

Geometria Zbiorów Analitycznych

Literatura Pomocnicza:

1. E.Bierstone, P.D.Milman, *Semianalytic and Subanalytic Sets*, Publ. Math. I.H.E.S. 67 (1988), 5-42,
2. B.Malgrange, *Ideals of Differentiable Functions*, Oxford University Press 1966
3. S.Łojasiewicz, *Ensembles Semi-Analytiques*, I.H.E.S. 1964,
4. S.Łojasiewicz, *Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej*, PWN 1988,
5. S.Łojasiewicz, J.Stasica, *Analiza formalna i funkcje analityczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego 2005.

1 Oznaczenia

\mathbb{K} – ciało liczb rzeczywistych \mathbb{R} , lub ciało liczb zespolonych \mathbb{C}

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}}_n, \text{ czyli } \mathbb{R}^n \text{ lub } \mathbb{C}^n$$

Punkty: $\mathbb{K}^n \ni p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}$

Początek układu: $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$

$$p, q \in \mathbb{K}^n : |p| = \sqrt{|p_1|^2 + \dots + |p_n|^2}$$

$$d(p, q) = |p - q| = \sqrt{|p_1 - q_1|^2 + \dots + |p_n - q_n|^2}$$

i -ta współrzędna x_i : $x_i(p) = p_i$, więc

$$x_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$$

(Gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ to używa się często symbolu z_i zamiast x_i .)

(\mathbb{K}^n, d) – jest przestrzenią metryczną, izometryczną z \mathbb{R}^n lub z $\underbrace{\mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2}_n = \mathbb{R}^{2n}$, ze standardową metryką euklidesową.

Niech $U \subset \mathbb{K}^n$ będzie zbiorem otwartym, $p \in U$, oraz $f : U \rightarrow \mathbb{K}$. Definiujemy pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = D_i f(p)$ jako

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + h, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{h},$$

o ile ta granica istnieje.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- *Wielowskażnik*: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ – norma wielowskażnika
- $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ – silnia wielowskażnika
- $D^\alpha f = \partial^{|\alpha|} f / \partial x^\alpha = \partial^{|\alpha|} f / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ – jednomian stopnia $|\alpha|$ (Uwaga: Przyjmujemy, że $D^{(0, \dots, 0)} f = f$, $(0, \dots, 0)! = \mathbf{0}! = 0$, $x^{\mathbf{0}} = 1$)

2 Funkcje analityczne

$\mathbb{C} \supset U$ – zbiór otwarty

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

Funkcja f jest *holomorficzna*, jeżeli dla każdego punktu $a \in U$ istnieje pochodna

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Jeżeli f jest holomorficzna, to w każdym punkcie $a \in U$ i dla dowolnego $k \geq 1$ istnieje k -ta pochodna $f^{(k)}(a)$.

Jeżeli $D(a, r) \subset U$, to funkcja f rozwija się w szereg potęgowy w kole $D(a, r)$, tzn.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad (\text{dla } z \in D(a, r)),$$

gdzie $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$. A więc, dla dowolnego punktu $a \in U$, w pewnym otwartym otoczeniu tego punktu funkcja f jest równa rozwinięciu f w nieskończony szereg potęgowy Taylora w punkcie a .

Definicja. Niech $U \subset \mathbb{K}^n$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech $f : U \rightarrow \mathbb{K}$.

Powiemy, że funkcja f jest *analityczna w punkcie* $p \in U$, jeżeli istnieje taka kula otwarta $B(p, r) \subset U$ ($r > 0$) oraz współczynniki $a_\alpha \in \mathbb{K}$ ($\alpha \in \mathbb{N}^n$) takie, że

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x_1 - p_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - p_n)^{\alpha_n}$$

dla wszystkich punktów $x \in B(p, r)$, i szereg po prawej stronie jest bezwzględnie zbieżny. (Wtedy można dowolnie zmieniać kolejność sumowania po prawej stronie.)

Definicja. Funkcja f jest *analityczna* w zbiorze U , jeżeli jest analityczna w każdym punkcie $p \in U$. Będziemy wtedy pisać $f \in \mathcal{O}(U)$.

Jeżeli chcemy wyraźnie zaznaczyć jakie jest ciało \mathbb{K} , to możemy mówić o funkcjach \mathbb{K} -analitycznych, i używać symbolu $\mathcal{O}_K(U)$.

Ćwiczenie 2.1 Niech $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, niech U będzie otwarty w \mathbb{C} , niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Wtedy f jest \mathbb{C} -analityczna w zbiorze U wtedy i tylko wtedy, gdy f jest holomorficzna w zbiorze U . W tym przypadku

$$f \in \mathcal{O}_\mathbb{C}(U) \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}(U) .$$

Ćwiczenie 2.2 Funkcja jednej zmiennej rzeczywistej $f(x) = 1/(1+x^2)$ jest określona (i analityczna!) na całej prostej \mathbb{R} , ale jej rozwinięcie w szereg Taylora w punkcie 0 :

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

jest szeregiem potęgowym zbieżnym tylko na odcinku $(-1, 1)$.

Ćwiczenie 2.3 Zdefiniujmy funkcję

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Pokaż, że

- φ jest funkcją klasy C^∞ na prostej \mathbb{R}
- φ nie jest \mathbb{R} -analityczna w $a = 0$
- φ jest \mathbb{R} -analityczna w każdym punkcie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Napis postaci

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x_1 - p_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - p_n)^{\alpha_n}$$

nazywamy *szeregiem potęgowym* o środku w punkcie $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Przykład. Jeżeli $a \in \mathbb{K}$ oraz $n = 1$, to szereg potęgowy w punkcie a ma postać

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k .$$

Niech $R \geq 0$ będzie promieniem zbieżności tego szeregu. Jeżeli $|x - a| = r < R$, to szereg $f(x)$ jest bezwzględnie zbieżny, a więc

$$\sum |a_k| \cdot |x - a|^k = \sum |a_k| \cdot r^k < \infty .$$

Jeżeli $|x - a| = s > R$, to $\sum |a_k| \cdot s^k = \infty$, więc szereg $f(x)$ nie jest bezwzględnie zbieżny.

Więc jeżeli $r \geq 0$ oraz $\sum |a_k| \cdot r^k < \infty$, to $r \leq R$.

Wniosek 2.4 Szereg potęgowy jednej zmiennej $f(x) = \sum a_k (x - a)^k$ jest bezwzględnie zbieżny w pewnym otwartym otoczeniu punktu $a \in \mathbb{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $r > 0$ takie, że $\sum |a_k| \cdot r^k < \infty$.

Ćwiczenie 2.5 Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności $R = 0$.

Twierdzenie 2.6 Szereg potęgowy n -zmiennych

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x_1 - p_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - p_n)^{\alpha_n} = \sum_{\alpha} a_\alpha (x - p)^\alpha$$

jest bezwzględnie zbieżny w pewnym otwartym otoczeniu punktu $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{K}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $r > 0$ takie, że

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |a_\alpha| \cdot r^{\alpha_1} \cdots r^{\alpha_n} = \sum_{\alpha} |a_\alpha| \cdot r^{|\alpha|} < \infty .$$

Warunek ten pozwala sprawdzać, czy szereg potęgowy definiuje funkcję \mathbb{K} -analityczną w punkcie p .

Ćwiczenie 2.7 Funkcje analityczne są klasy C^∞ . Można je dodawać, odejmować, mnożyć, dzielić, i wynik działania pozostanie funkcją analityczną.

Klasa funkcji analitycznych zawiera funkcje wielomianowe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne, hiperboliczne,...

Ćwiczenie 2.8 Jeżeli $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ jest analityczna w punkcie $p \in \mathbb{K}^n$, to

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{D^{\alpha} f(p)}{\alpha!} (x - p)^{\alpha}$$

w pewnym otwartym otoczeniu punktu p .

Twierdzenie 2.9 (Hartogs) Jeżeli $U \subset \mathbb{C}^n$ jest zbiorem otwartym, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, oraz dla każdego $p \in U$ istnieją pochodne zespolone

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(p),$$

to funkcja f jest analityczna.

3 Zbiory analityczne

Niech X będzie podzbiorem otwartego zbioru $U \subset \mathbb{K}^n$.

Definicja. Zbiór X jest *analityczny w U* , jeżeli dla każdego punktu $p \in U$ istnieje otoczenie otwarte W punktu p oraz istnieje skończona rodzina funkcji analitycznych $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}(W)$, że

(i) $p \in W \subset U$,

(ii) $X \cap W = \{x \in W \mid f_1(x) = \dots = f_s(x) = 0\}$.

Przykład. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(xy) = 0\}$.

Przykład. $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 \sin z = 0\}$.

