

WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI
I INFORMATYKI
UNIwersytetu Gdańskiego

**Minimalne zbiory generatorów grup
klas odwzorowań**

Michał Stukow

ROZPRAWA DOKTORSKA NAPISANA
W ZAKŁADZIE ALGEBRY INSTYTUTU MATEMATYKI
POD KIERUNKIEM
DR. HAB. GRZEGORZA GROMADZKIEGO, PROF. UG

Gdańsk 2005

*Geometria jest sztuką wyciągania
prawidłowych wniosków
ze źle sporządzonych rysunków.*
Niels Abel

Spis treści

Wstęp	1
Historia problemu i opis wyników	3
Generatory grup \mathcal{M}_g i \mathcal{M}_g^\pm	3
Generatory dla hiperliptycznych grup odwzorowań	4
Rozdział 1. Wprowadzenie	6
1.1. Grupy klas odwzorowań	6
1.2. Skręcenia Dehna	7
1.3. Generatory grup klas odwzorowań	9
1.4. Hiperliptyczne grupy klas odwzorowań	10
1.5. Warkocze	12
1.6. Podgrupy skończone grup klas odwzorowań	14
1.7. Reprezentacje symplektyczne grup klas odwzorowań	15
Rozdział 2. Minimalna liczba symetrii generujących rozszerzoną grupę klas odwzorowań	17
Rozdział 3. Minimalne zbiory generatorów skończonego rzędu dla hiperliptycznych grup klas odwzorowań	22
3.1. Generowanie hiperliptycznej grupy klas odwzorowań przez dwa elementy skończonego rzędu	22
3.2. Generowanie rozszerzonej hiperliptycznej grupy klas odwzorowań przez dwa elementy skończonego rzędu	22
3.3. Dodatkowe komentarze	27
Rozdział 4. Inwolucje jako generatory hiperliptycznych grup klas odwzorowań	29
4.1. Inwolucje w hiperliptycznej grupie klas odwzorowań	29
4.2. Generowanie rozszerzonej hiperliptycznej grupy klas odwzorowań przez trzy symetrie	33
Bibliografia	34

Wstęp

Jeżeli T_g jest zamkniętą powierzchnią orientowalną rodzaju g , to *grupą klas odwzorowań* \mathcal{M}_g tej powierzchni nazywamy grupę klas izotopii jej homeomorfizmów zachowujących orientację. *Rozszerzoną grupę klas odwzorowań* \mathcal{M}_g^\pm definiujemy podobnie, przy czym dopuszczamy również homeomorfizmy zmieniające orientację. Ważnymi podgrupami grupy \mathcal{M}_g^\pm są tzw. *hipereliptyczne grupy klas odwzorowań* $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ i \mathcal{M}_g^h . Są one zdefiniowane jako centralizatory inwolucji hipereliptycznej w grupie \mathcal{M}_g^\pm i \mathcal{M}_g odpowiednio.

Ze względu na liczne zastosowania w różnych działach matematyki, badania algebraicznych własności grup klas odwzorowań pełnią ważną rolę w topologii niskowymiarowej.

Jednym z podstawowych przykładów zastosowań grup klas odwzorowań jest topologia 3-rozmaitości. Ze względu na istnienie rozkładów Heegarda 3-rozmaitości, wiele pytań dotyczących 3-rozmaitości może być równoważnie sformułowanych jako pytania o własności grup klas odwzorowań. Przykładem użyteczności takiego podejścia jest dobrze znany fakt, że każdą spójną, zwartą, orientowalną 3-rozmaitość można otrzymać w wyniku chirurgii Dehna na pewnym splocie w S^3 . Twierdzenie to jest natychmiastowym wnioskiem z podanego przez Lickorisha [28] skończonego zbioru generatorów grupy \mathcal{M}_g . Innymi przykładami są klasyfikacja Thurstona elementów grupy \mathcal{M}_g i jej liczne zastosowania w topologii 3-wymiarowej [9, 16, 49, 50] oraz zastosowania grupy Torrelli w badaniach sfer homologicznych [36, 37].

Kolejnym ważnym powodem dużego znaczenia grup klas odwzorowań jest ich rola w konstrukcji przestrzeni moduli powierzchni Riemanna i Kleina. Mówiąc dokładniej grupa \mathcal{M}_g działa jako grupa izometrii na przestrzeni Teichmüllera \mathbf{T}_g oraz przestrzeń orbit tego działania jest przestrzenią moduli zwartych powierzchni Riemanna rodzaju g . Podobnie przestrzeń orbit $\mathbf{T}_g/\mathcal{M}_g^\pm$ jest przestrzenią moduli zwartych powierzchni Kleina rodzaju g . Spektakularnym przykładem zastosowania algebraicznych własności grupy \mathcal{M}_g w teorii przestrzeni moduli, jest fakt, że przestrzeń moduli zwartych powierzchni Riemanna jest jednospójna [32]. Fakt ten jest natychmiastowym wnioskiem z faktu, że grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez elementy skończonego rzędu.

Warto również wspomnieć, że poprzez rozwłóknienia Lefschetza, istnieje wiele przykładów zastosowań własności grup klas odwzorowań w topologii 4-rozmaitości [13, 19, 27].

W poniższej pracy koncentrujemy się na, dziś już klasycznym, pytaniu dotyczącym grup klas odwzorowań, mianowicie na problemie znalezienia generatorów

tych grup, przy czym zwykle żądamy aby generatory te miały pewne dodatkowe własności. Zasadniczym celem poniższej pracy jest pokazanie, że grupy \mathcal{M}_g^\pm oraz $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ są generowane przez trzy symetrie, tj. zmieniające orientację inwolucje (Twierdzenia 2.1 i 4.8). Ponieważ żadna z tych grup nie jest grupą dihedralną, otrzymane zbiory generatorów są minimalne. Pokazujemy również, że podgrupa I_g grupy \mathcal{M}_g^h generowana przez inwolucje jest podgrupą właściwą oraz wyliczamy jej indeks (Twierdzenie 4.7). Znajdujemy ponadto dla każdej z grup \mathcal{M}_g^h oraz $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ zbiór generatorów składający się z dwóch elementów skończonego rzędu (Twierdzenia 3.1 i 3.7). Wyniki powyższe zostały opublikowane w pracach [18], [44] oraz [45]. W dowodzie Stwierdzenia 4.4 będziemy również korzystać z wyników zawartych w pracy [43].

Wyniki uzyskane w poniższej pracy stanowią część promotorskiego projektu badawczego „Geometryczne i algebraiczne własności grupy klas odwzorowań”, KBN 1 P03A 026 26.

Chciałbym bardzo serdecznie podziękować panu profesorowi Grzegorzowi Gromadzkiemu za zainteresowanie mnie tak ciekawą tematyką oraz za ogromne zaangażowanie na wszystkich etapach powstawania pracy. Dziękuję za opiekę, cenne wskazówki, rady i sugestie, a także za życzliwość, wsparcie i zachętę.

Dziękuję również moim Koleżankom i Kolegom za wiele cennych dyskusji oraz mojej Rodzinie za cierpliwość i wyrozumiałość.

Gdańsk, Październik 2005

Historia problemu i opis wyników

Generatory grup \mathcal{M}_g i \mathcal{M}_g^\pm

Badania własności grup klas odwzorowań sięgają prac M. Dehna [11] oraz J. Nielsena [38, 39, 40]. M. Dehn jako pierwszy znalazł skończony zbiór generatorów grupy \mathcal{M}_g dzisiaj znanych jako tzw. skręcenia Dehna [12]. Prace Dehna zostały jednak zapomniane i 40 lat później Lickorish [28, 29] na nowo znalazł skończony zbiór generatorów grupy \mathcal{M}_g . Lickorish zauważył również, że jeżeli nie zakładać, że generatory mają być skręczeniami Dehna, to grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez cztery elementy. Później N. Lu [30] pokazał, że grupa ta jest generowana przez trzy elementy. Ten sam wynik został uzyskany w pracy [42].

Zbiór generatorów grupy \mathcal{M}_g , dla $g \geq 2$ został podany również przez S. Humphriesa [22]. Zbiór ten powstaje w wyniku redukcji zbioru generatorów Lickorisha i liczy $2g + 1$ elementów. Ma on ponadto własność minimalności w klasie zbiorów generatorów składających się ze skręceń Dehna.

W międzyczasie C. Maclachlan [32] zauważył, że grupa \mathcal{M}_g jest skończenie generowana przez elementy skończonego rzędu. Jak wspomnieliśmy we wstępie, wnioskiem z tej obserwacji jest jednorodność przestrzeni moduli zwartych powierzchni Riemanna. Elementy skończonego rzędu w grupie \mathcal{M}_g są niezwykle interesujące, gdyż na mocy znanego twierdzenia Kerckhoffa [24], każdy taki element może być zrealizowany jako automorfizm powierzchni Riemanna. Podobnie elementy skończonego rzędu w grupie \mathcal{M}_g^\pm odpowiadają automorfizmom dianalitycznym powierzchni Riemanna.

Powyższe wyniki zrodziły naturalne pytania o minimalny zbiór generatorów dla grupy \mathcal{M}_g oraz o minimalny zbiór generatorów skończonego rzędu. Na pierwsze z tych pytań odpowiedział B. Wajnryb [52], pokazując, że grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez dwa elementy. Niedawno M. Korkmaz [26] uprościł zbiór generatorów Wajnryba pokazując, że grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez dwa elementy z których jeden jest skończonego rzędu a drugi jest skręczeniem Dehna. W tej samej pracy Korkmaz pokazał również, że grupa \mathcal{M}_g^\pm jest generowana przez dwa elementy.

Jeżeli chodzi o drugie z powyższych pytań, to prawdopodobnie należy zacząć od tego, że D. Patterson [41] rozszerzył wynik Maclachlana na powierzchnie z nakłuciami, odpowiadając w pełni na pytanie, kiedy grupa klas odwzorowań (powierzchni z nakłuciami) jest generowana przez elementy skończonego rzędu. Ten sam wynik został potem uzyskany przez F. Luo [31]. Następnie T. Brendle i B. Farb [8] pokazali, że grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez 3 elementy skończonego rzędu. Minimalny zbiór generatorów skończonego rzędu znalazł Korkmaz [26] pokazując, że grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez dwa takie elementy.

Jeżeli chodzi o analogiczne pytanie dla grupy \mathcal{M}_g^\pm , to wiadomo, że grupa \mathcal{M}_2^\pm jest generowana przez dwa elementy skończonego rzędu [45]. Jeżeli natomiast $g \geq 3$ to pytanie o minimalny zbiór generatorów skończonego rzędu jest jak dotąd otwarte; najlepszy znany wynik uzyskany w tym kierunku to fakt, że grupa \mathcal{M}_g^\pm jest generowana przez trzy inwolucje [44].

Kolejnym naturalnym pytaniem jest problem generowania grup \mathcal{M}_g i \mathcal{M}_g^\pm przez inwolucje. Pierwszy wynik w tym kierunku został uzyskany przez J. McCarthy'ego i A. Papadopolusa [35], którzy pokazali, że grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez nieskończenie wiele inwolucji dla $g \geq 3$, oraz wyliczyli indeks podgrupy generowanej przez inwolucje w przypadku $g = 2$. Następnie F. Luo [31] rozszerzył te wyniki na przypadek powierzchni z nakłuciami, pokazując również skończony zbiór inwolucji generujących grupę \mathcal{M}_g dla $g \geq 3$; zbiór ten składa się z $12g + 2$ inwolucji. Niedawno T. Brendle i B. Farb [8] pokazali, że grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez sześć inwolucji dla $g \geq 3$. Wynik ten został rozszerzony na przypadek powierzchni z nakłuciami przez M. Kassabova [23].

W przypadku grupy \mathcal{M}_g^\pm pierwszy skończony zbiór generatorów składający się z symetrii (tj. zmieniających orientację inwolucji) został wskazany w pracy [18]. Następnie zbiór ten został zredukowany do czterech symetrii [42]. Niedawno udało się znaleźć minimalny, trójelementowy zbiór symetrii generujących grupę \mathcal{M}_g^\pm [44]. Zauważmy, że ponieważ $\mathcal{M}_1^\pm \cong \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ oraz $\mathcal{M}_1 \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ (patrz Przykład 1.3), więc twierdzenie powyższe może być traktowane jako uogólnienie dobrze znanego faktu, że grupa $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ jest generowana przez trzy inwolucje $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \setminus \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Na zakończenie tego podrozdziału warto wspomnieć, że podobne wyniki są znane również w przypadku grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej. W szczególności znane są w tym przypadku skończone zbiory generatorów [6, 10]. Znane są również małe zbiory generatorów oraz małe zbiory generatorów składające się z inwolucji [46, 47, 48].

