernych) jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych?

Przestrzenie spójne

96. Załóżmy, że zbiór $A \subset X$ można przedstawić w postaci sumy $A = A_1 \cup A_2$, gdzie A_1, A_2 są rozłączne, niepuste oraz $\overline{A_1} \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset$. Pokaż, że A jest przestrzenią niespójną.

97. Załóżmy, że A jest niepustym właściwym podzbiorem spójnej przestrzeni X. Udowodnij, że

    a) jeżeli A jest otwarty to nie jest domknięty,

    b) jeżeli A jest domknięty to nie jest otwarty.

    Czy można opuścić założenie o spójności X?

98. Jak wyglądają wszystkie spójne podzbiory prostej $\mathbf{R}$?

99. Pokaż, że każdy punkt w zbiorze Cantora C jest składową.

100. Pokaż, że płaszczyzna z metryką "rzeka" jest łukowo spójna, a więc spójna.

101. Uzasadnij, że zbiór $X = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ jest spójny, ale nie jest łukowo spójny.

102. Które z poniższych zbiorów są spójne?

    a) $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\{x^2 + y^2 \geq 1\}$,

    b) $\{1\} \times [0, 1]$,

    c) $\{(x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$,

    d) $\mathbf{R} \times \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$,

    e) $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cup (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times \mathbf{R}$,

    f) $\mathbf{Q} \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cup (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times \mathbf{Q}$,

    g) $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

103. Jak wyglądają wszystkie spójne podzbiory przestrzeni $\mathbf{Q}$.

104. Czy przekrój zbiorów spójnych jest zawsze spójny?

105. Czy istnieje zstępujący ciąg podzbiorów spójnych płaszczyzny których przekrój nie jest spójny?

106. Czy każda funkcja ciągła $f : [0,1]\longrightarrow[0,1]$ posiada punkt stały?

107. Niech X będzie spójna, niech $f : X\longrightarrow\mathbf{R}$ będzie funkcją ciągłą o wartościach całkowitych. Udowodnij, że f jest funkcją stałą.

108. Czy równanie $2\sin x = x$ ma rozwiązanie w przedziale $[\frac{\pi}{2}, \pi]$?

109. Niech $f : \mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ będzie funkcją ciągła, różnowartościową. Czy f jest zawsze monotoniczna?

110. Czy istnieje ciągła, wzajemnie jednoznaczna funkcja $f : [0,1)\longrightarrow\mathbf{R}$?

111. Czy istnieje taka funkcja ciągła $f : \mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, że
$$f(x) \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow x \notin \mathbf{Q} \ ?$$

112. Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ taka, że dla każdego $y \in \mathbf{R}$ zbiór $f^{-1}(y)$ ma dokładnie dwa elementy?

113. Załóżmy, że zbiór otwarty $U \subset \mathbf{R}^2$ jest spójny. Niech $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ będą funkcjami klasy C^1 na U takimi, że
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ oraz } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ na } U.$$
Pokaż, że istnieje taka stała $c \in \mathbf{R}$, że $u(x,y) - v(x,y) = c$ dla każdego $(x,y) \in U$.

114. Pociąg przejechał 320 km w 4 godziny. Pokaż, że pociąg przejechał pewien odcinek długości 80 km dokładnie w czasie jednej godziny.

115. Pokaż, że jeżeli spójna przestrzeń metryczna posiada co najmniej dwa punkty, to posiada co najmniej continuum punktów.

116. Niech A_1, A_2, ... będą takimi zbiorami spójnymi, że $\forall i,j \ \ A_i \cap A_j$ jest zbiorem niepustym. Czy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ jest zawsze zbiorem spójnym?

117. Niech A_1, A_2, ... będą takimi zbiorami spójnymi, że $\forall i \ \ A_i \cap A_{i+1}$ jest zbiorem niepustym. Czy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ jest zawsze zbiorem spójnym?

118. Niech $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ będzie przeliczalną rodziną zwartych spójnych podzbiorów płaszczyzny $\mathbf{R}^2$. Czy $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ może się składać dokładnie z dwóch punktów, np. $A = \{(0,-1), (0.1)\}$. Czy A może być niespójny?

119. Niech $f : S^1 \longrightarrow \mathbf{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że
$$\forall x \in S^1 \quad f(-x) = -f(x)$$
Pokaż, że istnieje punkt $x_0 \in S^1$ taki, że $f(x_0) = 0$.

120. Niech $g : S^1 \longrightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje $x_0 \in S^1$ taki, że $g(x_0) = g(-x_0)$.
(Wskazówka: Zbadaj funkcję $f(x) = g(x) - g(-x)$.)

Homeomorfizmy

121. Jeżeli X i Y są homeomorficzne oraz Y i Z są homeomoficzne, to X i Z są homeomorficzne.

122. Każde dwa otwarte (odp. domknięte) odcinki są homeomorficzne.

123. Każde dwie otwarte (odp. domknięte) półproste są homeomorficzne.

124. Uzasadnij, że $\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbf{R}$ jest homeomorfizmem.

125. Uzasadnij, że $\mathrm{tg} : (0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (0, +\infty)$ jest homeomorfizmem.