Ćwiczenie 3.1 Zbiór analityczny w U jest domknięty w U .

Ćwiczenie 3.2 Przekrój oraz suma skończonej rodziny zbiorów analitycznych jest zbiorem analitycznym.

Ćwiczenie 3.3 Jeżeli X jest zbiorem analitycznym w spójnym otwartym zbiorze $U \subset \mathbb{K}$, to $X = U$ albo każdy punkt $p \in X$ jest izolowany w X , więc w tym przypadku X nie ma punktów skupienia w U i jest co najwyżej przeliczalny.

4 Kielki funkcji

$x_0 \in \mathbb{K}^n$ – ustalony punkt

$\mathcal{F} = \{(U, f) \mid U \text{ zbiór otwarty w } \mathbb{K}^n \text{ zawierający } x_0, f : U \rightarrow \mathbb{K}^m\}$

Dla $(U, f), (V, g) \in \mathcal{F}$: $(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow$ istnieje zbiór otwarty W zawierający punkt x_0 taki, że $W \subset U \cap V$ oraz $f|_W \equiv g|_W$.

Ćwiczenie 4.1 Relacja " \sim " jest relacją równoważności w \mathcal{F} .

Klasy równoważności (warstwy) nazywamy *kielkami funkcji* z \mathbb{K}^n do \mathbb{K}^m w punkcie x_0 .

Oznaczamy je:

$f : (\mathbb{K}^n, x_0) \rightarrow \mathbb{K}^m$ lub

$f : (\mathbb{K}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{K}^m, y_0)$, gdzie $y_0 = f(x_0)$

Wartość $y_0 = f(x_0)$ nie zależy od wyboru reprezentanta.

Uwaga. \mathbb{K}^n nie musi być dziedziną funkcji f .

Kiełek jest ciągły (różniczkowalny, klasy C^∞ , analityczny, ...) jeżeli jego reprezentant jest ciągły (różniczkowalny, klasy C^∞ , analityczny, ...).

Przykład $x_0 = 0$

$U_1 = (-1, 1), f_1 = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

$U_2 = \mathbb{R}, f_2 = 1/(1 + x^2)$

$(U_1, f_1), (U_2, f_2)$ reprezentują ten sam kiełek funkcji analitycznej $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$

Przykład $x_0 = 0$

$U_1 = \mathbb{R}, f_1 \equiv 1$

$U_2 = \mathbb{R}, f_2$ ma wykres:

$(U_1, f_1), (U_2, f_2)$ reprezentują ten sam kiełek C^∞ -funkcji.

Przykład $x_0 = 0, f_1 = x, f_2 = \sin x$

reprezentują różne kielki, mimo że wartość w $x_0 = 0$ obu funkcji jest taka sama.

Przykład. $f(x) = x, g(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ reprezentują ten sam kiełek funkcji

analizy w $\mathbf{0}$.

Definicja. $\mathcal{O}_p(n)$ lub \mathcal{O}_p – zbiór kielków funkcji \mathbb{K} -analitycznych w punkcie $p \in \mathbb{K}^n$.

Jeżeli $p = \mathbf{0}$ to będziemy używać symboli $\mathcal{O}(n)$ lub \mathcal{O} .

Jeżeli chcemy wyraźnie zaznaczyć, jakie jest ciało \mathbb{K} , to możemy używać symboli: $\mathcal{O}_{K,p}(n)$ lub $\mathcal{O}_{K,p}$,
a dla $p = \mathbf{0}$: $\mathcal{O}_K(n)$ lub \mathcal{O}_K .

Kielki ciągle (więc również analityczne, różniczkowalne, ...) można składać:

$$f : (\mathbb{K}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{K}^m, y_0) , \quad g : (\mathbb{K}^m, y_0) \rightarrow (\mathbb{K}^k, z_0)$$

$$\text{Kieltek } g \circ f : (\mathbb{K}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{K}^k, z_0)$$

jest reprezentowany przez złożenie dowolnych reprezentantów f oraz g .

Jeżeli $f : (\mathbb{K}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{K}^n, y_0)$, to $g : (\mathbb{K}^n, y_0) \rightarrow (\mathbb{K}^n, x_0)$ jest *kielkiem odwrotnym* do f jeżeli $g \circ f \sim \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ oraz $f \circ g \sim \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Przykład. Jeżeli $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ jest kielkiem funkcji $\sin x$,
 $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ jest kielkiem funkcji $\arcsin x$, to g jest kielkiem odwrotnym do f .

Jeżeli $f : (\mathbb{K}^n, x_0) \rightarrow \mathbb{K}^m$ jest kielkiem różniczkowalnym, to można określić pochodną $Df(x_0) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$:

Przedstawmy $f = (f_1, \dots, f_m)$ z pomocą funkcji współrzędnych.

Macierz $Df(x_0)$ (tzn. macierz Jacobiego) ma postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 4.2 (O funkcji odwrotnej) *Kieltek $f : (\mathbb{K}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{K}^n, y_0)$ analityczny (odp. klasy C^∞) posiada kieltek odwrotny analityczny (odp. klasy C^∞)*

$$f^{-1} : (\mathbb{K}^n, y_0) \rightarrow (\mathbb{K}^n, x_0)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Jacobiego jest niezdegenerowana, tzn.

$$\det Df(x_0) \neq 0 .$$

Przykład $f(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y) : (\mathbb{R}^2, (a, b)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, f(a, b))$ jest kielkiem odwracalnym w każdym punkcie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ale funkcja $(e^x \sin y, e^x \cos y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nie jest odwracalna.

Przykład. Kieltek $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ funkcji x^3 posiada kieltek odwrotny reprezentowany przez $\sqrt[3]{x}$, ale ten kieltek nie jest ani analityczny w zerze, ani klasy C^∞ .

5 Algebra kielków

Będziemy badać kielki analityczne $(\mathbb{K}^n, x_0) \rightarrow \mathbb{K}$, najwygodniej jest przyjąć, że $x_0 = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ jest początkiem układu współrzędnych.

- $\mathcal{O}(n)$ lub \mathcal{O} – zbiór kielkow analitycznych $(\mathbb{K}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{K}$
- $\mathcal{A}(n)$ – zbiór funkcji analitycznych $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$

Ćwiczenie 5.1 $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{A}(n)$ są \mathbb{K} -algebrami.

Fakt 5.2 Naturalne odwzorowanie $\pi : \mathcal{A}(n) \rightarrow \mathcal{O}(n)$ jest (różnowartościowym) homomorfizmem \mathbb{K} -algebr.

- $\mathfrak{m}(n) = \mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O}(n) \mid f(\mathbf{0}) = 0\}$ jest ideałem właściwym algebry $\mathcal{O}(n)$.

Ćwiczenie 5.3 Dla kielka $f \in \mathcal{O}$ istnieje dokładnie jeden element $r \in \mathfrak{m}$ taki, że $f = f(\mathbf{0}) + r$.

W szczególności, pierścień ilorazowy \mathcal{O}/\mathfrak{m} jest izomorficzny z \mathbb{K} .

Fakt 5.4 \mathfrak{m} jest ideałem maksymalnym.

Fakt 5.5 $\mathcal{O}(n)$ jest pierścieniem lokalnym.

Przykład. $\mathcal{A}(n)$ nie jest pierścieniem lokalnym.

Twierdzenie 5.6 (Wzór Taylora) Jeżeli $f \in \mathcal{A}(n)$ (odp. $\mathcal{O}(n)$) oraz $k \geq 1$, to istnieją $g_\alpha \in \mathcal{A}(n)$ (odp. $\mathcal{O}(n)$) dla wszystkich wielowskaźników α stopnia $|\alpha| = k$ takie, że

$$f(x) = \sum_{|\alpha| < k} \frac{D^\alpha f(\mathbf{0})}{\alpha!} x^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} g_\alpha(x) x^\alpha,$$

oraz $g_\alpha(\mathbf{0}) = D^\alpha f(\mathbf{0})/\alpha!$.

Wniosek 5.7 Jeżeli $f \in \mathcal{A}(n)$ (odp. $\mathcal{O}(n)$), to istnieją $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{A}(n)$ (odp. $\mathcal{O}(n)$) takie, że

$$f(x) = f(\mathbf{0}) + x_1 g_1(x) + \dots + x_n g_n(x)$$

oraz $g_i(\mathbf{0}) = \partial f / \partial x_i(\mathbf{0})$.

Z definicji funkcji analitycznych wynika natychmiast, że jeżeli $f \in \mathcal{O}(n)$, to istnieją jednoznacznie wyznaczone współczynniki $a_\alpha = \frac{D^\alpha f(\mathbf{0})}{\alpha!} \in \mathbb{K}$ dla wszystkich wielowskaźników α takie, że

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{D^{\alpha} f(\mathbf{0})}{\alpha!} x^{\alpha}$$

w pewnym otwartym otoczeniu początku układu.