Generatory dla hiperliptycznych grup odwzorowań

Jednymi z najważniejszych podgrup grupy \mathcal{M}_g^\pm są tzw. hiperliptyczne grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ i \mathcal{M}_g^h (patrz Podrozdział 1.4). Historycznie badanie tych podgrup zostało zainspirowane ich bliskim związkiem z grupami warkoczy [7]. Ponieważ znanych jest wiele algebraicznych własności grup warkoczy, więc badanie grup $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ i \mathcal{M}_g^h jest nieporównywalnie prostsze niż badanie grup \mathcal{M}_g^\pm i \mathcal{M}_g . Dla przykładu od bardzo dawna znane było przedstawienie grupy \mathcal{M}_g^h [7], podczas gdy znalezienie przedstawienia grupy \mathcal{M}_g okazało się bardzo trudne [21, 51].

Innym przykładem jest pytanie o liniowość grup klas odwzorowań. W przypadku grupy \mathcal{M}_g^h liniowość jest dość prostą konsekwencją liniowości grupy warkoczy [3, 25]. Tymczasem pytanie o liniowość grupy \mathcal{M}_g jest otwartym i trudnym problemem.

Jak już wspomnieliśmy powyżej, od dawna znane są skończone zbiory generatorów dla grup \mathcal{M}_g^h i $\mathcal{M}_g^{h\pm}$. Niedawno udało się natomiast pokazać, że każda z tych grup jest generowana przez dwa elementy skończonego rzędu, oraz że grupa $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ jest generowana przez trzy symetrie [45]. Wiadomo również, że podgrupa

I_g grupy \mathcal{M}_g^h generowana przez inwolucje jest podgrupą właściwą oraz znany jest jej indeks [45].

Na zakończenie tego rozdziału przedstawiamy schematyczną tabelkę obrazującą stan dzisiejszej wiedzy o minimalnych zbiorach generatorów grup \mathcal{M}_g , \mathcal{M}_g^\pm , \mathcal{M}_g^h oraz $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ składających się z elementów skończonego rzędu oraz z inwolucji. Znak zapytania oznacza, że pełna odpowiedź nie jest znana – podajemy wtedy najlepszy znany wynik w tym kierunku.

	\mathcal{M}_g	\mathcal{M}_g^\pm	\mathcal{M}_g^h	$\mathcal{M}_g^{h\pm}$
elementy sk. rzędu	2 dla $g \geq 1$, [26]	$\frac{?}{2 \text{ dla } g = 1, 2}$ [45] $\frac{?}{3 \text{ dla } g \geq 3}$ [44]	2 dla $g \geq 2$ [45]	2 dla $g \geq 2$ [45]
inwolucje	$\frac{?}{6 \text{ dla } g \geq 3}$, [8]	3 dla $g \geq 1$ [44]	–	3 dla $g \geq 2$ [45]

Wprowadzenie

1.1. Grupy klas odwzorowań

DEFINICJA. Mówimy, że homeomorfizmy $f, g: X \rightarrow Y$ są *izotopijne* o ile istnieje ciągłe odwzorowanie $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ takie, że

$$H(x, 0) = f(x) \text{ dla } x \in X,$$

$$H(x, 1) = g(x) \text{ dla } x \in X,$$

$$H(\cdot, t): X \rightarrow Y \text{ jest homeomorfizmem, dla } t \in [0, 1].$$

Przez T_g będziemy oznaczać orientowalną, zamkniętą powierzchnię topologiczną rodzaju g .

DEFINICJA. *Grupą klas odwzorowań* (ang. *mapping class group*) powierzchni T_g nazywamy iloraz grupy homeomorfizmów tej powierzchni zachowujących orientację przez podgrupę homeomorfizmów izotopijnych z identycznością. Grupę tę oznaczamy symbolem \mathcal{M}_g .

Jeżeli w powyższej definicji dopuścimy również odwzorowania zmieniające orientację, otrzymamy tzw. *rozszerzoną grupę klas odwzorowań*, którą będziemy oznaczać \mathcal{M}_g^\pm .

Oczywiście grupy \mathcal{M}_g i \mathcal{M}_g^\pm zależą tylko od rodzaju g powierzchni T_g a nie od jej modelu. Warto również odnotować, że gdybyśmy w powyższej definicji używali homotopii zamiast izotopii, to na mocy Twierdzenia 6.4a z [14] otrzymalibyśmy dokładnie te same grupy \mathcal{M}_g i \mathcal{M}_g^\pm .

Na ogół będziemy używać tych samych symboli dla klas izotopii jak i dla reprezentantów tych klas.

PRZYKŁAD 1.1. Na mocy Twierdzenia 4.4 z [4], każdy zachowujący orientację homeomorfizm sfery $T_0 = S^2$ jest izotopijny z identycznością. Tym samym \mathcal{M}_0 jest grupą trywialną oraz $\mathcal{M}_0^\pm \cong \mathbb{Z}_2$.

Ze względu na powyższy przykład, w dalszej części pracy będziemy zawsze zakładać, że $g \geq 1$.

Wiadomo, że grupa podstawowa $\pi_1(T_g, x_0)$ jest izomorficzna z grupą o przedstawieniu:

$$\langle t_1, \dots, t_g, s_1, \dots, s_g \mid [t_1, s_1][t_2, s_2] \cdots [t_g, s_g] \rangle.$$

Oznaczmy relację występującą w tym przedstawieniu przez R . Każdy homeomorfizm $h: T_g \rightarrow T_g$ jest izotopijny z homeomorfizmem $\tilde{h}: T_g \rightarrow T_g$ zachowującym punkt bazowy x_0 . Ponieważ jednak izotopia ta nie jest wyznaczona jednoznacznie (zależy ona od klasy homotopii drogi łączącej x_0 z $f(x_0)$), więc indukowany

automorfizm $(\tilde{h})_*: \pi_1(T_g, x_0) \rightarrow \pi_1(T_g, x_0)$ jest wyznaczony przez h tylko z dokładnością do automorfizmu wewnętrznego grupy $\pi_1(T_g, x_0)$. Innymi słowy mamy odwzorowanie

$$\Psi: \mathcal{M}_g^\pm \rightarrow \text{Out}(\pi_1(T_g, x_0)),$$

gdzie $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ oznacza grupę *automorfizmów zewnętrznych* grupy G , tj. iloraz grupy wszystkich automorfizmów przez podgrupę składającą się z automorfizmów wewnętrznych.

Jeżeli ponadto h zachowuje orientację, to $\Psi(h)$ przeprowadza R w sprzężenie R ; jeżeli natomiast h zmienia orientację, to $\Psi(h)(R)$ jest sprzężone z R^{-1} . Tym samym Ψ obcina się do

$$\Psi^+: \mathcal{M}_g \rightarrow \text{Out}^+(\pi_1(T_g, x_0)),$$

gdzie $\text{Out}^+(\pi_1(T_g, x_0))$ jest podgrupą $\text{Out}(\pi_1(T_g, x_0))$ składającą się z elementów przeprowadzających R na sprzężenie R .

Nietrywialnym faktem jest to, że zarówno Ψ jak i Ψ^+ są izomorfizmami.

TWIERDZENIE 1.2 ([34], str. 176 oraz [54], Twierdzenie 5.15.3). *Niech $g \geq 1$. Każde z odwzorowań*

$$\Psi: \mathcal{M}_g^\pm \rightarrow \text{Out}(\pi_1(T_g))$$

oraz

$$\Psi^+: \mathcal{M}_g \rightarrow \text{Out}^+(\pi_1(T_g))$$

zdefiniowanych powyżej jest izomorfizmem. □

PRZYKŁAD 1.3. Powyższa charakteryzacja grup \mathcal{M}_g^\pm oraz \mathcal{M}_g pozwala łatwo zidentyfikować grupy \mathcal{M}_1^\pm oraz \mathcal{M}_1 . Rzeczywiście, ponieważ $\pi_1(T_1) \cong \mathbb{Z}^2$, więc na mocy Twierdzenia 1.2,

$$\mathcal{M}_1^\pm \cong \text{Out}(\mathbb{Z}^2) = \text{Aut}(\mathbb{Z}^2) = \text{GL}(2, \mathbb{Z})$$

oraz

$$\mathcal{M}_1 \cong \text{Out}^+(\mathbb{Z}^2) = \text{Aut}^+(\mathbb{Z}^2) = \text{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

1.2. Skręcenia Dehna

Przez *okrąg* będziemy w dalszym ciągu rozumieć zamkniętą krzywą zwyczajną. Niech S będzie powierzchnią walca w \mathbb{R}^3 o równaniu

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}.$$

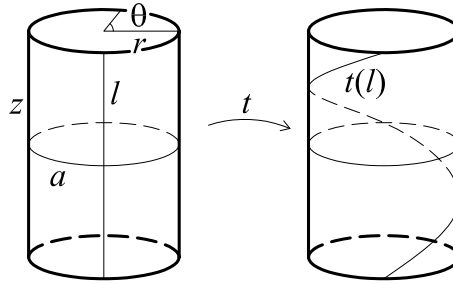
We współrzędnych walcowych

$$S = \{(r, \theta, z) \mid r = 1, z \in [0, 1]\}.$$

Homeomorfizm $t: S \rightarrow S$ zdefiniowany wzorem

$$t(r, \theta, z) = (r, \theta + 2\pi z, z)$$

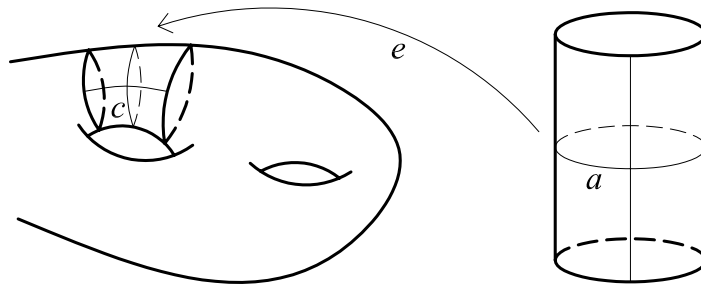
nazywamy standardowym (prawym) *skręceniem Dehna* (ang. *Dehn twist*) walca S (Rysunek 1.1).

RYSUNEK 1.1. Walec S oraz jego obraz przy skręceniu t .

Jeżeli mamy teraz zachowujące orientację zanurzenie $e: S \rightarrow T_g$, to możemy określić homeomorfizm $t_e: T_g \rightarrow T_g$ wzorem:

$$t_e(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \notin e(S), \\ ete^{-1}(x) & \text{dla } x \in e(S). \end{cases}$$

Jeżeli przez a oznaczymy okrąg na S o równaniu $\{(r, \theta, z) \mid r = 1, z = \frac{1}{2}\}$, to klasa izotopii homeomorfizmu t_e zależy tylko od klasy izotopii okręgu $c = e(a)$ (Rysunek 1.2).

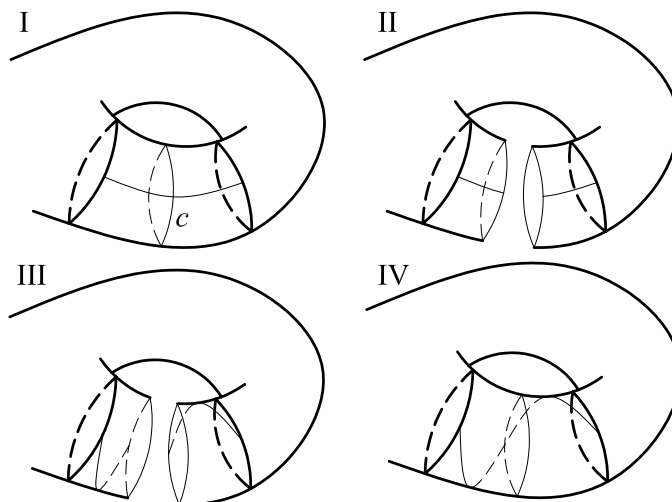
RYSUNEK 1.2. Zanurzenie walca S w powierzchnię T_g .

DEFINICJA. Przy powyższych oznaczeniach, klasę izotopii homeomorfizmu t_e nazywamy *skręceniem Dehna* względem okręgu c .

Dla prostoty przyjmijmy konwencję, że okręgi będziemy zawsze oznaczać małymi literami alfabetu łacińskiego, a skręcenie względem okręgu wielką literą odpowiadającą literze okręgu – np. skręcenie względem okręgu c będziemy oznaczać przez C .

UWAGA. Ponieważ każda krzywa zamknięta c na powierzchni T_g jest izotopijna z krzywą posiadającą otoczenie walcowe, więc wyznacza ona jednoznacznie klasę izotopii skręcenia C (Rysunek 1.3).

Bezpośrednio z definicji skręcenia wynika następujące

RYSUNEK 1.3. Schemat działania skręcenia C względem krzywej c .

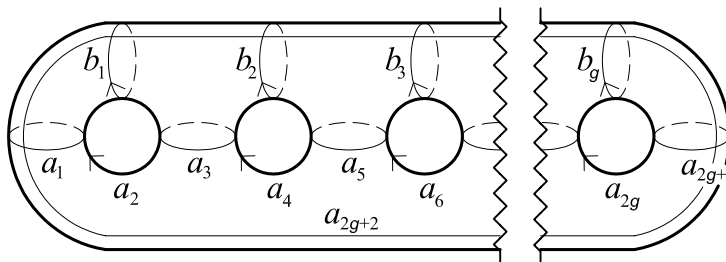
STWIERDZENIE 1.4. *Jeżeli c jest okręgiem na T_g oraz $d = f(c)$, gdzie $f: T_g \rightarrow T_g$ jest homeomorfizmem, to*

$$fCf^{-1} = \begin{cases} D & \text{jeśli } f \text{ zachowuje orientację,} \\ D^{-1} & \text{jeśli } f \text{ zmienia orientację.} \end{cases}$$

□

1.3. Generatory grup klas odwzorowań

Niech a_1, \dots, a_{2g+2} oraz b_1, \dots, b_g będą okręgami jak na Rysunku 1.4.