126. Pokaż, że $\exp : \mathbf{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ jest homeomorfizmem.

127. Pokaż, że zbiory: odcinek otwarty, półprosta otwarta, prosta $\mathbf{R}$ są parami homeomorficzne.

128. Pokaż, że $f : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1$ dana wzorem $f(t) = (\cos t, \sin t)$ jest odwzorowaniem ciągłym, wzajemnie jednoznacznym, ale nie jest homeomorfizmem.

129. Niech $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ będzie wzajemnie jednoznaczną monotoniczną funkcją. Czy f jest ciągła, czy f zawsze jest homeomorfizmem?

130. Uzasadnij, że $[0, 1]$, S^1 nie są homeomorficzne.

131. Uzasadnij dlaczego każde dwie z poniższych podprzestrzeni prostej $\mathbf{R}$ nie są homeomorficzne:
$\{0\},\ [0,1],\ (0,1),\ [0,1), [0,1] \cup [2,3],$
$[0,1] \cup [2,3),\ [0,1) \cup [2,3),\ [0,1] \cup (2,3),$
$[0,1) \cup (2,3),\ (0,1) \cup (2,3), \mathbf{Q},\ \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q},$
$\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}, \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}.$

132. Załóżmy, że $h : X \longrightarrow Y$ jest homeomorfizmem. Udowodnij, że $x_n \to \bar{x}$ wtedy i tylko wtedy gdy $h(x_n) \to h(\bar{x})$.

133. Załóżmy, że $h : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ jest homeomorfizmem. Udowodnij, że ciąg $(x_n)_1^\infty$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy ciąg $(h(x_n))_1^\infty$ jest ograniczony.

134. Załóżmy, że przestrzeń X jest homeomorficzna z Y. Czy zawsze przestrzeń $X \times X$ jest homeomorficzna z $Y \times Y$?

135. Które z poniższych podzbiorów $\mathbf{R}^2$ są homeomorficzne?

A B C D E F G H I J K L M N O P R S T U W X Y Z

136. Które z poniższych podzbiorów $\mathbf{R}^2$ są homeomorficzne?
$\mathbf{R} \times \{0\},\ \mathbf{R} \times \{0,1\},\ \mathbf{R} \times \{0,1,2\},\ \{0\} \times \mathbf{R},$
$\mathbf{R}^2,\ [0,1] \times [0,1],\ (0,1) \times (0,1), (0,1) \times \mathbf{R},$
$\{(x,y) \mid y > x^2\},\ \{(x,y) \mid y = x^2\}, \{(x,y) \mid y < x^2\},$
$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\},\ \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\},$
$\mathbf{R} \times \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}).$

137. Uzasadnij, że przestrzenie $X,\ Y$ są homeomorficzne:

   a) $X = S^1 \times [0,1],\ Y = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
   b) $X = S^1 \times \mathbf{R},\ Y = \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
   c) $X = S^1 \times [0,1] \cup \{(x,y,0) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$
   $Y = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$
   d) $X = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\},\ Y = \mathbf{R}^2$
   e) $X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\},\ Y = \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$
   f) $X = [-1,1] \times [0,1],\ Y = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

138. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Dla $x, y \in X$ niech $\bar{d}(x,y) = \min(d(x,y), 1)$. Pokaż, że:

a) $(X, \bar{d})$ jest przestrzenią metryczną,

b) odwzorowanie identycznościowe $(X, d) \longrightarrow (X, \bar{d})$ jest homeomorfizmem,

c) diam $(X, \bar{d}) \leq 1$.

139. Pokaż, że $\mathbf{R}^3$ z metryką "jeż" jest homeomorficzna z $\mathbf{R}^2$ z metryką "kolejową".

140. Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest przekształceniem ciągłym to jej wykres W_f jest homeomorficzny z X. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna?

141. Czy prawdziwe jest zdanie:
Jeżeli przestrzeń X jest homeomorficzna z pewnym podzbiorem w przestrzeni Y oraz Y jest homeomorficzna z pewnym podzbiorem w X, to przestrzenie X, Y są homeomorficzne.

Ciągi funkcji

142. Podaj przykład punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych, który nie jest jednostajnie zbieżny.

143. Niech X będzie przestrzenią zwartą, niech $C(X, Y)$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych $X \longrightarrow Y$ z metryką

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Sprawdź, że ciąg (f_i) jest zbieżny do f w $(C(X, Y), \rho)$ wtedy i tylko wtedy gdy ciąg (f_i) jest jednostajnie zbieżny do f.

144. Niech $f_n = (1 + x^{2n})^{-1}$, $x \in \mathbf{R}$. Czy ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo (jednostajnie)?

145. Niech $f_n = nx^n(1 - x)$, $x \in [0, 1]$. Czy ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo (jednostajnie)?

146. Załóżmy, że X, Y są zwarte. Czy $C(X, Y)$ jest wtedy zawsze zwarta?