Fakt 5.8 Ideał $\mathbf{m}(n)$ jest generowany przez kielki x_1, \dots, x_n .

I, J – ideały w pewnym pierścieniu. Wtedy

- $I \cdot J = \{a_1 b_1 + \dots + a_s b_s \mid s \geq 1, a_i \in I, b_i \in J\}$
- $I \cdot J \subset I \cap J$, więc $I \cdot J \subset I, I \cdot J \subset J$
- $I^k = \underbrace{I \cdot I \cdot \dots \cdot I}_k = \{\sum_{sk.} c_1 \dots c_k \mid c_i \in I\}$ jest ideałem
- $I \supset I^2 \supset \dots \supset I^k \supset \dots$
- Jeżeli $g_1, \dots, g_p \in I$ generują ideał I , to zbiór elementów postaci $g_1^{\alpha_1} \dots g_p^{\alpha_p}$ (gdzie $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = k$) generuje I^k .
- $\mathbf{m}^k(n) = \underbrace{\mathbf{m}(n) \cdot \dots \cdot \mathbf{m}(n)}_k$ jest ideałem w $\mathcal{O}(n)$, przyjmuje się, że $\mathbf{m}^0 = \mathcal{O}$
- $\mathbf{m}^0 \supset \mathbf{m}^1 \supset \mathbf{m}^2 \supset \dots \supset \mathbf{m}^k \supset \dots$

Fakt 5.9 Jednomiany x^α stopnia k generują \mathbf{m}^k , tzn.:

$$f \in \mathbf{m}^k \Leftrightarrow f = \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha g_\alpha(x) = \sum_{|\alpha|=k} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} g_\alpha(x).$$

W szczególności, \mathbf{m}^k jest skończenie generowany.

Lemat 5.10 $f \in \mathbf{m}^k \Rightarrow \partial f / \partial x_i \in \mathbf{m}^{k-1}$.

Fakt 5.11 $\mathbf{m}^k = \{f \in \mathcal{O} \mid \forall |\alpha| < k \ D^\alpha f(\mathbf{0}) = 0\}$.

Przykład.

- $\sin xy$ należy do $\mathbf{m}^2(2)$, ale nie należy do $\mathbf{m}^3(2)$
- $\cos xy \notin \mathbf{m}(2)$
- $\cos xy - 1 \in \mathbf{m}^4(2)$, ale nie należy do $\mathbf{m}^5(2)$.

Ćwiczenie 5.12 Dla $f \in \mathcal{O}(n)$:

$$f(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) \equiv 0 \Leftrightarrow f \in \langle x_{p+1}, \dots, x_n \rangle \mathcal{O}(n) .$$

Ćwiczenie 5.13 Jeżeli $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{O}(p)$, tzn. $g_i = g_i(x_1, \dots, x_p)$, to istnieje izomorfizm

$$\mathcal{O}(p) / \langle g_1, \dots, g_s \rangle \simeq \mathcal{O}(n) / \langle g_1, \dots, g_s, x_{p+1}, \dots, x_n \rangle$$

oraz

$$\mathbf{m}(p) / \langle g_1, \dots, g_s \rangle \simeq \mathbf{m}(n) / \langle g_1, \dots, g_s, x_{p+1}, \dots, x_n \rangle .$$

Wskazówka. Pokaż, że jądrem surjektywnego homomorfizmu

$$\mathcal{O}(n) \ni f \mapsto f(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}(p) / \langle g_1, \dots, g_s \rangle$$

jest $\langle g_1, \dots, g_s, x_{p+1}, \dots, x_n \rangle$.

6 Lokalne Twierdzenie o Zerach

Jeżeli $I \subset \mathcal{O}(n)$ jest ideałem, to pierścień ilorazowy $\mathcal{O}(n)/I$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} .

$\dim_K \mathcal{O}(n)/I$ – wymiar przestrzeni wektorowej $\mathcal{O}(n)/I$.

Ćwiczenie 6.1 $\dim_K \mathcal{O}(n) = \infty$, więc jeżeli $I = \{0\}$, to $\dim_K \mathcal{O}(n)/\{0\} = \infty$.

Ćwiczenie 6.2 Jeżeli $I = \langle x_1^2, x_2^2 \rangle$, to $\dim_K \mathcal{O}(2)/I \leq 4$.

Ćwiczenie 6.3 Jeżeli $I = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^k \rangle$, to przestrzeń wektorowa $\mathcal{O}(n)/I$ jest rozpięta przez $1, x_n, x_n^2, \dots, x_n^{k-1}$, czyli

$$\mathcal{O}(n)/I = \mathbb{K} \cdot 1 + \mathbb{K} \cdot x_n + \mathbb{K} \cdot x_n^2 + \dots + \mathbb{K} \cdot x_n^{k-1} .$$

Ćwiczenie 6.4 $\dim_K \mathcal{O}(n)/\mathfrak{m}^k < \infty$.

Fakt 6.5 $\dim_K \mathcal{O}(n)/I < \infty \Leftrightarrow \exists k : \mathfrak{m}^k \subset I$.

Twierdzenia o Zerach (Nullstellensatz) pozwalają porównywać własności ideałów z własnościami zbioru punktów, na których elementy ideału przyjmują wartość zero. Poniżej przedstawiamy bardzo prostą wersję Lokalnego Twierdzenia o Zerach.

Twierdzenie 6.6 Weźmy $f_1, \dots, f_p \in \mathfrak{m}(n)$, tzn. $f_i \in \mathcal{O}(n)$ oraz $f_i(\mathbf{0}) = 0$. Niech $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle \subset \mathcal{O}(n)$ będzie ideałem generowanym przez te elementy. Wtedy

(i) Jeżeli $\dim_K \mathcal{O}(n)/I < \infty$, to początek układu $\mathbf{0}$ jest punktem izolowanym w zbiorze

$$\{x \in \mathbb{K}^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0\} .$$

(ii) Jeżeli $\mathbf{0}$ jest punktem izolowanym w zbiorze

$$\{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0\} ,$$

to $\dim_K \mathcal{O}(n)/I < \infty$.

Ćwiczenie 6.7 Udowodnij punkt (i) powyższego Twierdzenia.

Przykład. Niech $f_1(x_1, x_2) = x_1x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1^4 - 5x_2^7$, oraz niech $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathcal{O}(2)$. Wtedy $\dim_K \mathcal{O}(n)/I < \infty$.

7 Homomorfizmy algebr

Weźmy $f_1, \dots, f_p \in \mathfrak{m}(n)$, tzn. $f_i \in \mathcal{O}(n)$ oraz $f_i(\mathbf{0}) = 0$

$$F = (f_1, \dots, f_p)$$

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

$F : (\mathbb{K}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{K}^p, \mathbf{0})$ jest kielkiem analitycznego odwzorowania.

Jeżeli $a \in \mathcal{O}(p)$ to $a \circ F \in \mathcal{O}(n)$.

Definicja. $F^*(a) := a \circ F$.

$$F^* : \mathcal{O}(p) \rightarrow \mathcal{O}(n)$$

Ćwiczenie 7.1 F^* jest homomorfizmem \mathbb{K} -algebr.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ – współrzędne w \mathbb{K}^n

$y = (y_1, \dots, y_p)$ – współrzędne w \mathbb{K}^p

$$a = a(y) = a(y_1, \dots, y_p)$$

$$F^*(a) = a \circ F = a(F(x)) = a(f_1(x), \dots, f_p(x))$$

Przykład. $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_1^2 + x_3^2) : (\mathbb{K}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{K}^2, \mathbf{0})$.

$$a = y_1^2 + \cos(y_1y_2) \in \mathcal{O}(2)$$

$$F^*(a) = (x_1x_2)^2 + \cos(x_1x_2(x_1^2 + x_3^2)) \in \mathcal{O}(3)$$

Uwaga. $F^*(y_i) = y_i \circ (f_1, \dots, f_p) = f_i$

$$c \in \mathbb{K} \quad : \quad F^*(c) = c$$

Definicja. Można zdefiniować mnożenie elementów z $\mathcal{O}(n)$ przez elementy pierścienia $\mathcal{O}(p)$:

$$a \in \mathcal{O}(p), \quad g \in \mathcal{O}(n) \quad :$$

$$a \bullet g := F^*(a)g$$

Przykład. F, a takie jak w poprzednim przykładzie.

$$g = 7 + \sin(x_2) + x_1^2x_2x_3$$

$$a \bullet g = ((x_1x_2)^2 + \cos(x_1x_2(x_1^2 + x_3^2)))(7 + \sin(x_2) + x_1^2x_2x_3) \in \mathcal{O}(3)$$