RYSUNEK 1.4. Generatory Lickorisha grupy \mathcal{M}_g .

TWIERDZENIE 1.5 (Lickorish [28, 29]). *Niech $g \geq 1$. Grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez $3g - 1$ skręceń: $A_1, A_2, \dots, A_{2g+1}, B_2, B_3, \dots, B_{g-1}$.* □

Prawdziwe jest również następujące wzmocnienie powyższego twierdzenia.

TWIERDZENIE 1.6 (Humphries [22]). *Niech $g \geq 2$. Grupa \mathcal{M}_g jest generowana przez $2g + 1$ skręceń: $A_1, A_2, \dots, A_{2g}, B_2$. Ponadto powyższy zbiór generatorów jest minimalny w następującym sensie: każdy zbiór generatorów grupy \mathcal{M}_g składający się ze skręceń Dehna zawiera co najmniej $2g + 1$ elementów.* □

Przypomnijmy, że przez symetrię powierzchni T_g rozumiemy zmieniający orientację homeomorfizm, którego klasa w \mathcal{M}_g^\pm jest elementem rzędu 2.

TWIERDZENIE 1.7 (Gromadzki, Stukow [18], Twierdzenie 1). *Niech $g \geq 1$. Wtedy grupa \mathcal{M}_g^\pm jest skończenie generowana przez symetrię.*

DOWÓD. Niech σ będzie symetrią powierzchni T_g względem płaszczyzny zawierającej okręgi a_2, a_4, \dots, a_{2g} (równoważnie, używając Rysunku 1.5, σ jest symetrią T_g względem płaszczyzny xy).

Zauważmy, że

$$\mathcal{M}_g^\pm = \langle A_1, A_2, \dots, A_{2g}, B_2, \sigma \rangle = \langle \sigma A_1, \sigma A_2, \dots, \sigma A_{2g}, \sigma B_2, \sigma \rangle.$$

Pierwsza równość wynika z Twierdzenia 1.6 oraz z faktu, że \mathcal{M}_g jest podgrupą indeksu 2 w \mathcal{M}_g^\pm , a druga jest oczywista. Ponadto, na mocy Stwierdzenia 1.4, mamy

$$(1.7.1) \quad \begin{aligned} \sigma A_i \sigma &= A_i^{-1} & \text{dla } i = 1, \dots, 2g + 2, \\ \sigma B_j \sigma &= B_j^{-1} & \text{dla } j = 1, \dots, g, \end{aligned}$$

co oznacza, że $\sigma A_1, \dots, \sigma A_{2g}, \sigma B_2$ są symetrami. \square

W dalszej części pracy będziemy również korzystać z następującego zbioru generatorów

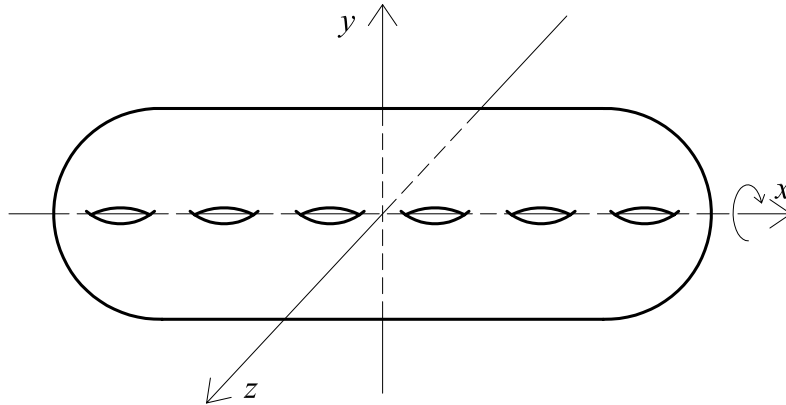
TWIERDZENIE 1.8 (Korkmaz [26], Twierdzenie 5). *Niech $g \geq 2$. Wtedy*

$$\mathcal{M}_g = \langle M, B_{g-1} \rangle,$$

gdzie $M = A_2 A_3 \cdots A_{2g+1}$. \square

1.4. Hipereliptyczne grupy klas odwzorowań

DEFINICJA. Jeżeli zrealizujemy powierzchnię T_g w przestrzeni \mathbb{R}^3 w sposób pokazany na Rysunku 1.5, tzn. tak aby płaszczyzny układu były jej płaszczyznami symetrii, to klasę izotopii homeomorfizmu $\varrho: T_g \rightarrow T_g$ indukowanego przez półobrót względem osi x nazywamy *inwolucją hipereliptyczną*.



RYSUNEK 1.5. Inwolucja hipereliptyczna $\varrho: T_g \rightarrow T_g$.

DEFINICJA. *Rozszerzoną hipereliptyczną grupą klas odwzorowań* nazywamy centralizator w \mathcal{M}_g^\pm elementu ϱ i oznaczamy $\mathcal{M}_g^{h\pm}$. Definiujemy ponadto *hipereliptyczną grupę klas odwzorowań* \mathcal{M}_g^h jako centralizator ϱ w \mathcal{M}_g .

PRZYKŁAD 1.9. Przyjmując oznaczenia jak w Twierdzeniu 1.5, każde ze skręceń A_i jest elementem grupy \mathcal{M}_g^h . Rzeczywiście, ponieważ $\varrho(a_i) = a_i$, więc na mocy Stwierdzenia 1.4, $\varrho A_i \varrho = A_i$. W szczególności, na mocy Twierdzenia 1.5, $\mathcal{M}_g^{h\pm} = \mathcal{M}_g^\pm$ oraz $\mathcal{M}_g^h = \mathcal{M}_g$ dla $g = 1, 2$.

Ze względu na powyższy przykład oraz z pewnych powodów technicznych, zwykle będziemy rozważać grupy \mathcal{M}_g^h i $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ tylko dla $g \geq 2$.

Niech $T_{0,2g+2}$ będzie sferą z wyróżnionym zbiorem

$$\Sigma = \{z_1, \dots, z_{2g+2}\}$$

$2g + 2$ punktów. Zwykle elementy zbioru Σ będziemy nazywać *nakłuciami*. Przez homeomorfizmy przestrzeni $T_{0,2g+2}$, będziemy rozumieć takie homeomorfizmy $f: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$, które zachowują zbiór Σ , tzn. $f(\Sigma) = \Sigma$. Podobnie dwa takie homeomorfizmy $f, g: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$ będziemy nazywać izotopijnymi jeżeli istnieje izotopia

$$H: T_{0,2g+2} \times [0, 1] \rightarrow T_{0,2g+2}$$

taka, że

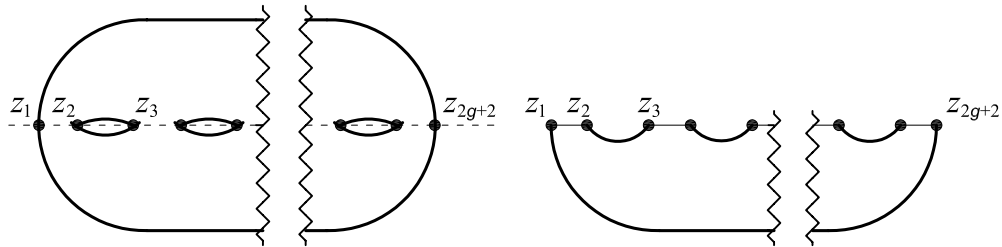
$$H(x, 0) = f(x) \text{ dla } x \in T_{0,2g+2},$$

$$H(x, 1) = g(x) \text{ dla } x \in T_{0,2g+2},$$

$$H(\Sigma, t) = \Sigma \text{ dla każdego } t \in [0, 1].$$

Przez $\mathcal{M}_{0,2g+2}^\pm$ będziemy oznaczać grupę klas izotopii homeomorfizmów przestrzeni $T_{0,2g+2}$, a przez $\mathcal{M}_{0,2g+2}$ jej podgrupę składającą się z elementów zachowujących orientację.

Przestrzeń orbit $T_g/\langle\varrho\rangle$ jest homeomorficzna ze sferą, ponadto każdy homeomorfizm $f: T_g \rightarrow T_g$ przemienny z ϱ , zachowuje zbiór $\Sigma = \{z_1, \dots, z_{2g+2}\}$ punktów stałych inwolucji ϱ – Rysunek 1.6. Widzimy więc, że odwzorowanie f indukuje element grupy $\mathcal{M}_{0,2g+2}^\pm$. Mniej trywialnym jest fakt, że dla $g \geq 2$ opisane przyporządkowanie jest surjekcją oraz, że „faktoryzuje” się ono do klas izotopii.



RYСУNEK 1.6. Sfera z wyróżnionymi punktami jako przestrzeń orbit $T_g/\langle\varrho\rangle$.

Twierdzenie 1.10 (Birman, Hilden [7], Twierdzenia 1 i 7). *Niech $g \geq 2$. Istnieje kanoniczny epimorfizm $\Phi: \mathcal{M}_g^h \rightarrow \mathcal{M}_{0,2g+2}$, który indukuje izomorfizm $\mathcal{M}_g^h / \langle \varrho \rangle \cong \mathcal{M}_{0,2g+2}$.* \square

Dowód tego twierdzenia przebiega w dwóch krokach. Najpierw udowadnia się, że zarówno homeomorfizmy przestrzeni $T_{0,2g+2}$ jak i ich izotopie podnoszą się do homeomorfizmów (izotopii) przestrzeni T_g . Druga, trudniejsza część dowodu polega na wykazaniu, że jeżeli dwa homeomorfizmy $f, f': T_g \rightarrow T_g$, przemienne z ϱ , reprezentują ten sam element grupy \mathcal{M}_g , to łącząca je izotopia może być tak wybrana, aby była przemienne z ϱ .

Wniosek 1.11. *Istnieje kanoniczny epimorfizm $\Phi: \mathcal{M}_g^{h\pm} \rightarrow \mathcal{M}_{0,2g+2}^\pm$, który indukuje izomorfizm $\mathcal{M}_g^{h\pm} / \langle \varrho \rangle \cong \mathcal{M}_{0,2g+2}^\pm$.*

Dowód. Ponieważ $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ powstaje z grupy wszystkich homeomorfizmów hipereliptycznych przez podzielenie przez podgrupę \mathcal{I} składającą się z odwzorowań izotopijnych z identycznością, więc aby wykazać, że Φ jest dobrze zdefiniowane, należy pokazać, że $\Phi(\mathcal{I}) = 1$ w $\mathcal{M}_{0,2g+2}^\pm$. To jednak wynika z Twierdzenia 1.10, gdyż $\mathcal{I} \leq \mathcal{M}_g^h$.

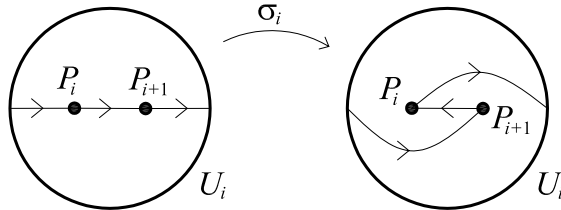
Podobnie, ponieważ element zmieniający orientację nie może być izotopijny z identycznością, więc $\ker \Phi \leq \mathcal{M}_g^h$. Na mocy Twierdzenia 1.10 oznacza to, że $\ker \Phi = \langle \varrho \rangle$. \square

1.5. Warkocze

Elementy grupy $\mathcal{M}_{0,2g+2}$ indukowane przez skręcenia A_1, \dots, A_{2g+2} będziemy oznaczać odpowiednio przez $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g+2}$. Innymi słowy, jeżeli $\pi: T_g \rightarrow T_g / \langle \varrho \rangle$ jest rzutowaniem na przestrzeń orbit to

$$\sigma_i(x) = \pi A_i \pi^{-1}(x).$$

Elementy $\sigma_i: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$ są przykładami tzw. *warkoczy* (ang. *braids*) – patrz np. [4, 5]. Nośnikiem działania warkocza σ_i jest otwarty dysk $U_i \subseteq T_{0,2g+2}$ taki, że $U_i \cap \Sigma = \{z_i, z_{i+1}\}$. Ponadto $\sigma_i(z_i) = z_{i+1}$, $\sigma_i(z_{i+1}) = z_i$ (przyjmujemy umowę, że $z_{2g+3} = z_1$). Schematyczny sposób działania warkocza σ_i jest pokazany na Rysunku 1.7.



RYSUNEK 1.7. Schemat działania warkocza σ_i .

Okazuje się, że warkocze $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g+1}$ generują grupę $\mathcal{M}_{0,2g+2}$ oraz grupa ta posiada bardzo proste przedstawienie w tych generatorach.