Ćwiczenie 7.2 $\mathcal{O}(n)$ ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem \bullet przez elementy pierścienia $\mathcal{O}(p)$ jest $\mathcal{O}(p)$ -modułem, tzn.:

$(\mathcal{O}(n), +)$ jest grupą abelową

Jeżeli $a, a_1, a_2 \in \mathcal{O}(p)$, $g, g_1, g_2 \in \mathcal{O}(n)$, to:

$$a \bullet (g_1 + g_2) = a \bullet g_1 + a \bullet g_2$$

$$(a_1 + a_2) \bullet g = a_1 \bullet g + a_2 \bullet g$$

$$(a_1a_2) \bullet g = a_1 \bullet (a_2 \bullet g)$$

$$1 \bullet g = g$$

Ćwiczenie 7.3 Sprawdzić, że dla $c \in \mathbb{K}$: $c \bullet g = cg$, więc

$$0 \bullet g = 0, \quad (-1) \bullet g = -g,$$

$$a \bullet (g_1 g_2) = (a \bullet g_1) g_2 = g_1 (a \bullet g_2).$$

Definicja. Jeżeli $J \subset \mathcal{O}(p)$ jest ideałem, to symbol

$$F^*(J)\mathcal{O}(n)$$

będzie oznaczał ideał w $\mathcal{O}(n)$ generowany przez $F^*(J)$.

Ćwiczenie 7.4 Jeżeli $J \subset \mathcal{O}(n)$ jest generowany przez g_1, \dots, g_s , tzn. $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$, to:

$$F^*(J)\mathcal{O}(n) = \langle F^*(g_1), \dots, F^*(g_s) \rangle .$$

Fakt 7.5 $F^*(\mathfrak{m}(p))\mathcal{O}(n) = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$.

8 Twierdzenie Przygotowawcze

Weźmy $k > 0$.

Dla $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathcal{O}(n)$ definiujemy wielomian $\tau(f)$ oraz kielek $r(f)$:

$$\tau(f) = \sum_{|\alpha| < k} a_{\alpha} x^{\alpha} ,$$

$$r(f) = f - \tau(f) ,$$

$$f = \tau(f) + r(f) .$$

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_s$ będą wszystkimi wielowskaźnikami o normie $|\alpha_1| = \dots = |\alpha_i| = \dots = |\alpha_s| = k$.

W szeregu $r(f)$ występują tylko jednomiany x^{β} takie, że $|\beta| \geq k$. Każdy taki jednomian jest podzielny przez co najmniej jeden z jednomianów x^{α_i} .

Przykład. $n = 2, k = 2$.

$$\alpha_1 = (2, 0) \quad , \quad \alpha_2 = (1, 1) \quad , \quad \alpha_3 = (0, 2)$$

$$x^{\alpha_1} = x_1^2 \quad , \quad x^{\alpha_2} = x_1 x_2 \quad , \quad x^{\alpha_3} = x_2^2$$

$$x_1^3 x_2 = x^{\alpha_1} \cdot (x_1 x_2) = x^{\alpha_2} \cdot x_1^2 .$$

γ_{α_1} – suma tych składników w $r(f)$ które dzielą się przez x^{α_1} , więc

$$\gamma_{\alpha_1} = x^{\alpha_1} \sigma_{\alpha_1}(f), \quad \sigma_{\alpha_1}(f) \in \mathcal{O}(n).$$

γ_{α_2} – suma tych składników w $r(f) - \gamma_{\alpha_1}$ które dzielą się przez x^{α_2} , więc

$$\gamma_{\alpha_2} = x^{\alpha_2} \sigma_{\alpha_2}(f), \quad \sigma_{\alpha_2}(f) \in \mathcal{O}(n).$$

γ_{α_3} – suma tych składników w $r(f) - \gamma_{\alpha_1} - \gamma_{\alpha_2}$ które dzielą się przez x^{α_3} , więc

$$\gamma_{\alpha_3} = x^{\alpha_3} \sigma_{\alpha_3}(f), \quad \sigma_{\alpha_3}(f) \in \mathcal{O}(n).$$

⋮

$$r(f) = \gamma_{\alpha_1} + \cdots + \gamma_{\alpha_s}$$

$$r(f) = x^{\alpha_1} \sigma_{\alpha_1}(f) + \cdots + x^{\alpha_s} \sigma_{\alpha_s}(f)$$

Przykład. $n = 2, k = 2$

$$f = 4 - x_1 + 2x_2 - x_1x_2 + x_1^3 + 5x_1^2x_2^2 - x_2^7 + \cdots$$

$$\tau(f) = 4 - x_1 + 2x_2$$

$$x^{\alpha_1} = x_1^2, \quad x^{\alpha_2} = x_1x_2, \quad x^{\alpha_3} = x_2^2$$

$$\gamma_{\alpha_1} = x_1^3 + 5x_1^2x_2^2 + \cdots = x_1^2(x_1 + 5x_2^2 + \cdots) = x_1^2\sigma_{\alpha_1}(f)$$

$$\gamma_{\alpha_2} = -x_1x_2 + \cdots = x_1x_2(-1 + \cdots) = x_1x_2\sigma_{\alpha_2}(f)$$

$$\gamma_{\alpha_3} = -x_2^7 + \cdots = x_2^2(-x_2^5 + \cdots) = x_2^2\sigma_{\alpha_3}(f).$$

Dla $f \in \mathcal{O}(n)$ otrzymujemy jednoznaczne przedstawienie:

$$f = \tau(f) + \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \sigma_\alpha(f),$$

gdzie $\sigma_\alpha(f) \in \mathcal{O}(n)$.

Weźmy $f_1, \dots, f_p \in \mathbf{m}(n)$, $F = (f_1, \dots, f_p)$,

$$F^* : \mathcal{O}(p) \rightarrow \mathcal{O}(n)$$

Definicja. $\mathcal{O}(n)$ jest skończenie generowanym $\mathcal{O}(p)$ -modułem, jeżeli istnieją $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{O}(n)$ takie, że

$$\forall g \in \mathcal{O}(n) \quad \exists a_1, \dots, a_s \in \mathcal{O}(p) \quad :$$

$$g = a_1 \bullet g_1 + \dots + a_s \bullet g_s = F^*(a_1)g_1 + \dots + F^*(a_s)g_s$$

Twierdzenie 8.1 (Tw.Przygotowawcze - I) $\mathcal{O}(n)$ jest skończenie generowanym $\mathcal{O}(p)$ -modułem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\dim_K \mathcal{O}(n)/F^*(\mathfrak{m}(p))\mathcal{O}(n) = \dim_K \mathcal{O}(n)/\langle f_1, \dots, f_p \rangle < \infty .$$

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest symetryczna, jeżeli $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$.

$\theta_1 = x_1 + x_2$, $\theta_2 = x_1x_2$ - elementarne wielomiany symetryczne

Twierdzenie 8.2 Jeżeli $w = w(x_1, x_2)$ jest symetrycznym wielomianem, to istnieje wielomian $W = W(y_1, y_2)$ taki, że $w = W(\theta_1, \theta_2)$, czyli

$$w(x_1, x_2) = W(x_1 + x_2, x_1x_2) .$$

Ćwiczenie 8.3 (Tw. Glaesera) Jeżeli $g = g(x_1, x_2) \in \mathcal{O}(2)$ jest kietkiem symetrycznym, to istnieje kietek $G = G(y_1, y_2) \in \mathcal{O}(2)$ taki, że

$$g(x_1, x_2) = G(\theta_1, \theta_2) = G(x_1 + x_2, x_1x_2)$$

Twierdzenie 8.4 (Lemat Nakayamy) Jeżeli (A, \mathfrak{m}) jest pierścieniem lokalnym, P jest skończenie generowanym A -modułami, Q jest A -modułem, oraz $P \subset Q + \mathfrak{m} \cdot P$, to $P \subset Q$.

Ćwiczenie 8.5 Jeżeli $I \subset \mathcal{O}(n)$ jest takim ideałem, że $I + \mathfrak{m}^k \subset I + \mathfrak{m}^{k+1}$, to $\mathfrak{m}^k \subset I$.

$I \subset \mathcal{O}(n)$ - ideał

$\mathcal{O}(n)/I$ jest $\mathcal{O}(n)$ -modułem, więc możemy zdefiniować mnożenie elementów z $\mathcal{O}(n)/I$ przez elementy pierścienia $\mathcal{O}(p)$:

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{O}(p) , \quad [g] \in \mathcal{O}(n)/I \quad (g \in \mathcal{O}(n)) \\ a \bullet [g] := [a \bullet g] = [F^*(a)g] \end{aligned}$$

Ćwiczenie 8.6 *Mnożenie jest dobrze zdefiniowane.*

$\mathcal{O}(n)/I$, z tak zdefiniowanym mnożeniem, jest $\mathcal{O}(p)$ -modułem.

Twierdzenie 8.7 (Tw. Przygotowawcze - II) $\mathcal{O}(n)/I$ jest skończenie generowanym $\mathcal{O}(p)$ modułem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\dim_K \mathcal{O}(n)/(F^*(\mathfrak{m}(p))\mathcal{O}(n) + I) =$$

$$\dim_K \mathcal{O}(n)/(\langle f_1, \dots, f_p \rangle + I) < \infty .$$

Fakt 8.8 $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{O}(n)$ generują $\mathcal{O}(n)/I$ jako $\mathcal{O}(p)$ -moduł wtedy i tylko wtedy, gdy warstwy $[g_1], \dots, [g_s]$ w $\mathcal{O}(n)/(F^*(\mathfrak{m}(p))\mathcal{O}(n) + I)$ rozpinają tę przestrzeń wektorową.

9 Twierdzenie Weierstrassa

Definicja. $f \in \mathcal{O}(n)$ jest k -regularny na osi x_n , jeżeli

$$f(\mathbf{0}) = \dots = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_n^{k-1}}(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{oraz}$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}(\mathbf{0}) \neq 0, \quad \text{tzn.} \quad \frac{d^k}{dx_n^k} f(0, \dots, 0, x_n)|_{x_n=0} \neq 0$$

Ćwiczenie 9.1 *Wtedy istnieje $\tilde{f} \in \mathcal{O}(1)$, $\tilde{f}(0) \neq 0$, taki, że $f(0, \dots, 0, x_n) = x_n^k \tilde{f}(x_n)$.*

Dla $x = (x_1, \dots, x_n)$ będziemy oznaczać

$$x' = (x_1, \dots, x_{n-1}), \quad x = (x', x_n)$$

Twierdzenie 9.2 (Tw. Weierstrassa o dzieleniu - I) *Założmy, że $f \in \mathcal{O}(n)$ jest k -regularny na osi x_n . Wtedy*

$$\forall g \in \mathcal{O}(n) \quad \exists a_0(x'), \dots, a_{k-1}(x') \in \mathcal{O}(n-1) \quad \text{oraz} \quad Q \in \mathcal{O}(n) \quad :$$

$$g = f \cdot Q + a_{k-1}(x')x_n^{k-1} + \dots + a_1(x')x_n + a_0(x') .$$

Ćwiczenie 9.3 *Kielki a_0, \dots, a_{k-1}, Q są jednoznacznie wyznaczone.*

Twierdzenie 9.4 (Tw. Weierstrassa o dzieleniu - II) Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(n)$ jest k -regularny na osi x_n . Wtedy

$$\exists a_0(x'), \dots, a_{k-1}(x') \in \mathbf{m}(n-1)$$

$\exists Q \in \mathcal{O}(n)$, $Q(\mathbf{0}) \neq 0$, tzn. Q jest odwracalny :

$$f = Q \cdot (x_n^k + a_{k-1}(x')x_n^{k-1} + \dots + a_0(x')) = Q \cdot R,$$

więc $R \in \mathcal{O}(n-1)[x_n]$.

Ćwiczenie 9.5 Q oraz R są jednoznacznie wyznaczone.

Definicja. Jeżeli $R = x_n^k + a_{k-1}(x')x_n^{k-1} + \dots + a_1(x')x_n + a_0(x')$ oraz $a_0(\mathbf{0}) = \dots = a_{k-1}(\mathbf{0}) = 0$, tzn. $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbf{m}(n-1)$, to R nazywamy wielomianem wyróżnionym.

10 Własności pierścienia $\mathcal{O}(n)$

Ćwiczenie 10.1 $\mathcal{O}(1)$ jest pierścieniem noetherowskim, tzn. każdy jego ideał jest skończenie generowany

Ćwiczenie 10.2 Niech $0 \neq f \in \mathcal{O}(n)$. Istnieje k : $f \in \mathbf{m}^k$, $f \notin \mathbf{m}^{k+1}$. Po dokonaniu liniowej zamiany układu współrzędnych f jest k -regularny na osi x_n .

Twierdzenie 10.3 (Lokalna wersja Tw. Hilberta o Bazie) $\mathcal{O}(n)$ jest pierścieniem noetherowskim.

Ćwiczenie 10.4 Pierścień $\mathcal{O}(1)$ jest dziedziną całkowitości, tzn. nie posiada dzielników zera.

Twierdzenie 10.5 Pierścień $\mathcal{O}(n)$ jest dziedziną całkowitości, tzn. nie posiada dzielników zera.

Fakt 10.6 Niech $P \in \mathcal{O}(n-1)[x_n]$ będzie wielomianem wyróżnionym, nierozkładalnym w $\mathcal{O}(n-1)[x_n]$.

Wtedy P jest elementem pierwszym w $\mathcal{O}(n)$.

Ćwiczenie 10.7 W $\mathcal{O}(n)$ każdy element rozkładalny jest iloczynem elementów nierozkładalnych. Wskazówka:

- Jeżeli $f \in \mathbf{m}(n)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{0}) \neq 0$, to f jest nierozkładalny.
- Jeżeli $f(0, \dots, 0, x_n) = a(x_n)x_n^k$, $a(0) \neq 0$, to f jest iloczynem co najwyżej k elementów nierozkładalnych.

Ćwiczenie 10.8 $\mathcal{O}(1)$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

Twierdzenie 10.9 Pierścień $\mathcal{O}(n)$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

Ćwiczenie 10.10 Jeżeli $P \in \mathcal{O}(n-1)[x_n]$ jest wielomianem wyróżnionym, to istnieją nierozkładalne wielomiany wyróżnione $P_1, \dots, P_s \in \mathcal{O}(n-1)[x_n]$ takie, że

$$P = P_1 \cdots P_s .$$

Wniosek 10.11 Niech $\overline{\mathcal{O}}(n-1)$ oznacza ciało ułamków pierścienia $\mathcal{O}(n-1)$.

Jeżeli element $P \in \mathcal{O}(n-1)[x_n]$ jest nierozkładalny w $\mathcal{O}(n-1)[x_n]$, to P jest nierozkładalny w $\overline{\mathcal{O}}(n-1)[x_n]$, lub $P \in \mathcal{O}(n-1)$ i jest nierozkładalny w $\mathcal{O}(n-1)$.

Więc jeżeli P jest rozkładalny w $\overline{\mathcal{O}}(n-1)[x_n]$, to jest rozkładalny w $\mathcal{O}(n-1)[x_n]$.

11 Wyróżnik

Dla wielomianu unormowanego $t_0 + t_1x + \cdots + t_{k-1}x^{k-1} + x^k$ o współczynnikach t_0, \dots, t_{k-1} można zdefiniować wyróżnik $\Delta_k(t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_k]$.

Jeżeli A jest pierścieniem, $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k \in A[x]$ to $\Delta = \Delta_k(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in A$ nazywamy wyróżnikiem wielomianu $P(x)$.

Własności wyróżnika:

Założmy, że A jest pierścieniem zawierającym liczby wymierne oraz zawartym w pewnym ciele L . Wtedy:

- $\Delta = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany P oraz P' mają wspólny dzielnik w $L[x]$.

Więc jeżeli P jest nierozkładalny, to $\Delta \neq 0$.

- Jeżeli $\xi_1, \dots, \xi_k \in L$ oraz $P(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_k)$, wówczas

$$\Delta = \pm \prod_{i \neq j} (\xi_i - \xi_j) = \pm \prod_{i=1}^k P'(\xi_i).$$

W tym przypadku $\Delta \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy pierwiastki P są parami różne i jednokrotne.

- Jeżeli $\Delta \neq 0$ oraz $P = P_1 \cdots P_s$ jest rozkładem na czynniki nierozkładalne, unormowane, to $P_i \neq P_j$ dla $i \neq j$.

Weźmy wielomian wyróżniony $P \in \mathcal{O}(n-1)[x_n]$. Można go przedstawić jako iloczyn parami nie stowarzyszonych elementów nierozkładalnych

$$P = P_1^{m_1} \cdots P_s^{m_s} \quad (m_i \geq 1)$$

z których każdy też jest wielomianem wyróżnionym.

Z Wniosku 10.11, każdy P_i jest nierozkładalny w $\overline{\mathcal{O}}(n-1)[x_n]$. Ponadto P_i oraz P_j , dla $i \neq j$, nie są stowarzyszone w $\overline{\mathcal{O}}(n-1)[x_n]$.