TWIERDZENIE 1.12 (Magnus [33]). Grupa $\mathcal{M}_{0,2g+2}$ posiada następujące przedstawienie

generatory: $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g+1}$,

relacje:

$$(1.12.1) \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{dla } |i - j| \geq 2,$$

$$(1.12.2) \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{dla } 1 \leq i \leq 2g,$$

$$(1.12.3) \quad (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g+1})^{2g+2} = 1,$$

$$(1.12.4) \quad \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g} \sigma_{2g+1} \sigma_{2g+1} \sigma_{2g} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = 1.$$

□

Klasycznie grupa warkoczy jest zdefiniowana dla dysku D^2 a nie dla sfery S^2 jak powyżej [1, 2]. Różnica między tymi dwoma grupami odbita jest w relacjach (1.12.3) oraz (1.12.4) – przedstawienie grupy warkoczy dla dysku różni się od powyższego brakiem tych dwóch relacji ([4], Twierdzenie 1.8).

Korzystając z Twierdzenia 1.12, możliwe jest otrzymanie przedstawienia dla grupy \mathcal{M}_g^h .

TWIERDZENIE 1.13 (Birman, Hilden [7], Twierdzenie 8). Grupa \mathcal{M}_g^h posiada następujące przedstawienie

generatory: A_1, \dots, A_{2g+1} ,

relacje:

$$(1.13.1) \quad A_i A_j = A_j A_i \quad \text{dla } |i - j| \geq 2,$$

$$(1.13.2) \quad A_i A_{i+1} A_i = A_{i+1} A_i A_{i+1} \quad \text{dla } 1 \leq i \leq 2g,$$

$$(1.13.3) \quad (A_1 A_2 \cdots A_{2g+1})^{2g+2} = 1,$$

$$(1.13.4) \quad (A_1 \cdots A_{2g+1} A_{2g+1} \cdots A_1)^2 = 1,$$

$$(1.13.5) \quad (A_1 \cdots A_{2g+1} A_{2g+1} \cdots A_1) A_1 = A_1 (A_1 \cdots A_{2g+1} A_{2g+1} \cdots A_1).$$

□

Dalszy ciąg rozważań poprzedzimy kilkoma komentarzami dotyczącymi powyższego przedstawienia. Otóż okazuje się, że

$$A_1 \cdots A_{2g+1} A_{2g+1} \cdots A_1 = \varrho$$

jest wcześniej zdefiniowaną inwolucją hipereliptyczną ([7], Równanie (8)). Tym samym relacje (1.13.4) oraz (1.13.5) są wyrazem faktu, że ϱ jest inwolucją oraz, że ϱ jest przemienne z A_1 . Aby wyjaśnić relacje (1.13.3), oznaczmy $B = A_1 A_2 \cdots A_{2g+1}$. Wtedy B jest podniesieniem obrotu $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2g+1}$ sfery $T_{0,2g+2}$ rzędu $2g + 2$ – jest to obrót przeprowadzający z_i na z_{i+1} dla $i = 1, \dots, 2g + 1$ oraz z_{2g+2} na z_1 .

W dalszej części pracy wygodnie będzie korzystać z następującego rozszerzenia powyższego przedstawienia.

TWIERDZENIE 1.14. Grupa \mathcal{M}_g^h posiada następujące przedstawienie

generatory: $A_1, \dots, A_{2g+2}, B, \bar{B}, \varrho$,

relacje:

$$(1.14.1) \quad B = A_1 A_2 \cdots A_{2g+1},$$

$$(1.14.2) \quad \overline{B} = A_{2g+1} A_{2g} \cdots A_1,$$

$$(1.14.3) \quad \varrho = B \overline{B},$$

$$(1.14.4) \quad A_j = B A_i B^{-1} \quad \text{dla } j \equiv i + 1 \pmod{2g + 2},$$

$$(1.14.5) \quad A_i A_j = A_j A_i, \quad \text{dla } 2 \leq |i - j| \leq 2g,$$

$$(1.14.6) \quad A_i^\alpha A_j^\beta A_i^\beta = A_j^\beta A_i^\beta A_j^\alpha \quad \text{dla } j \equiv i + 1 \pmod{2g + 2}, \alpha, \beta \in \{-1, 1\},$$

$$(1.14.7) \quad B^{2g+2} = 1,$$

$$(1.14.8) \quad \varrho^2 = 1,$$

$$(1.14.9) \quad \varrho A_i = A_i \varrho \quad \text{dla } i = 1, \dots, 2g + 2.$$

□

Powyższe przedstawienie powstaje z przedstawienia zawartego w Twierdzeniu 1.13 przez dodanie generatorów $A_{2g+2}, B, \overline{B}, \varrho$ oraz pewnej ilości zbędnych relacji. Relacja (1.14.4) wynika ze Stwierdzenia 1.4 oraz z prostej do sprawdzenia równości

$$B(a_i) = a_j \quad \text{dla } j \equiv i + 1 \pmod{2g + 2}.$$

UWAGA 1.15. Zauważmy, że na mocy relacji (1.14.4) i Twierdzenia 1.13,

$$\langle B, A_i \rangle = \mathcal{M}_g^h \quad \text{dla każdego } 1 \leq i \leq 2g + 2.$$

UWAGA 1.16. Na mocy relacji (1.14.4), dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$(1.16.1) \quad B = B^k B B^{-k} = B^k A_1 A_2 \cdots A_{2g+1} B^{-k} = A_{1+k} A_{2+k} \cdots A_{2g+1+k},$$

gdzie indeksy należy zredukować modulo $2g + 2$.

Podobnie uzasadniamy, że

$$\overline{B} = A_{2g+1+k} A_{2g+k} \cdots A_{1+k}.$$

1.6. Podgrupy skończone grup klas odwzorowań

Szczególne znaczenie elementów skończonego rzędu w grupach klas odwzorowań wynika z następującego

Twierdzenie 1.17 (Kerckhoff [24]). *Każda skończona podgrupa grupy \mathcal{M}_g [\mathcal{M}_g^\pm] zamkniętej powierzchni orientowalnej T_g może być zrealizowana jako grupa homeomorfizmów. Co więcej może być ona zrealizowana jako grupa automorfizmów powierzchni Riemanna [Kleina] ze względu na pewną strukturę analityczną [dianalityczną] na T_g .* □

Co więcej dobrze znana jest odpowiedniość między zwartymi powierzchniami Riemanna a nierozkładalnymi zespolonymi krzywymi algebraicznymi, co pozwala utożsamiać skończone podgrupy grupy \mathcal{M}_g^\pm z grupami automorfizmów krzywych algebraicznych.

Przy tej odpowiedniości, skończone podgrupy grup \mathcal{M}_g^h i $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ odpowiadają grupom automorfizmów hiperliptycznych powierzchni Riemanna, tj. krzywych

algebraicznych, których część afiniczna może być zdefiniowana równaniem $y^2 = f(x)$, gdzie $f \in \mathbb{C}[x]$ jest wielomianem bez pierwiastków wielokrotnych. Powyższy opis wyjaśnia użycie słowa „hipereliptyczne” w definicji grup \mathcal{M}_g^h i $\mathcal{M}_g^{h\pm}$.

Jako przykład zastosowania powyższej odpowiedniości, zauważmy, że ponieważ maksymalny rząd automorfizmu powierzchni Riemanna rodzaju g wynosi $4g + 2$ ([53]), więc $4g + 2$ jest maksymalnym rzędem elementu torsyjnego w grupie \mathcal{M}_g . Okazuje się, że przykładem takiego elementu jest homeomorfizm M zdefiniowany w treści Twierdzenia 1.8 – patrz uwagi przed dowodem Twierdzenia 2.1.

1.7. Reprezentacje symplektyczne grup klas odwzorowań

Niech I będzie macierzą identyczności wymiaru $g \times g$ oraz niech J będzie macierzą wymiaru $2g \times 2g$ daną w postaci blokowej

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

DEFINICJA. Niech R będzie ciałem lub pierścieniem liczb całkowitych, oraz niech $M(2g, R)$ będzie zbiorem macierzy wymiaru $2g \times 2g$ nad R . Podgrupę macierzy $M \in M(2g, R)$ spełniających warunek

$$MJM^t = \pm J$$

nazywamy *rozszerzoną grupą symplektyczną* (o współczynnikach w R) i oznaczamy $\mathrm{Sp}^\pm(2g, R)$. Podgrupę grupy $\mathrm{Sp}^\pm(2g, R)$ składającą się z macierzy M spełniających

$$MJM^t = J$$

nazywamy *grupą symplektyczną* i oznaczamy $\mathrm{Sp}(2g, R)$.

Ponieważ odwzorowania izotopijne z identycznością indukują trywialny automorfizm na $H_1(T_g, \mathbb{Z})$, mamy kanoniczne odwzorowanie

$$\Psi: \mathcal{M}_g^\pm \rightarrow \mathrm{Aut}(H_1(T_g, \mathbb{Z})).$$

Oczywiście $H_1(T_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ oraz za bazę tej grupy możemy wziąć klasy homologii okręgów (zorientowanych zgodnie z Rysunkiem 1.4)

$$\mathcal{B} = (a_2, a_4, \dots, a_{2g}, b_1, b_2, \dots, b_g).$$

Po ustaleniu tej bazy, możemy Ψ traktować jako odwzorowanie

$$\Psi: \mathcal{M}_g^\pm \rightarrow M(2g, \mathbb{Z}).$$

Powyższe odwzorowanie nie jest „na”. Aby to zobaczyć, zauważmy, że geometryczna natura bazy \mathcal{B} definiuje naturalną symplektyczną formę dwuliniową $J(\cdot, \cdot)$

w $H_1(T_g, \mathbb{Z})$, zadaną na bazie wzorem

$$\begin{aligned} J(a_i, a_j) &= 0, \\ J(b_i, b_j) &= 0, \\ J(a_i, b_j) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } j = 2i, \\ 0 & \text{dla } j \neq 2i, \end{cases} \\ J(b_j, a_i) &= \begin{cases} -1 & \text{dla } j = 2i, \\ 0 & \text{dla } j \neq 2i. \end{cases} \end{aligned}$$

Innymi słowy J jest algebraicznym indeksem przecięcia się klas homologii. Zauważmy, że oznaczenie powyższej formy dwuliniowej przez J jest nieprzypadkowe – macierz tej formy jest dokładnie macierzą J zdefiniowaną na początku tego podrozdziału. Oczywiście każdy homeomorfizm $f \in \mathcal{M}_g^\pm$ spełnia warunek $J(f(q), f(r)) = \pm J(q, r)$, gdzie q, r są klasami homologii dwóch okręgów na T_g . Ponadto jeżeli $f \in \mathcal{M}_g$, to $J(f(q), f(r)) = J(q, r)$. Widzimy zatem, że mamy homomorfizmy:

$$\begin{aligned} \Psi: \mathcal{M}_g^\pm &\rightarrow \mathrm{Sp}^\pm(2g, \mathbb{Z}), \\ \Psi^+: \mathcal{M}_g &\rightarrow \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Nietrywialnym faktem jest, że powyższe odwzorowania są „na”.

TWIERDZENIE 1.18 ([34], str. 178). *Zdefiniowane powyżej odwzorowania Ψ oraz Ψ^+ są epimorfizmami.* \square

Dowód powyższego twierdzenia polega na znalezieniu generatorów grupy $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ i pokazaniu, że macierze te pochodzą od pewnych homeomorfizmów powierzchni T_g .

Bardzo ciekawym obiektem jest jądro Ψ^+ – jest to tzw. *grupa Torelli*. Grupa ta, ze względu na liczne zastosowania w innych dziedzinach, jest od wielu lat przedmiotem intensywnych badań – patrz np. [15].

Minimalna liczba symetrii generujących rozszerzoną grupę klas odwzorowań

Głównym celem tego rozdziału jest wykazanie, że rozszerzona grupa klas odwzorowań \mathcal{M}_g^\pm jest generowana przez trzy symetrie, tj. zmieniające orientację inwolucje.

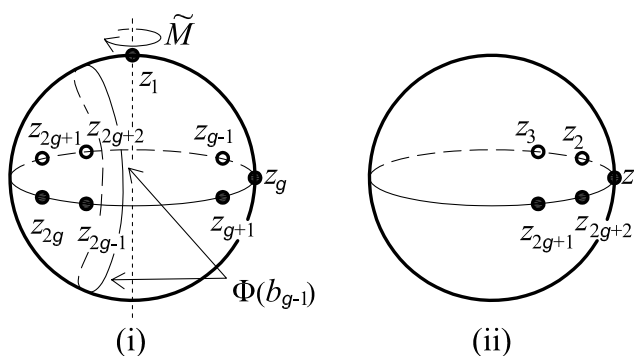
TWIERDZENIE 2.1 (Stukow [44], Twierdzenie 1). *Dla każdego $g \geq 1$, rozszerzona grupa klas odwzorowań \mathcal{M}_g^\pm jest generowana przez trzy symetrie.*

Na mocy Twierdzenia 1.18, jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy

TWIERDZENIE 2.2. *Rozszerzona grupa symplektyczna $\mathrm{Sp}^\pm(2g, \mathbb{Z})$ jest generowana przez trzy inwolucje $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathrm{Sp}^\pm(2g, \mathbb{Z}) \setminus \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$.* \square

Założmy na chwilę, że $g \geq 2$. Idea dowodu Twierdzenia 2.1 jest dość prosta. Na mocy Twierdzenia 1.8, wystarczy znaleźć symetrię $\varepsilon \in \mathcal{M}_g^\pm$ taką, że zarówno εM jak i εB_{g-1} są symetrami – wtedy $\mathcal{M}_g^\pm = \langle \varepsilon, \varepsilon M, \varepsilon B_{g-1} \rangle$. Przykład takiej symetrii jest podany poniżej w równości (2.2.1). Wprawdzie z punktu widzenia dowodu nie jest istotne w jaki sposób symetrię tę udało się uzyskać – wystarczy tylko sprawdzić, że posiada ona żądane własności, jednak dla pełności krótko opiszemy teraz procedurę prowadzącą do definicji ε .