Jeżeli wyróżnik Δ wielomianu $P_1 \cdots P_s$ jest równy zero, to $P_1 \cdots P_s$ oraz jego pochodna

$$(P_1 \cdots P_s)' = P_1' P_2 \cdots P_s + P_1 P_2' \cdots P_s + \dots + P_1 P_2 \cdots P_s'$$

mają wspólny dzielnik w $\overline{\mathcal{O}}(n-1)[x_n]$, który musi być iloczynem pewnych P_i .

Możemy więc założyć, że wspólny dzielnik zawiera P_1 jako jeden ze składników

$$\begin{aligned} P_1 \mid (P_1 \cdots P_s)' &\Rightarrow P_1 \mid P_1' P_2 \cdots P_s \\ &\Rightarrow P_1 \mid P_1' \text{ w } \overline{\mathcal{O}}(n-1)[x_n], \end{aligned}$$

co nie jest możliwe, bo $\deg P_1' < \deg P_1$.

Wniosek 11.1 *Zbiór zer wielomianu wyróżnionego $P = P_1^{m_1} \cdots P_s^{m_s}$ jest taki sam jak zbiór zer wielomianu $P_1 \cdots P_s$ oraz wyróżnik wielomianu $P_1 \cdots P_s$ jest niezerowym elementem $\mathcal{O}(n-1)$.*

Niech $P \in \mathcal{O}(n-1)[x_n]$ będzie wielomianem wyróżnionym stopnia k , niech $\Delta \in \mathcal{O}(n-1)$ będzie jego wyróżnikiem.

Założmy, że $x' \in \mathbb{K}^{n-1}$ leży dostatecznie blisko początku układu współrzędnych. Wtedy $\Delta(x') \in \mathbb{K}$ jest równy wyróżnikowi wielomianu jednej zmiennej $P(x', x_n) \in \mathbb{K}[x_n]$.

Załóżmy, że $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{C}$ są pierwiastkami $P(x', \xi) = 0$. Więc

$$P(x', x_n) = (x_n - \xi_1) \cdots (x_n - \xi_k) .$$

Ponadto $\Delta(x') = \pm \prod_{i \neq j} (\xi_i - \xi_j) = \pm \prod_{i=1}^k P'(\xi_i)$.

Więc $\Delta(x') \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy pierwiastki zespolone wielomianu $P(x', x_n) = 0$ są parami różne i jednokrotne.

Fakt 11.2 *Jeżeli $P(x', x_n) = x_n^k + a_{k-1}(x')x_n^{k-1} + \cdots + a_0(x')$ oraz dla pewnego $r > 0$ mamy*

$$|a_{k-1}(x')| \leq r, \quad |a_{k-2}(x')| \leq r^2, \dots, |a_0(x')| \leq r^k$$

to $|\xi_i| \leq 2r$ dla każdego z pierwiastków zespolonych ξ_1, \dots, ξ_k spełniających równanie $P(x', \xi_i) = 0$.

Wniosek 11.3 *Jeżeli $P(x', x_n) \in \mathcal{O}(n-1)[x_n]$ jest wielomianem wyróżnionym, to*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x'| < \delta \text{ oraz } P(x', \xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\xi| < \epsilon .$$

Wniosek 11.4 *Jeżeli $x' \rightarrow \mathbf{0}$ oraz $\xi_1(x'), \dots, \xi_k(x')$ są zespolonymi pierwiastkami $P(x', x_n) = 0$, to*

$$\xi_1(x') \rightarrow 0, \quad \dots, \quad \xi_k(x') \rightarrow 0 .$$

Wniosek 11.5 *Jeżeli $\Delta(x'_0) \neq 0$, to dla każdego $1 \leq i \leq k$*

$$P'(x'_0, \xi_i(x'_0)) = \frac{dP}{dx_n}(x'_0, \xi_i(x'_0)) \neq 0 .$$

Z Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej można znaleźć funkcje (analityczne) $\xi_i(x')$ o wartościach zespolonych zdefiniowane w pewnym otwartym otoczeniu punktu x'_0 w \mathbb{C}^{k-1} takie, że $P(x', \xi_i(x')) \equiv 0$.

Wykresy funkcji $\xi_1(x'), \dots, \xi_k(x')$, dla x' należących do tego otoczenia, nie przecinają się.

Twierdzenie 11.6 *Załóżmy, że $P(x_1, x_2) \in \mathcal{O}_R(1)[x_2]$ jest rzeczywistym wielomianem wyróżnionym stopnia k .*

Wtedy istnieje $\delta_0 > 0$, oraz istnieje skończenie wiele rzeczywistych funkcji analitycznych

$$\xi_1(x_1) < \dots < \xi_p(x_1) , \quad \text{gdzie } x_1 \in (-\delta_0, 0), \quad 0 \leq p \leq k ,$$

$\xi_{p+1}(x_1) < \dots < \xi_s(x_1)$, gdzie $x_1 \in (0, \delta_0)$, $0 \leq s \leq k$,
 takich, że dla każdej z tych funkcji $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \xi_i(x_1) = 0$, oraz

$$\{(x_1, x_2) \in (-\delta_0, \delta_0) \times \mathbb{R} \mid P(x_1, x_2) = 0\} = \\ \{(0, 0)\} \cup \bigcup_i \text{graph } \xi_i .$$

Definicja. Wykresy $\text{graph } \xi_i$ będziemy nazywać gałęziami w $P^{-1}(0)$ wychodzącymi z początku układu współrzędnych $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie 11.7 Liczba gałęzi jest zawsze parzysta. (Może być równa zero.)

12 Analityczne Łuki

Ćwiczenie 12.1 Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją analityczną

Wtedy albo f jest stała na (a, b) , albo dla każdego $x \in (a, b)$ istnieje $\epsilon > 0$ taki, że

- $f : [x, x + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różnowartościowa
- dla $t \in (x, x + \epsilon)$: $f'(t) \neq 0$
- dla $t \in (x, x + \epsilon)$ wartości $f(t)$ mają stały znak.

Niech $p(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : (-\epsilon_0, +\epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem analitycznym takim, że $p(0) = \mathbf{0}$ oraz $p(t)$ nie jest odwzorowaniem stałym.

Fakt 12.2 Istnieje $0 < \epsilon < \epsilon_0$ takie, że $p : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest różnowartościowe.

Fakt 12.3 Istnieje $0 < \epsilon < \epsilon_0$ takie, że

$$\forall 0 < t < \epsilon : p'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \neq \mathbf{0} .$$

Wniosek 12.4 Istnieje $0 < \epsilon < \epsilon_0$ takie, że $p((0, \epsilon)) \subset \mathbb{R}^n$ jest gładką krzywą bez samoprzecięć, czyli jest gładką 1-wymiarową rozmaitością.

Definicja. Zbiór $A = p((0, \epsilon))$ nazywamy łukiem analitycznym.

Oczywiście: domknięcie łuku \bar{A} jest homeomorficzne z odcinkiem $[0, 1]$ oraz $\mathbf{0} \in \bar{A}$.

Ćwiczenie 12.5 Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest łukiem analitycznym oraz $f \in \mathcal{O}(n)$, to istnieje $r > 0$ takie, że $f(x)$ ma stały znak dla $x \in A \cap B(\mathbf{0}, r)$.

Definicja. Jeżeli $a = p(t) \in A$, to każdy wektor współliniowy z $p'(t)$ nazywamy wektorem stycznym do łuku w punkcie a , zaś zadaną parametrycznie prostą

$$s \mapsto a + p'(t)s$$

nazywamy prostą styczną do łuku w punkcie a .

Niech $\alpha(a)$ będzie kątem pomiędzy prostą $\overline{\mathbf{0}a}$ oraz prostą styczną do łuku w punkcie a .

Twierdzenie 12.6 Jeżeli $a \in A$ oraz $a \rightarrow \mathbf{0}$, to $\alpha(a) \rightarrow 0$.

Ćwiczenie 12.7 Czy prawdziwe jest zdanie: Istnieje $\delta > 0$ takie, że kąt $\alpha(a)$ ma stały znak (" $<$ ", " $=$ ", " $>$ ") dla takich $a \in A$, że $0 < |a| < \delta$.

Ćwiczenie 12.8 Niech $B = \{(t, t^5 \sin \frac{1}{t}) \mid t \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Czy B spełnia tezę poprzedniego Twierdzenia?

Czy istnieje taki łuk analityczny, że $B = A$ w pewnym otwartym otoczeniu początku układu?