Otóż okazuje się, że jeżeli $\Phi: \mathcal{M}_g^{h\pm} \rightarrow \mathcal{M}_{0,2g+2}^\pm$ jest homomorfizmem z Wniosku 1.11, to $\widetilde{M} = \Phi(M)$ jest obrotem sfery $S_{0,2g+2}$ takim, że $\widetilde{M}(z_i) = z_{i+1}$ dla $i = 2, \dots, 2g+1$, $\widetilde{M}(z_{2g+2}) = z_2$ oraz $\widetilde{M}(z_1) = z_1$ (Rysunek 2.1(i)). Innymi słowy



RYSUNEK 2.1. Obrót \widetilde{M} oraz symetrie $\tilde{\varepsilon}$ oraz $\tilde{\sigma}$.

M może być traktowane jako jedno z „podniesień” elementu \widetilde{M} . Ta interpretacja elementu M pozwala zauważyć, że może on być napisany (na różne sposoby)

jako $M = \varepsilon\varepsilon_1$, gdzie ε i ε_1 są podniesieniami dwóch symetrii $\tilde{\varepsilon}$ i $\tilde{\varepsilon}_1$. Zauważmy teraz, że wystarczy wybrać $\tilde{\varepsilon}$ i $\tilde{\varepsilon}_1$ oraz ich podniesienia w taki sposób, aby ε i ε_1 były symetriami (a priori może się zdarzyć, że będą to elementy rzędu 4) oraz aby $\varepsilon(b_{g-1}) = b_{g-1}^{\pm 1}$. Aby był spełniony drugi warunek sprawdzamy jak wygląda $\Phi(b_{g-1})$ – okazuje się, że jest to brzeg dysku na $S_{0,2g+2}$ ograniczającego nakłucia $z_{2g-1}, z_{2g}, z_{2g+1}$ oraz z_{2g+2} (Rysunek 2.1(i)). To sugeruje aby za $\tilde{\varepsilon}$ wziąć symetrię względem płaszczyzny przechodzącej przez z_1, z_g oraz środek sfery $S_{0,2g+2}$ (Rysunek 2.1(i)). Chcąc sprawdzić czy ten element spełnia żądane własności, wygodnie jest go zapisać w generatorach grupy $\mathcal{M}_{0,2g+2}^\pm$. Aby to zrobić zauważmy, że jeżeli $\tilde{\sigma}$ jest symetrią sfery $S_{0,2g+2}$ względem płaszczyzny przechodzącej przez wszystkie nakłucia z_1, \dots, z_{2g+2} (tzn. jest to symetria względem płaszczyzny zawierającej równik na Rysunku 2.1(ii) – jedno z podniesień tego elementu jest symetrią σ z Twierdzenia 1.7), to na mocy Twierdzenia 1.13, $\tilde{\sigma}\tilde{\varepsilon}$ może być napisany jako produkt warkoczy $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g+1}$. Ponadto istnieje dość prosty algorytm pozwalający znaleźć przedstawienie. Okazuje się, że

$$\tilde{\sigma}\tilde{\varepsilon} = (\sigma_{2g-3,2g-3}\sigma_{2g-4,2g-3} \cdots \sigma_{2,2g-3})\sigma_{2g-1}\sigma_{2g}\sigma_{2g-1}\sigma_{2g+1}\sigma_{2g}\sigma_{2g-1},$$

gdzie $\sigma_{i,j} = \sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_j^{-1}$ dla $2 \leq i \leq j$ oraz przyjmujemy umowę, że dla $g = 2$ iloczyn w nawiasie jest „pusty”, tj.

$$\sigma_{2g-3,2g-3}\sigma_{2g-4,2g-3} \cdots \sigma_{2,2g-3} = 1.$$

Ponieważ $\Phi(A_i) = \sigma_i$, więc jedno z podniesień elementu $\tilde{\varepsilon}$ jest równe:

$$(2.2.1) \quad \varepsilon = \sigma(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3})A_{2g-1}A_{2g}A_{2g-1}A_{2g+1}A_{2g}A_{2g-1},$$

gdzie $A_{i,j} = A_i^{-1}A_{i+1}^{-1} \cdots A_j^{-1}$ dla $2 \leq i \leq j$ oraz tak jak poprzednio,

$$(2.2.2) \quad A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} = 1 \quad \text{dla } g = 2.$$

DOWÓD TWIERDZENIA 2.1. Przypuśćmy najpierw, że $g = 1$. Na mocy Twierdzenia 1.5, $\mathcal{M}_g = \langle A_1, A_2 \rangle$. Ponadto na mocy relacji (1.7.1), σA_1 i σA_2 są symetriami. Mamy zatem $\mathcal{M}_g^\pm = \langle \sigma, \sigma A_1, \sigma A_2 \rangle$.

Założmy teraz, że $g \geq 2$ i niech $\varepsilon \in \mathcal{M}_g^\pm$ będzie jak w (2.2.1). Jak zauważyliśmy powyżej, na mocy Twierdzenia 1.8, wystarczy wykazać, że ε spełnia następujące warunki:

- (1) $\varepsilon^2 = 1$,
- (2) $M\varepsilon M = \varepsilon$,
- (3) $(\varepsilon B_{g-1})^2 = 1$.

Zanim uzasadnimy punkty (1)–(3), potrzebujemy dwóch lematów. W przeprowadzanych rachunkach będziemy wielokrotnie korzystać z relacji (1.7.1), (1.14.5) oraz (1.14.6). Ponadto przyjmijmy umowę, że w przeprowadzanych rachunkach:

- nawiasy kwadratowe wskazują elementy przemienne, np.

$$A_1[A_2][A_5]A_3 = A_1A_5A_2A_3,$$

- podkreślone elementy wskazują możliwe redukcje, np.

$$A_1\underline{A_2}A_5\underline{A_2}^{-1} = A_1A_5,$$

- nawiasy $\{\}$ wskazują miejsca, w których stosujemy relacje, np.

$$A_3\{A_2A_1A_2^{-1}A_1^{-1}\}A_3 = A_3A_1^{-1}A_2A_3.$$

LEMAT 2.3. Dla każdych $1 \leq i \leq k < j \leq 2g + 1$ oraz $\alpha \in \{0, 1\}$,

$$A_{i,j}A_k^\alpha = A_{k+1}^\alpha A_{i,j}.$$

W szczególności

$$A_{i,j}A_{k,l} = A_{k+1,l+1}A_{i,j}$$

dla $1 \leq i \leq k < l < j \leq 2g + 1$.

DOWÓD.

$$\begin{aligned} A_{i,j}A_k^\alpha &= A_i^{-1} \cdots A_{k-1}^{-1} A_k^{-1} A_{k+1}^{-1} [A_{k+2}^{-1} \cdots A_j^{-1}] [A_k^\alpha] \\ &= A_i^{-1} \cdots A_{k-1}^{-1} \{A_k^{-1} A_{k+1}^{-1} A_k^\alpha\} A_{k+2}^{-1} \cdots A_j^{-1} \\ &= [A_i^{-1} \cdots A_{k-1}^{-1}] [A_{k+1}^\alpha] A_k^{-1} A_{k+1}^{-1} A_{k+2}^{-1} \cdots A_j^{-1} \\ &= A_{k+1}^\alpha A_{i,j}. \end{aligned}$$

□

LEMAT 2.4. Dla każdego $1 \leq k \leq 2g + 1$,

$$A_{k,k}A_{k-1,k} \cdots A_{2,k} = (A_{k-1,k-1}A_{k-2,k-1} \cdots A_{2,k-1})(A_k^{-1} \cdots A_3^{-1}A_2^{-1}).$$

DOWÓD. Dla $k = 1, 2$ równość powyższa jest spełniona na mocy umowy (2.2.2), załóżmy zatem, że $k \geq 3$. W poniższych rachunkach będziemy wielokrotnie korzystać z Lematu 2.3.

$$\begin{aligned} A_{k,k}A_{k-1,k} \cdots A_{2,k} &= \{A_k^{-1}A_{k-1,k} \cdots A_{2,k}\} = (A_{k-1,k} \cdots A_{2,k})A_2^{-1} \\ &= (A_{k-1,k-1}\{A_k^{-1}A_{k-2,k} \cdots A_{2,k}\})A_2^{-1} \\ &= (A_{k-1,k-1}A_{k-2,k} \cdots A_{2,k})A_3^{-1}A_2^{-1} \\ &\cdots \\ &= (A_{k-1,k-1}A_{k-2,k-1} \cdots A_{2,k-1})A_k^{-1} \cdots A_3^{-1}A_2^{-1}. \end{aligned}$$

□

Pokażemy teraz (1).

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \sigma(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3})A_{2g-1}A_{2g}A_{2g-1}A_{2g+1}A_{2g}A_{2g-1} \\ &\quad \sigma(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3})A_{2g-1}A_{2g}A_{2g-1}A_{2g+1}A_{2g}A_{2g-1} \\ &= \sigma(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3})\{A_{2g-1}A_{2g}A_{2g-1}A_{2g+1}A_{2g}A_{2g-1} \\ &\quad \sigma\}[A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3}][A_{2g-1}A_{2g}A_{2g-1}A_{2g+1}A_{2g}A_{2g-1}] \\ &= \sigma(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3})\sigma A_{2g-1}^{-1}A_{2g}^{-1}A_{2g-1}^{-1}A_{2g+1}^{-1}A_{2g}^{-1}A_{2g-1}^{-1} \\ &\quad \underline{A_{2g-1}A_{2g}[A_{2g-1}][A_{2g+1}]A_{2g}A_{2g-1}(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3})} \\ &= \sigma(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3})\sigma \underline{A_{2g-1}^{-1}A_{2g}^{-1}A_{2g-1}^{-1}A_{2g+1}^{-1}} \\ &\quad \underline{A_{2g+1}A_{2g-1}A_{2g}A_{2g-1}(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3})} \\ &= \sigma(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3})\sigma(A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3}). \end{aligned}$$

Wystarczy zatem wykazać, że dla dowolnego $1 \leq k \leq 2g + 1$

$$(2.4.1) \quad \sigma(A_{k,k}A_{k-1,k} \cdots A_{2,k})\sigma(A_{k,k}A_{k-1,k} \cdots A_{2,k}) = 1.$$

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. Dla $k = 1$ równość (2.4.1) jest spełniona na mocy umowy (2.2.2).

Przypuśćmy teraz, że (2.4.1) zachodzi dla wszystkich liczb mniejszych od k . W poniższych rachunkach będziemy korzystać z Lematów 2.3 i 2.4.

$$\begin{aligned} & \sigma(A_{k,k}A_{k-1,k} \cdots A_{2,k})\sigma(A_{k,k}A_{k-1,k} \cdots A_{2,k}) \\ &= \sigma\{A_{k,k} \cdots A_{2,k}\}\sigma(A_{k,k} \cdots A_{4,k}\{A_{3,k}A_{2,k}\}) \\ &= \sigma(A_{k-1,k-1} \cdots A_{2,k-1})\{(A_k^{-1} \cdots A_3^{-1}A_2^{-1})\sigma\}(A_{k,k} \cdots A_{4,k}A_{2,k}A_{2,k-1}) \\ &= \sigma(A_{k-1,k-1} \cdots A_{2,k-1})\sigma(A_k \cdots A_3A_2)(A_{k,k} \cdots \{A_{4,k}A_{2,k}\}A_{2,k-1}) \\ &= \sigma(A_{k-1,k-1} \cdots A_{2,k-1})\sigma(A_{2,k}^{-1})(A_{k,k} \cdots A_{2,k}A_{3,k-1}A_{2,k-1}) \\ & \dots \\ &= \sigma(A_{k-1,k-1} \cdots A_{2,k-1})\sigma(A_{2,k}^{-1})(A_{2,k}A_{k-1,k-1} \cdots A_{3,k-1}A_{2,k-1}) \\ &= \sigma(A_{k-1,k-1} \cdots A_{2,k-1})\sigma(A_{k-1,k-1} \cdots A_{2,k-1}). \end{aligned}$$

Zatem (2.4.1) zachodzi na mocy założenia indukcyjnego.

Pokażemy teraz (2).

$$\begin{aligned} M\varepsilon M &= (A_2 \cdots A_{2g+1})(\sigma A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} \\ & \quad A_{2g-1}A_{2g}A_{2g-1}A_{2g+1}A_{2g}A_{2g-1})(A_2 \cdots A_{2g-2}A_{2g-1}A_{2g}A_{2g+1}) \\ &= \{A_2 \cdots A_{2g+1}\sigma\}A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} \\ & \quad A_{2g-1}A_{2g}[A_{2g-1}][A_{2g+1}]A_{2g}A_{2g-1}A_2 \cdots A_{2g-2}A_{2g-1}A_{2g}A_{2g+1} \\ &= \sigma(A_2^{-1} \cdots A_{2g+1}^{-1})A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} \\ & \quad A_{2g-1}A_{2g}A_{2g+1}\{A_{2g-1}A_{2g}A_{2g-1}\}A_2 \cdots A_{2g-2}A_{2g-1}A_{2g}A_{2g+1} \\ &= \sigma A_{2,2g-2}(A_{2g-1}^{-1}A_{2g}^{-1}A_{2g+1}^{-1})A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} \\ & \quad A_{2g-1}\{A_{2g}A_{2g+1}A_{2g}\}A_{2g-1}[A_{2g}][A_2 \cdots A_{2g-2}]A_{2g-1}A_{2g}A_{2g+1} \\ &= \sigma A_{2,2g-2}(A_{2g-1}^{-1}A_{2g}^{-1}A_{2g+1}^{-1})A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} \\ & \quad [A_{2g-1}][A_{2g+1}]A_{2g}A_{2g+1}A_{2g-1}A_2 \cdots A_{2g-2}\{A_{2g}A_{2g-1}A_{2g}\}A_{2g+1} \\ &= \sigma A_{2,2g-2}(A_{2g-1}^{-1}A_{2g}^{-1}A_{2g+1}^{-1})A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} \\ & \quad A_{2g+1}A_{2g-1}A_{2g}[A_{2g+1}][A_{2g-1}A_2 \cdots A_{2g-2}A_{2g-1}]A_{2g}[A_{2g-1}][A_{2g+1}] \\ &= \sigma A_{2,2g-2}(A_{2g-1}^{-1}A_{2g}^{-1}A_{2g+1}^{-1})A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} \\ & \quad A_{2g+1}\{A_{2g-1}A_{2g}A_{2g-1}\}A_2 \cdots A_{2g-2}A_{2g-1}\{A_{2g+1}A_{2g}A_{2g+1}\}A_{2g-1} \\ &= \sigma A_{2,2g-2}(A_{2g-1}^{-1}A_{2g}^{-1}A_{2g+1}^{-1})A_{2g-3,2g-3}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} \\ & \quad \underline{A_{2g+1}A_{2g}A_{2g-1}[A_{2g}][A_2 \cdots A_{2g-2}]A_{2g-1}A_{2g}A_{2g+1}A_{2g}A_{2g-1}} \\ &= \sigma\{A_{2,2g-2}A_{2g-3,2g-3}\}A_{2g-4,2g-3} \cdots A_{2,2g-3} \\ & \quad A_2A_3 \cdots A_{2g-2}\{A_{2g}A_{2g-1}A_{2g}\}A_{2g+1}A_{2g}A_{2g-1} \\ &= \sigma A_{2g-2,2g-2}\{A_{2,2g-2}A_{2g-4,2g-3}\} \cdots A_{2,2g-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_2 A_3 \cdots A_{2g-2} A_{2g-1} A_{2g} A_{2g-1} A_{2g+1} A_{2g} A_{2g-1} \\
& = \sigma A_{2g-2, 2g-2} A_{2g-3, 2g-2} A_{2, 2g-2} \cdots A_{2, 2g-3} \\
& \quad A_2 A_3 \cdots A_{2g-2} A_{2g-1} A_{2g} A_{2g-1} A_{2g+1} A_{2g} A_{2g-1} \\
& \quad \dots \\
& = \sigma (A_{2g-2, 2g-2} A_{2g-3, 2g-2} \cdots A_{3, 2g-2} A_{2, 2g-2}) \\
& \quad A_2 A_3 \cdots A_{2g-2} A_{2g-1} A_{2g} A_{2g-1} A_{2g+1} A_{2g} A_{2g-1} \\
& = \sigma \{ A_{2g-2, 2g-2} \cdots A_{3, 2g-2} A_{2, 2g-2} \} \\
& \quad A_2 A_3 \cdots A_{2g-2} A_{2g-1} A_{2g} A_{2g-1} A_{2g+1} A_{2g} A_{2g-1} \\
& = \sigma (A_{2g-3, 2g-3} \cdots A_{3, 2g-3} A_{2, 2g-3}) \underbrace{(A_{2g-2}^{-1} \cdots A_3^{-1} A_2^{-1})}_{A_2 A_3 \cdots A_{2g-2} A_{2g-1} A_{2g} A_{2g-1} A_{2g+1} A_{2g} A_{2g-1}} \\
& = \sigma (A_{2g-3, 2g-3} \cdots A_{3, 2g-3} A_{2, 2g-3}) (A_{2g-1} A_{2g} A_{2g-1} A_{2g+1} A_{2g} A_{2g-1}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dla dowodu (3) zauważmy, że ponieważ nośnik każdego ze skręceń występujących w definicji ε (patrz (2.2.1)) jest rozłączny z b_{g-1} (innymi słowy w definicji ε nie występuje A_{2g-2}), więc na mocy relacji (1.7.1), mamy

$$\varepsilon B_{g-1} \varepsilon = \sigma B_{g-1} \sigma = B_{g-1}^{-1}.$$

□

Przedstawiony powyżej dowód Twierdzenia 2.1 jest uproszczeniem oryginalnego dowodu zawartego w pracy [44]. Zasadnicza różnica polega na reprezentowaniu elementów M i ε w generatorach grupy \mathcal{M}_g^\pm a nie jako automorfizmów zewnętrznych grupy podstawowej $\pi_1(S_g)$ jak w [44].

Minimalne zbiory generatorów skończonego rzędu dla hipereliptycznych grup klas odwzorowań

Celem poniższego rozdziału jest wykazanie, że zarówno hipereliptyczna jak i rozszerzona hipereliptyczna grupa klas odwzorowań jest generowana przez dwa elementy skończonego rzędu. O ile w przypadku grupy \mathcal{M}_g^h powyższe stwierdzenie jest dość proste w dowodzie, to w przypadku grupy $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ dowód jest o wiele bardziej skomplikowany.

3.1. Generowanie hipereliptycznej grupy klas odwzorowań przez dwa elementy skończonego rzędu

TWIERDZENIE 3.1 (Stukow [45], Twierdzenie 1). *Niech $g \geq 2$. Hipereliptyczna grupa klas odwzorowań \mathcal{M}_g^h jest generowana przez dwa elementy rzędów $2g + 2$ oraz $4g + 2$ odpowiednio.*

DOWÓD. Jak zauważyliśmy w uwagach poprzedzających dowód Twierdzenia 2.1, element $M = A_2 A_3 \cdots A_{2g+1}$ z Twierdzenia 1.8 jest podniesieniem obrotu rzędu $2g + 1$. Zatem rząd tego elementu jest równy $2g + 1$ lub $4g + 2$. Okazuje się, że w istocie jest to $4g + 2$ ([20], Lemat 2). Wystarczy zatem wykazać, że

$$\mathcal{M}_g^h = \langle B, M \rangle,$$

gdzie $B = A_1 A_2 \cdots A_{2g+1}$ jest elementem z Twierdzenia 1.14. To jest jednak natychmiastową konsekwencją Uwagi 1.15 oraz relacji $A_1 = B M^{-1}$. \square

3.2. Generowanie rozszerzonej hipereliptycznej grupy klas odwzorowań przez dwa elementy skończonego rzędu

Do końca do rozdziału założmy, że $g \geq 2$.

STWIERDZENIE 3.2. *Rząd elementu $\beta = \sigma B$ jest skończony i wynosi $2g + 2$ jeżeli g jest nieparzyste oraz $4g + 4$ jeżeli g jest parzyste.*

DOWÓD. Po pierwsze zauważmy, że na mocy relacji (1.7.1), $\sigma A_i \sigma = A_i^{-1}$ dla $i = 1, 2, \dots, 2g + 1$. Zatem na mocy relacji (1.14.1)–(1.14.3),

$$(3.2.1) \quad \sigma B \sigma = \bar{B}^{-1} = \rho B.$$

Dzięki powyższej równości otrzymujemy

$$\beta^2 = \sigma B \sigma B = \rho B^2,$$

skąd na mocy relacji (1.14.7) i (1.14.9),

$$\beta^{2g+2} = \rho^{g+1} B^{2g+2} = \rho^{g+1}.$$

Zatem teza wynika z faktu, iż ρ jest elementem rzędu 2. \square

STWIERDZENIE 3.3. *Rząd elementu $N = \sigma A_{2g+1}^{-1} A_1 A_2 A_1^{-1} B A_{2g+1}^{-1}$ jest skończony i wynosi $2g$ jeżeli g jest nieparzyste oraz $4g$ jeżeli g jest parzyste.*

DOWÓD. Pokażemy indukcyjnie, że dla $1 \leq k \leq g$,

$$(3.3.1) \quad N^{2k} = A_{2g+1}(A_2 \cdots A_{2k} A_{2k+1})(A_1^{-1} \cdots A_{2k-1}^{-1} A_{2k}^{-1}) B^{2k} A_{2g+1}^{-1} \varrho^k.$$

Dla $k = 1$, na mocy relacji (1.7.1), (1.14.1)–(1.14.9) oraz (3.2.1) otrzymujemy (będziemy w dalszym ciągu stosować ustaloną w dowodzie Twierdzenia 2.1 konwencję zapisu rachunków)

$$(3.3.2) \quad \begin{aligned} N^2 &= (\sigma A_{2g+1}^{-1} A_1 A_2 A_1^{-1} B A_{2g+1}^{-1})(\sigma A_{2g+1}^{-1} A_1 A_2 A_1^{-1} B A_{2g+1}^{-1}) \\ &= \{\sigma A_{2g+1}^{-1} A_1 A_2 A_1^{-1} B A_{2g+1}^{-1}\} \sigma A_{2g+1}^{-1} A_1 A_2 A_1^{-1} B A_{2g+1}^{-1} \\ &= A_{2g+1} \{A_1^{-1} A_2^{-1} A_1\} [\varrho] [\{B \sigma A_1 A_2 A_1^{-1}\} B A_{2g+1}^{-1}] \\ &= A_{2g+1} A_2 [A_1^{-1}] A_2^{-1} A_2 [A_3] A_2^{-1} B^2 A_{2g+1}^{-1} \varrho \\ &= A_{2g+1} (A_2 A_3) (A_1^{-1} A_2^{-1}) B^2 A_{2g+1}^{-1} \varrho. \end{aligned}$$

Założmy teraz, że

$$N^{2k-2} = A_{2g+1}(A_2 \cdots A_{2k-2} A_{2k-1})(A_1^{-1} \cdots A_{2k-3}^{-1} A_{2k-2}^{-1}) B^{2k-2} A_{2g+1}^{-1} \varrho^{k-1}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} N^{2k} &= A_{2g+1}(A_2 \cdots A_{2k-2} A_{2k-1})(A_1^{-1} \cdots A_{2k-3}^{-1} A_{2k-2}^{-1}) \\ &\quad \{B^{2k-2} A_{2g+1}^{-1} [\varrho^{k-1}] [A_{2g+1} (A_2 A_3) (A_1^{-1} A_2^{-1})] B^2 A_{2g+1}^{-1}\} \varrho \\ &= A_{2g+1}(A_2 \cdots A_{2k-2} A_{2k-1}) [A_1^{-1} \cdots A_{2k-3}^{-1} A_{2k-2}^{-1}] \\ &\quad [A_{2k} A_{2k+1}] (A_{2k-1}^{-1} A_{2k}^{-1}) B^{2k} A_{2g+1}^{-1} \varrho^k \\ &= A_{2g+1}(A_2 \cdots A_{2k} A_{2k+1})(A_1^{-1} \cdots A_{2k-1}^{-1} A_{2k}^{-1}) B^{2k} A_{2g+1}^{-1} \varrho^k \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Podstawiając $k = g$ w równości (3.3.1), na mocy relacji (1.16.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} N^{2g} &= A_{2g+1}(A_2 \cdots A_{2g} A_{2g+1})(A_1^{-1} \cdots A_{2g-1}^{-1} A_{2g}^{-1}) B^{2g} A_{2g+1}^{-1} \varrho^g \\ &= A_{2g+1}(A_2 \cdots A_{2g} A_{2g+1} A_{2g+2})(A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \cdots A_{2g-1}^{-1} A_{2g}^{-1}) B^{2g} A_{2g+1}^{-1} \varrho^g \\ &= A_{2g+1} B \{\overline{B}^{-1}\} B^{2g} A_{2g+1}^{-1} \varrho^g = A_{2g+1} B \varrho B B^{2g} A_{2g+1}^{-1} \varrho^g = \varrho^{g+1} \end{aligned}$$

Teza wynika zatem z faktu, że ϱ jest elementem rzędu 2. □

Niech $G = \langle \beta, N \rangle$. Naszym celem jest pokazanie, że $G = \mathcal{M}_g^{h\pm}$ (Twierdzenie 3.7). Zanim jednak to zrobimy potrzebujemy kilku, rachunkowo dość skomplikowanych lematów.