Ćwiczenie 12.9 Niech A_1, A_2 będą analitycznymi łukami. Wtedy istnieje takie $r > 0$, że

$$A_1 \cap B(\mathbf{0}, r) = A_2 \cap B(\mathbf{0}, r) \quad \text{lub} \quad A_1 \cap A_2 \cap B(\mathbf{0}, r) = \emptyset.$$

Definicja. Zbiór $S \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy otwartym ostrzem, jeżeli

$S = B(\mathbf{0}, r) \setminus \{\mathbf{0}\}$, lub jeżeli

istnieją łuki analityczne A_1, A_2 oraz otwarte koło $B(\mathbf{0}, r)$ takie, że $A_1 \cap A_2 \cap B(\mathbf{0}, r) = \emptyset$, oraz S jest składową zbioru $B(\mathbf{0}, r) \setminus (A_1 \cup A_2)$.

13 Twierdzenie Puiseux

G – grupa skończona, $s = |G|$, to dla dowolnego $g \in G$, $g^s = \underbrace{g \cdots g}_s = 1$.

Grupa permutacji zbioru k elementowego ma $k!$ elementów, więc dla dowolnej permutacji

$$\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\} ,$$

$\sigma^{k!}$ jest permutacją trywialną.

Wniosek z zespolonej wersji Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej:

Jeżeli $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem jednospójnym,

$h = h(t, z) : U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest zespoloną funkcją analityczną,

dla dowolnego $(t, z) \in h^{-1}(0)$: $\frac{\partial h}{\partial z}(t, z) \neq 0$,

oraz dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ zbiór $h^{-1}(0) \cap K \times \mathbb{C}$ jest ograniczony,

to istnieje skończona rodzina funkcji analitycznych $\xi_\alpha : U \rightarrow \mathbb{C}$ o rozłącznych wykresach takich, że

$$\{(t, z) \in U \times \mathbb{C} \mid h(t, z) = 0\} = \bigcup_{\alpha} \text{graph } \xi_{\alpha} .$$

Ćwiczenie 13.1 *Jeżeli $H(t, z) = a_0(t) + a_1(t)z + \cdots + a_{k-1}(t)z^{k-1} + z^k$ jest takim zespolonym wielomianem unormowanym, że jego współczynniki $a_i \in \mathcal{O}_C(U)$ dla pewnego jednospójnego zbioru $U \subset \mathbb{C}$, oraz jego wyróżnik $\Delta(t) \in \mathcal{O}_C(U)$ nie znika w żadnym punkcie zbioru U , to istnieją zespolone funkcje analityczne $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{O}_C(U)$ o rozłącznych wykresach takie, że*

$$H(t, z) = (z - \xi_1(t)) \cdots (z - \xi_k(t)) .$$

Niech $P(z_1, z_2) \in \mathcal{O}_C(1)[z_2]$ będzie zespolonym wielomianem wyróżnionym stopnia $k \geq 2$, niech $\Delta(z_1)$ będzie jego wyróżnikiem. Wtedy $P(0, z_2) = z_2^k$ posiada pierwiastek wielokrotny, więc $\Delta(0) = 0$. Dlatego nie można użyć poprzedniego faktu, aby rozłożyć P na iloczyn prostszych czynników.

Twierdzenie 13.2 (Tw. Puiseux) Niech $P(z_1, z_2) \in \mathcal{O}_C(1)[z_2]$ będzie zespolonym wielomianem wyróżnionym, to istnieją $b_1(z_1), \dots, b_k(z_1) \in \mathcal{O}_C(1)$ takie, że

$$P(z_1^{k!}, z_2) = (z_2 - b_1(z_1)) \cdots (z_2 - b_k(z_1)) .$$

Ponadto, $b_1(0) = 0, \dots, b_k(0) = 0$.

Przykład. $P = z_2^3 - z_1^2$, $k = 3$, $k! = 6$.

$$P(z_1^6, z_2) = z_2^3 - z_1^{12} = (z_2 - z_1^4) \left(z_2 + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} z_1^4 \right) \left(z_2 + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_1^4 \right) .$$

W zbiorze $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^3 - x_1^2 = 0\}$ jest jedna gałąź w lewej półpłaszczyźnie, i jedna gałąź w prawej półpłaszczyźnie.

Kolejne twierdzenie jest prostą wersją Lematu o Wyborze Krzywej 17.7.

Twierdzenie 13.3 Niech $P \in \mathcal{O}_R(1)[x_2]$ będzie rzeczywistym wielomianem wyróżnionym.

Jeżeli istnieje ciąg punktów taki, że $(p_n) \subset P^{-1}(0) \setminus \{\mathbf{0}\}$ oraz $\lim p_n = \mathbf{0}$, to istnieje krzywa $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ taka, że

(i) funkcje $x_1(t), x_2(t)$ są rzeczywiste, analityczne na pewnym odcinku $(-\delta, +\delta)$,

(ii) $\gamma(t) \in P^{-1}(0) \setminus \{\mathbf{0}\}$ dla $0 < t < \delta$,

(iii) $\gamma(0) = \mathbf{0}$.

Wniosek 13.4 Jeżeli $P \in \mathcal{O}_R(1)[x_2]$ jest niezerowym wielomianem wyróżnionym, to w pewnym otoczeniu początku układu zbiór $P^{-1}(0)$ jest sumą skończonej rodziny łuków analitycznych, oraz początku układu $\{\mathbf{0}\}$.

Przykład. Jeżeli $P = x_1^2 + x_2^2$, to $P^{-1}(0) = \{\mathbf{0}\}$.

Wniosek 13.5 Jeżeli $P \in \mathcal{O}_R(1)[x_2]$ jest niezerowym wielomianem wyróżnionym, to w pewnym otoczeniu początku układu zbiór $\{P > 0\}$ oraz $\{P < 0\}$ jest skończoną sumą otwartych ostrzy.

14 Lemat Thoma

Symbol ”*” będzie oznaczał jedną z relacji ”<”, ”>”, ”=”.

Twierdzenie 14.1 (Lemat Thoma) *Niech $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem jednej zmiennej stopnia k . Zbiór*

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) *_0 0, P'(x) *_1 0, \dots, P^{(k)}(x) *_k 0\}$$

jest zbiorem pustym, lub punktem, lub otwartym odcinkiem, lub otwartą półprostą, lub całą prostą \mathbb{R} .

Wniosek 14.2 *Niech*

$$P = a_0(x') + a_1(x')x_n + \dots + a_k(x')x_n^k \in \mathcal{O}_R(n-1)[x_n] .$$

Niech

$$T = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid P(x) *_0 0, \frac{dP}{dx_n}(x) *_1 0, \dots, \frac{d^k P}{dx_n^k}(x) *_k 0\} ,$$

$$T(x') = T \cap \{x'\} \times \mathbb{R} .$$

Jeżeli x' leży dostatecznie blisko $\mathbf{0}$ w \mathbb{R}^{n-1} , to $T(x')$ jest zbiorem pustym, lub punktem, lub otwartym odcinkiem, lub otwartą półprostą, lub całą prostą \mathbb{R} .

Fakt 14.3 *Niech $P \in \mathcal{O}_R(1)[x_2]$ będzie niezerowym wielomianem wyróżnionym stopnia k .*

Jeżeli $A \subset P^{-1}(0)$ jest łukiem analitycznym, to istnieją relacje $, *_1, \dots, *_k$ takie, że*

$$A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 *_0 0, P(x) = 0, \frac{dP}{dx_2}(x) *_1 0, \dots, \frac{d^k P}{dx_2^k}(x) *_k 0\}$$

w pewnym otwartym otoczeniu początku układu.

Ćwiczenie 14.4 *Niech $P \in \mathcal{O}_R(1)[x_2]$ będzie niezerowym wielomianem wyróżnionym stopnia k . Niech T_j będzie rodziną wszystkich zbiorów postaci*

$$T_j = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 *_0 0, P(x) *_0 0, \frac{dP}{dx_2}(x) *_1 0, \dots, \frac{d^k P}{dx_2^k}(x) *_k 0\}$$

Zbiory T_j są parami rozłączne, $\bigcup_j T_j = \mathbb{R}^2$, oraz w pewnym otwartym otoczeniu początku układu każdy niepusty T_j jest: początkiem układu, lub łukiem analitycznym, lub otwartym ostrzem; więc w szczególności jest spójny.

Fakt 14.5 Niech $P \in \mathcal{O}_R(1)[x_2]$ będzie niezerowym wielomianem wyróżnionym.

Każda składowa jednego ze zbiorów:

$$P^{-1}(0) \setminus \{\mathbf{0}\}, \{P(x) > 0\}, \{P(x) < 0\}$$

przeciętego z kołem $B(\mathbf{0}, r)$ o małym promieniu jest sumą skończonej ilości zbiorów należących do rodziny T_j .

15 Nierówność Łojasiewicza

Fakt 15.1 Niech $P = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k \in \mathbb{R}[x]$, niech Δ będzie jego wyróżnikiem, oraz niech $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\}$ będzie zbiorem rzeczywistych pierwiastków wielomianu P .