LEMAT 3.4. *Niech $g = 2$. Wtedy*

$$N^{-1} \beta N^2 \beta N \beta N^{-1} \beta^{-1} N^{-1} \beta N^2 \beta N \beta = A_3^{-1}.$$

DOWÓD. Korzystając z relacji (1.7.1), (1.14.1)–(1.14.9), (1.16.1), (3.2.1), (3.3.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& N^{-1}\beta N^2\beta N\beta N^{-1}\beta^{-1}N^{-1}\beta N^2\beta N\beta \\
& = (A_5B^{-1}A_1A_2^{-1}A_1^{-1}A_5\underline{\sigma})\underline{\sigma}B(A_5A_2A_3A_1^{-1}A_2^{-1}B^2A_5^{-1}\underline{\rho})\underline{\sigma}B \\
& \quad (\underline{\sigma}A_5^{-1}A_1A_2A_1^{-1}BA_5^{-1})\underline{\sigma}B(A_5B^{-1}A_1A_2^{-1}A_1^{-1}A_5\underline{\sigma})B^{-1}\underline{\sigma} \\
& \quad (A_5B^{-1}A_1A_2^{-1}A_1^{-1}A_5\underline{\sigma})\underline{\sigma}B(A_5A_2A_3A_1^{-1}A_2^{-1}B^2A_5^{-1}\underline{\rho})\underline{\sigma}B \\
& \quad (\underline{\sigma}A_5^{-1}A_1A_2A_1^{-1}BA_5^{-1})\underline{\sigma}B \\
& = A_5\{B^{-1}A_1A_2^{-1}A_1^{-1}A_5B\}A_5A_2A_3A_1^{-1}A_2^{-1}\{B^2A_5^{-1}\underline{\rho}\underline{\sigma}B\} \\
& \quad A_5^{-1}A_1A_2A_1^{-1}BA_5^{-1}\underline{\rho}\{BA_5^{-1}\underline{\rho}B^{-1}\}A_1^{-1}A_2A_1A_5^{-1}B^{-1} \\
& \quad A_5^{-1}\underline{\rho}\{B^{-1}A_1^{-1}A_2A_1A_5^{-1}\underline{\rho}B\}A_5^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}A_1A_2B^2A_5\underline{\rho}B \\
& \quad A_5A_1^{-1}A_2^{-1}A_1\underline{\rho}\{BA_5B\} \\
& = A_5\{A_6A_1^{-1}A_6^{-1}\}A_4A_5A_2A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}\{B^3 \\
& \quad A_5^{-1}A_1A_2A_1^{-1}B\}A_5^{-1}A_6^{-1}A_1^{-1}A_2A_1A_5^{-1}B^{-1} \\
& \quad A_5^{-1}A_6^{-1}A_1A_6A_4^{-1}A_5^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}A_1A_2\{B^2A_5B\}A_5A_1^{-1}A_2^{-1}A_1A_6B^2 \\
& = A_5A_1^{-1}A_6^{-1}[A_1][A_4]A_5A_2A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1} \\
& \quad A_2^{-1}\{A_4A_5A_4^{-1}\}\{B^{-2}A_5^{-1}A_6^{-1}A_1^{-1}A_2A_1A_5^{-1}B^{-1}\} \\
& \quad A_5^{-1}A_6^{-1}A_1A_6A_4^{-1}A_5^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}A_1A_2B^3A_4A_5A_1^{-1}A_2^{-1}A_1A_6B^2 \\
& = A_5A_1^{-1}A_6^{-1}A_4A_1A_5A_2A_3[A_1^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1} \\
& \quad A_2^{-1}]A_5^{-1}[A_4A_5]A_3^{-1}A_4^{-1}A_5^{-1}A_6A_5A_3^{-1}\{B^{-3} \\
& \quad A_5^{-1}A_6^{-1}A_1A_6A_4^{-1}A_5^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}A_1A_2B^3\}A_4A_5\{A_1^{-1}A_2^{-1}A_1\}A_6B^2 \\
& = A_5A_1^{-1}A_6^{-1}A_4\{A_1A_2A_3A_4A_5\}A_1^{-1}A_2^{-1}\{A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}A_4^{-1}A_5^{-1}\}A_6A_5A_3^{-1} \\
& \quad A_2^{-1}A_3^{-1}A_4A_3A_1^{-1}\underline{A_2^{-1}}A_5^{-1}A_6^{-1}[A_4A_5A_4A_5]\underline{A_2}[A_1^{-1}A_2^{-1}]A_6B^2 \\
& = A_5A_1^{-1}A_6^{-1}A_4\{BA_1^{-1}A_2^{-1}\underline{\rho}B\}A_6A_5A_3^{-1} \\
& \quad A_2^{-1}A_3^{-1}A_4A_3A_1^{-1}A_4\{A_4^{-1}A_5^{-1}A_6^{-1}A_1^{-1}A_2^{-1}\}A_4A_5A_4A_5A_6B^2 \\
& = A_5A_1^{-1}A_6^{-1}A_4A_2^{-1}A_3^{-1}\underline{\rho}\{B^2A_6A_5A_3^{-1} \\
& \quad A_2^{-1}A_3^{-1}A_4A_3A_1^{-1}A_4\underline{\rho}B\}A_4A_5A_3^{-1}A_2^{-1}\{A_2A_3A_4A_5A_6\}B^2 \\
& = A_5A_1^{-1}A_6^{-1}A_4\{A_2^{-1}A_3^{-1}A_2\}[A_1][A_5^{-1}A_4^{-1}] \\
& \quad \{A_5^{-1}A_6A_5\}A_3^{-1}A_6\{B^3A_4A_5A_3^{-1}A_2^{-1}B^3\} \\
& = A_5A_1^{-1}[A_6^{-1}][A_4A_3A_2^{-1}A_3^{-1}]A_5^{-1}A_4^{-1}A_1A_6[A_5]A_6^{-1}[A_3^{-1}A_6A_1A_2]A_6^{-1}A_5^{-1} \\
& = A_5[A_1^{-1}][A_4A_3]A_2^{-1}A_3^{-1}A_6^{-1}A_5^{-1}A_4^{-1}[A_1A_6][A_3^{-1}]A_1A_2\{A_5A_6^{-1}A_5^{-1}\} \\
& = A_5A_4A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}\{A_6^{-1}A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}A_2^{-1}\}A_2\{A_1A_6A_1\}[A_2][A_6^{-1}]A_5^{-1}A_6 \\
& = A_5A_4A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}\{B^{-1}A_2\}\{A_6A_1A_6A_6^{-1}A_2A_3A_4\}A_4^{-1}[A_3^{-1}][A_5^{-1}]A_6 \\
& = A_5A_4A_3A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}[A_1]B^{-1}B[A_4^{-1}A_5^{-1}]A_3^{-1}A_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_5 A_4 A_3 \{A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} A_4^{-1} A_5^{-1}\} A_1 [A_3^{-1}] [A_6] \\
&= A_5 A_4 A_3 \{\varrho B A_1 A_6\} A_3^{-1} = \{A_5 A_4 A_3 A_2 A_1\} \varrho B A_3^{-1} = \underline{\varrho B^{-1}} \underline{\varrho B} A_3^{-1} = A_3^{-1}.
\end{aligned}$$

□

LEMAT 3.5. *Niech $g = 3$. Wtedy*

$$\beta^{-4} N^{-2} \beta N^{-2} \beta^{-1} N^{-1} \beta^2 N^2 \beta^{-4} N \beta N^{-3} \beta^4 N^{-1} \beta = A_7 A_1^{-1}.$$

DOWÓD. Korzystając z relacji (3.3.2) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
N^3 &= (A_7 A_2 A_3 A_1^{-1} A_2^{-1} B^2 A_7^{-1} \varrho) (\sigma A_7^{-1} A_1 A_2 A_1^{-1} B A_7^{-1}) \\
&= A_7 A_2 A_3 A_1^{-1} A_2^{-1} B^2 A_7^{-1} \varrho \{\sigma A_7^{-1} A_1 A_2 A_1^{-1} B A_7^{-1}\} \\
&= A_7 A_2 A_3 A_1^{-1} A_2^{-1} \{B^2 \underline{\varrho} A_1^{-1} A_2^{-1} A_1 \underline{\varrho} B\} A_7 \sigma \\
&= A_7 A_2 A_3 A_1^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} A_4^{-1} A_3 B^3 A_7 \sigma.
\end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
&\beta^{-4} N^{-2} \beta N^{-2} \beta^{-1} N^{-1} \beta^2 N^2 \beta^{-4} N \beta N^{-3} \beta^4 N^{-1} \beta \\
&= B^{-4} (\varrho A_7 B^{-2} A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_7^{-1}) \sigma B (\varrho A_7 B^{-2} A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_7^{-1}) B^{-1} \sigma \\
&\quad (A_7 B^{-1} A_1 A_2^{-1} A_1^{-1} A_7 \sigma) \varrho B^2 (A_7 A_2 A_3 A_1^{-1} A_2^{-1} B^2 A_7^{-1} \varrho) B^{-4} \\
&\quad (\sigma A_7^{-1} A_1 A_2 A_1^{-1} B A_7^{-1}) \sigma B (\sigma A_7^{-1} B^{-3} A_3^{-1} A_4 A_3 A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_7^{-1}) \\
&\quad B^4 (A_7 B^{-1} A_1 A_2^{-1} A_1^{-1} A_7 \sigma) \sigma B \\
&= \{B^{-4} \varrho A_7 B^{-2}\} A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_7^{-1} \{\sigma B \varrho A_7 B^{-2} A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_7^{-1} B^{-1} \sigma\} \\
&\quad A_7 \{B^{-1} A_1 A_2^{-1} A_1^{-1} A_7\} \{\sigma \varrho B^2 A_7 A_2 A_3 A_1^{-1} A_2^{-1} B^2 A_7^{-1} \varrho B^{-4} \\
&\quad \sigma\} \{A_7^{-1} A_1 A_2 A_1^{-1} B\} A_7^{-1} \{\sigma B \sigma\} \{A_7^{-1} B^{-3}\} \{A_3^{-1} A_4 A_3 A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_7^{-1} \\
&\quad B^2\} \{B^2 A_7 B^{-1}\} [A_1 A_2^{-1} A_1^{-1}] [A_7] B \\
&= \varrho A_3 \{B^2 A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_7^{-1} \underline{\varrho} B\} \underline{\varrho} A_7^{-1} \{B^{-2} A_2^{-1} A_1^{-1} A_3 A_2 A_7 \underline{\varrho} B^{-1}\} \\
&\quad A_7 A_8 A_1^{-1} A_8^{-1} A_6 \{B^{-1} \underline{\varrho} B^2 A_7^{-1} A_2^{-1} A_3^{-1} A_1 A_2 B^2\} \{A_7 \underline{\varrho} B^{-4} \\
&\quad B\} A_6^{-1} A_8 A_1 A_8^{-1} A_7^{-1} \underline{\varrho} \{B B^{-3} A_2^{-1} B^2\} A_1^{-1} A_2 A_1 A_8 A_7 A_1^{-1} A_8^{-1} A_5^{-1} \\
&\quad A_1 \{B A_7 A_1 A_2^{-1} A_1^{-1} B\} \\
&= \varrho \{A_3 A_4 A_3\} A_5^{-1} A_4^{-1} A_1^{-1} \{B^3 A_7^{-1} B^{-3}\} A_3^{-1} A_2^{-1} A_4 A_3 A_8 \\
&\quad A_7 A_8 A_1^{-1} A_8^{-1} A_6 A_8^{-1} A_3^{-1} A_4^{-1} \{A_2 A_3 B^3 B^{-3} A_2\} \\
&\quad \underline{A_6^{-1} A_8 A_1 A_8^{-1} A_7^{-1} A_8^{-1} A_1^{-1} A_3^{-1} A_4^{-1} A_5^{-1}} \{A_5 A_4 A_3 A_2 A_1 A_8 A_7\} [A_1^{-1} A_8^{-1}] [A_5^{-1}] \\
&\quad A_1 A_8 A_2 A_3^{-1} A_2^{-1} B^2 \\
&= \underline{\varrho} A_4 A_3 \{A_4 A_5^{-1} A_4^{-1}\} A_1^{-1} \{A_2^{-1} A_3^{-1} A_2^{-1}\} A_8 A_7 A_8 A_1^{-1} A_8^{-1} A_3 A_2 A_3 \\
&\quad A_1 A_8^{-1} A_7^{-1} A_8^{-1} A_1^{-1} A_3^{-1} A_4^{-1} A_5^{-1} \varrho \{B^{-1} A_5^{-1} A_1^{-1} A_8^{-1} A_1 A_8 A_2 A_3^{-1} A_2^{-1} B^2\} \\
&= A_4 [A_3] [A_5^{-1}] A_4^{-1} [A_5 A_1^{-1}] [A_3^{-1}] A_2^{-1} A_3^{-1} A_8 A_7 A_8 A_1^{-1} A_8^{-1} A_3 A_2 \\
&\quad A_1 \{A_8^{-1} A_7^{-1} A_8^{-1}\} A_1^{-1} \{A_4^{-1} A_5^{-1} A_4^{-1}\} \{A_8^{-1} A_7^{-1} A_8 A_7\} A_1 A_2^{-1} A_1^{-1} B \\
&= A_4 A_5^{-1} \{A_3 A_4^{-1} A_3^{-1}\} \underline{A_5 A_1^{-1} A_2^{-1}} \{A_8 A_7 A_8\} A_1^{-1} A_8^{-1} A_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [A_1][A_7^{-1}]A_8^{-1}\underline{A_7^{-1}A_1^{-1}A_5^{-1}A_4^{-1}A_5^{-1}A_7A_8^{-1}A_1A_2^{-1}A_1^{-1}B} \\
& = \{A_4A_5^{-1}A_4^{-1}\}A_3^{-1}\underline{A_4A_1^{-1}A_2^{-1}A_7A_8A_7A_1^{-1}[A_8^{-1}][A_2]} \\
& \quad A_7^{-1}\{A_1A_8^{-1}A_1^{-1}\}\underline{A_4^{-1}A_5^{-1}A_8^{-1}A_1A_2^{-1}A_1^{-1}B} \\
& = A_5^{-1}A_4^{-1}\underline{A_5A_3^{-1}A_1^{-1}A_2^{-1}A_7A_8A_7A_1^{-1}A_2}\{A_8^{-1} \\
& \quad A_7^{-1}A_8^{-1}\}\underline{A_1^{-1}A_8A_5^{-1}A_8^{-1}A_1A_2^{-1}A_1^{-1}B} \\
& = A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}A_1^{-1}A_2^{-1}A_7A_8A_7A_1^{-1}\underline{A_7^{-1}A_8^{-1}[A_7^{-1}][A_1^{-1}]B} \\
& = A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}A_1^{-1}A_2^{-1}A_7\{A_8A_1^{-1}A_8^{-1}\}A_1^{-1}A_7^{-1}B \\
& = A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}A_1^{-1}A_2^{-1}[A_7][A_1^{-1}]A_8^{-1}\underline{A_1A_1^{-1}A_7^{-1}B} \\
& = A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}\{A_1^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}\}\{A_7A_8^{-1}A_7^{-1}\}B \\
& = A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}[A_2^{-1}][A_8^{-1}A_7^{-1}]A_8B \\
& = \{A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}A_8^{-1}A_7^{-1}\}A_2^{-1}A_8B = B^{-1}A_2^{-1}A_8B = A_1^{-1}A_7.
\end{aligned}$$