Założmy, że wszystkie rzeczywiste i zespolone pierwiastki mają normę ograniczoną przez $\frac{1}{2}$.

Dla $x \in \mathbb{R}$ niech $d(x, Z)$ będzie odległością punktu x od zbioru Z . Założmy, że $d(x, Z) \leq 1$. (Jeżeli $Z = \emptyset$, to przyjmujemy $d(x, Z) = 1$.)

Wtedy

$$|P(x)| \geq 2^{-k} d(x, Z)^k |\Delta|,$$

Fakt 15.2 Niech $f \in \mathcal{O}(n)$ będzie niezerowym kielkiem. Jeżeli f jest k -regularny na osi x_n , to istnieje wielomian wyróżniony $P \in \mathcal{O}(n-1)[x_n]$, o niezerowym wyróżniku, oraz stałe dodatnie α_1, C_1 takie, że

(i) $f^{-1}(0) = P^{-1}(0)$ w pobliżu początku układu,

(ii) $|f(x)| \geq C_1 |P(x)|^{\alpha_1}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$ leżących dostatecznie blisko początku układu.

Lemat 15.3 Niech $P \in \mathcal{O}(1)[x_2]$ będzie wielomianem wyróżnionym o wyróżniku $\Delta(x_1)$ będącym niezerowym kielkiem w $\mathcal{O}(1)$.

Wtedy istnieją stałe dodatnie α_2, β, C_2 takie, że

$$|P(x)| \geq C_2 d(x, P^{-1}(0))^{\alpha_2} |x_1|^\beta,$$

dla $x = (x_1, x_2)$ leżących dostatecznie blisko początku układu.

Twierdzenie 15.4 (Nierówność Łojasiewicza) Niech $f \in \mathcal{O}(n)$ będzie niezerowym kielkiem.

Wtedy istnieją stałe dodatnie α, C takie, że

$$|f(x)| \geq C d(x, f^{-1}(0))^\alpha$$

dla punktów $x \in \mathbb{R}^n$ leżących dostatecznie blisko początku układu.

16 Zbiory semi-algebraiczne

Definicja. Zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ jest *semi-algebraiczny*, gdy istnieją wielomiany $f_{ij}(x)$ oraz $g_{ij}(x)$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, należące do $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ takie, że

$$X = \bigcup_{i=1}^p \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_{ij}(x) = 0, g_{ij}(x) > 0, j = 1, \dots, q\}$$

Ćwiczenie 16.1 Niech $f(x), g(x)$ będą wielomianami. Czy zbiory

- $\{x \mid f(x) = 0\}$
- $\{x \mid g(x) > 0\}$
- $\{x \mid g(x) \geq 0\}$
- $\{x \mid g(x) < 0\}$
- $\{x \mid f(x) \neq 0\}$
- $\{x \mid f(x) = 0, g(x) \geq 0\}$

są zbiorami semi-algebraicznymi?

Twierdzenie 16.2 (Tarski, Seidenberg) Niech $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie rzutem na pierwszą współrzędną: $\pi(x, y) = x$.

Jeżeli $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ jest semi-algebraiczny, to $\pi(Z) \subset \mathbb{R}^n$ jest też semi-algebraiczny.

Ćwiczenie 16.3 Jeżeli $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}[y_1, \dots, y_m]$ są wielomianami,

$$H = (h_1, \dots, h_n) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

oraz $Y \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem semi-algebraicznym, to $H(Y) \subset \mathbb{R}^n$ jest też semi-algebraiczny.

17 Zbiory semi-analityczne

Definicja. Zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ jest *semi-analityczny*, jeżeli dla każdego punktu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje otwarte otoczenie U punktu x_0 oraz istnieją

funkcje analityczne $f_{ij}(x), g_{ij}(x) \in \mathcal{O}_R(U)$ oraz $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$, takie, że

$$X \cap U = \bigcup_{i=1}^p \{x \in U \mid f_{ij}(x) = 0, g_{ij}(x) > 0, j = 1, \dots, q\}$$

Oczywiście każdy zbiór semi-algebraiczny jest też semi-analityczny, oraz każdy zbiór analityczny jest też semi-analityczny.

Ćwiczenie 17.1 *Jeżeli X, X_1, \dots, X_s są semi-algebraiczne (odp. semi-analityczne), to zbiory*

$$X_1 \cup \dots \cup X_s,$$

$$X_1 \cap \dots \cap X_s,$$

$$\mathbb{R}^n \setminus X$$

są semi-algebraiczne (odp. semi-analityczne).

Przykład. (Osgood) Niech odwzorowanie analityczne $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem

$$\phi(x, y) = (x, xy, xy \exp y).$$

Koło domknięte $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ jest zbiorem semi-analitycznym, ale zbiór $\phi(Y) \subset \mathbb{R}^3$ nie jest semi-analityczny. (Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga nie jest spełnione w klasie zbiorów semi-analitycznych.)

Twierdzenie 17.2 *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem semi-analitycznym.*

Wtedy

(i) każda składowa X jest zbiorem semi-analitycznym,

(ii) jeżeli X jest ograniczony, to X posiada skończenie wiele składowych.

Twierdzenie 17.3 *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym (odp. dowolnym) zbiorem semi-analitycznym.*

Wtedy istnieje skończona (odp. lokalnie skończona) rodzina parami rozłącznych zbiorów semi-analitycznych M_i takich, że

$$X = \bigcup_i M_i,$$

oraz każdy zbiór M_i jest spójną rozmaitością klasy C^∞ .

Definicja. Wymiarem $\dim(X)$ zbioru X nazywamy:

$$\dim(X) = \max_i \dim(M_i) .$$

Można sprawdzić, że definicja wymiaru nie zależy od wyboru podziału X na rozmaitości M_i .

Twierdzenie 17.4 *Niech X będzie zbiorem semi-algebraicznym (odp. semi-analitycznym).*

Wtedy domknięcie \overline{X} jest zbiorem semi-algebraicznym (odp. semi-analitycznym).

Jeżeli $\dim(X) \leq k$, to $\dim(\overline{X} \setminus X) < k$.

Ćwiczenie 17.5 *Czy zbiór $A = \{(t, \sin \frac{1}{t}) \mid t > 0\}$ jest semi-analityczny?*

Twierdzenie 17.6 (O uniformizacji) *Niech X będzie zbiorem analitycznym.*

Wtedy istnieje analityczna rozmaitość M , $\dim(X) = \dim(M)$, oraz właściwa analityczna surjekcja $\varphi : M \rightarrow X$.

Twierdzenie 17.7 (Lemat o wyborze krzywej) *Założmy, że X jest semi-analityczny oraz $p_0 \in \overline{X}$.*

Wtedy istnieją funkcje analityczne

$$x_i(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

takie, że $p(0) = p_0$, oraz $p((0, \epsilon]) \subset X$.

Twierdzenie 17.8 (Nierówność Łojasiewicza) *Niech $f \in \mathcal{O}_R(U)$, oraz niech $K \subset U$ będzie zwarty.*

Istnieją stałe $\alpha > 0, C > 0$ takie, że

$$\forall x \in K : |f(x)| \geq C d(x, f^{-1}(0))^\alpha .$$

Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie rozmaitością klasy C^∞ .
 Dla punktów $p \in \mathbb{R}^n$ oraz $x \in M$, $p \neq x$, niech $\alpha(p, x)$ oznacza kąt pomiędzy prostą łączącą p, x oraz przestrzenią styczną do rozmaitości M w punkcie x .

Definicja. Niech $p \in \overline{M} \setminus M$. Powiemy, że w punkcie p spełniony jest warunek (a) Whitney'a, jeżeli dla każdego ciągu $(x_n) \subset M$ takiego, że $p = \lim x_n$:

$$\alpha(p, x_n) \rightarrow 0 .$$

Twierdzenie 17.9 (Warunek (a) Whitney'a) *Założmy, że X jest ograniczonym (odp. dowolnym) zbiorem semi-analitycznym.*

Wtedy istnieje skończona (odp. lokalnie skończona) rodzina parami rozłącznych zbiorów semi-analitycznych M_i takich, że

(i) $X = \bigcup_i M_i$,

(ii) każdy ze zbiorów M_i jest rozmaitością klasy C^∞ ,

(iii) w każdym punkcie $p \in \overline{M_i} \setminus M_i$ spełniony jest warunek (a) Whitney'a.

Twierdzenie 17.10 *Jeżeli X jest takim zbiorem semi-analitycznym, że zbiór $X \setminus \{p\}$ jest rozmaitością klasy C^∞ , to dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset X \setminus \{p\}$:*

$$\lim x_n = p \quad \Rightarrow \quad \lim \alpha(p, x_n) = 0 .$$