□

LEMAT 3.6. *Niech $g \geq 3$. Wtedy $A_{2g+1}A_1^{-1} \in G$.*

DOWÓD. Jeżeli $g = 3$ to teza wynika z Lematu 3.5. Załóżmy zatem, że $g \geq 4$. Zauważmy najpierw, że

$$(3.6.1) \quad \beta A_i \beta^{-1} = \sigma B A_i B^{-1} \sigma = A_j^{-1} \quad j \equiv i + 1 \pmod{2g + 2}.$$

Korzystając z powyższej relacji oraz z relacji (3.2.1) i (3.3.2), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& N^{-2}(\beta^4 N^2 \beta^{-4})(\beta^{-2} N^2 \beta^2)(\beta^2 N^{-2} \beta^{-2}) \\
& = (\underline{\rho} A_{2g+1} B^{-2} A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_{2g+1}^{-1}) \{ \beta^4 A_{2g+1} A_2 A_3 A_1^{-1} A_2^{-1} B^2 A_{2g+1}^{-1} \underline{\rho} \beta^{-4} \} \\
& \quad \{ \beta^{-2} A_{2g+1} A_2 A_3 A_1^{-1} A_2^{-1} B^2 A_{2g+1}^{-1} \underline{\rho} \beta^2 \} \{ \beta^2 \underline{\rho} A_{2g+1} B^{-2} A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_{2g+1}^{-1} \beta^{-2} \} \\
& = A_{2g+1} \{ B^{-2} A_2 A_1 A_3^{-1} A_2^{-1} A_{2g+1}^{-1} A_3 A_6 A_7 A_5^{-1} A_6^{-1} B^2 \} A_3^{-1} \\
& \quad A_{2g-1} A_{2g+2} A_1 A_{2g+1}^{-1} A_{2g+2}^{-1} \{ B^2 A_{2g-1}^{-1} A_1 B^{-2} \} A_4 A_3 A_5^{-1} A_4^{-1} A_1^{-1} \\
& = A_{2g+1} A_{2g+2} A_{2g+1} A_1^{-1} A_{2g+2}^{-1} A_{2g-1}^{-1} A_1 [A_4 A_5 A_3^{-1} A_4^{-1} A_3^{-1}] \\
& \quad [A_{2g-1} A_{2g+2} A_1 A_{2g+1}^{-1} A_{2g+2}^{-1} A_{2g+1}^{-1}] A_3 A_4 A_3 A_5^{-1} A_4^{-1} A_1^{-1} \\
& = A_{2g+1} A_{2g+2} A_{2g+1} A_1^{-1} A_{2g+2}^{-1} \underline{A_{2g-1}^{-1} A_1 A_{2g-1} A_{2g+2} A_1} \{ A_{2g+1}^{-1} A_{2g+2}^{-1} A_{2g+1}^{-1} \} \\
& \quad \underline{A_4 A_5 A_3^{-1} A_4^{-1} A_3^{-1} A_3 A_4 A_3 A_5^{-1} A_4^{-1} A_1^{-1}} \\
& = A_{2g+1} A_{2g+2} A_{2g+1} A_1^{-1} A_{2g+2}^{-1} \{ A_1 A_{2g+2} A_1 \} A_{2g+2}^{-1} A_{2g+1}^{-1} A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \\
& = A_{2g+1} \underline{A_{2g+2} A_{2g+1} A_1^{-1} A_{2g+2}^{-1} A_{2g+2} A_1 A_{2g+2}^{-1} A_{2g+1}^{-1} A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1}} \\
& = A_{2g+1} A_1^{-1}.
\end{aligned}$$

□

TWIERDZENIE 3.7 (Stukow [45], Twierdzenie 5). *Niech $g \geq 2$. Rozszerzona hipereliptyczna grupa klas odwzorowań jest generowana przez dwa elementy skończonego rzędu.*

DOWÓD. Na mocy Stwierżeń 3.2 i 3.3, wystarczy pokazać, że $G = \langle \beta, N \rangle$. Na mocy relacji (3.6.1) i Twierdzenia 1.13 wystarczy pokazać, że $A_i \in G$ dla pewnego $1 \leq i \leq 2g+2$ (patrz Uwaga 1.15).

Dla $g = 2$, na mocy Lematu 3.4, $A_3 \in G$. Załóżmy zatem, że $g \geq 3$.

Korzystając z Lematu 3.6 oraz relacji (3.6.1), otrzymujemy

$$A_{2g+1}A_1^{-1}, A_{2g}A_{2g+2}^{-1}, A_{2g-1}A_{2g+1}^{-1} \in G.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} G &\ni (A_{2g-1}A_{2g+1}^{-1})(A_{2g+1}A_1^{-1})(A_{2g+2}^{-1}A_{2g})\beta^{-1}N(A_{2g+1}A_{2g-1}^{-1}) \\ &= A_{2g-1}A_1^{-1}A_{2g+2}^{-1}A_{2g}(B^{-1}\sigma)(\sigma A_{2g+1}^{-1}A_1A_2A_1^{-1}BA_{2g+1}^{-1})A_{2g+1}A_{2g-1}^{-1} \\ &= A_{2g-1}A_1^{-1}A_{2g+2}^{-1}A_{2g}\{B^{-1}A_{2g+1}^{-1}A_1A_2A_1^{-1}B\}A_{2g-1}^{-1} \\ &= A_{2g-1}A_1^{-1}A_{2g+2}^{-1}A_{2g}A_{2g}^{-1}A_{2g+2}A_1A_{2g+2}^{-1}A_{2g-1}^{-1} \\ &= A_{2g-1}A_{2g+2}^{-1}A_{2g-1}^{-1} = A_{2g+2}^{-1}. \end{aligned}$$

□

3.3. Dodatkowe komentarze

Na zakończenie tego rozdziału wyjaśnimy krótko w jaki sposób udało się znaleźć generatory z Twierdzenia 3.7 oraz relacje z Lematów 3.4, 3.5 i 3.6.

Zacznijmy od tego, że jeżeli chcemy mieć dwa elementy q i r skończonego rzędu generujące grupę $\mathcal{M}_g^{h\pm}$, to dla każdego epimorfizmu $\varphi: \mathcal{M}_g^{h\pm} \rightarrow G$, $\varphi(q)$ i $\varphi(r)$ muszą generować G . Ta prosta obserwacja pozwala wyznaczyć kilka warunków koniecznych jakie muszą spełniać q i r .

- (1) Ponieważ każdy element $f \in \mathcal{M}_g^{h\pm}$ permutuje zbiór $\{z_1, \dots, z_{2g+2}\}$ punktów stałych inwolucji ρ , więc mamy epimorfizm $\varphi: \mathcal{M}_g^{h\pm} \rightarrow S_{2g+2}$, gdzie S_{2g+2} oznacza grupę permutacji zbioru $2g+2$ elementowego. Oczywiście $\varphi(q)$ i $\varphi(r)$ muszą generować tę grupę.
- (2) Korzystając z przedstawienia grupy \mathcal{M}_g^h zawartego w Twierdzeniu 1.13, łatwo sprawdzić, że $H_1(\mathcal{M}_g^h, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m$, gdzie $m = 4g+2$ dla g parzystego, oraz $m = 8g+4$ dla g nieparzystego. Niech $\pi: \mathcal{M}_g^h \rightarrow \mathbb{Z}_m$ będzie rzutowaniem kanonicznym oraz niech $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_m$, tzn. w G mamy działanie (będziemy używać notacji addytywnej)

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, (-1)^c b + d).$$

Każdy $f \in \mathcal{M}_g^{h\pm}$ możemy zapisać w postaci $f = \sigma^\varepsilon f^+$, gdzie $\varepsilon \in \{0, 1\}$ oraz $f^+ \in \mathcal{M}_g^h$. Łatwo teraz sprawdzić, że odwzorowanie $\varphi: \mathcal{M}_g^{h\pm} \rightarrow G$ dane wzorem

$$\varphi(f) = (\varepsilon, \pi(f^+))$$

jest epimorfizmem. Jak poprzednio, $\varphi(q)$ i $\varphi(r)$ muszą generować G .

- (3) Na mocy Twierdzenia 1.18, mamy homomorfizm $\varphi: \mathcal{M}_g^{h\pm} \rightarrow \text{Sp}^\pm(2g, \mathbb{Z})$. Oczywiście sprawdzenie czy dla jakichś konkretnych $q, r \in \mathcal{M}_g^{h\pm}$, $\varphi(q)$ i $\varphi(r)$ generują $\varphi(\mathcal{M}_g^{h\pm})$ jest rzeczą niezwykle trudną, dlatego wygodniej jest brać indukowany homomorfizm $\varphi_p: \mathcal{M}_g^{h\pm} \rightarrow \text{Sp}^\pm(2g, \mathbb{Z}_p)$, gdzie p

jest liczbą pierwszą. Ponieważ grupy $\mathrm{Sp}^\pm(2g, \mathbb{Z}_p)$ są skończone (choć bardzo duże) oraz na ogół $\varphi_p(\mathcal{M}_g^{h\pm}) = \mathrm{Sp}^\pm(2g, \mathbb{Z}_p)$, więc używając programów do obliczeń symbolicznych (w naszym przypadku był to GAP [17]), możliwe jest wykonanie odpowiedniego sprawdzenia (oczywiście tylko dla małych wartości g i p).

Oczywiście aby powyższa procedura szukania dobrych kandydatów na q i r mogła być skuteczna potrzebna jest duża ilość przykładów elementów skończonego rzędu w grupie $\mathcal{M}_g^{h\pm}$. Dobrym źródłem takich przykładów (na mocy Twierdzenia 1.10, w pewnym sensie jest to źródło wszystkich przykładów) jest podnoszenie elementów skończonego rzędu w grupie $\mathcal{M}_{0,2g+2}^\pm$ – patrz uwagi przed dowodem Twierdzenia 2.1.

Po znalezieniu kandydatów na q i r pozostaje problem wykazania, że rzeczywiście generują one grupę $\mathcal{M}_g^{h\pm}$, co w powyższym dowodzie sprowadza się do znalezienia i uzasadnienia odpowiednich relacji (Lematy 3.4, 3.5 i 3.6). Relacje te zostały znalezione w oparciu o punkt (3) powyżej. Mówiąc bardziej precyzyjnie, używając komputera, można (dla małych wartości g i p) znaleźć relacje wyrażające np. $\varphi_p(A_i)$ w generatorach $\varphi_p(q)$ i $\varphi_p(r)$. Wyszukując wśród tych relacji takie, które nie zmieniają się przy zmianie p możemy mieć nadzieję, że znaleźliśmy relacje pochodzące z grupy $\mathcal{M}_g^{h\pm}$. Oczywiście trzeba mieć przy tym trochę szczęścia – w naszym przypadku, kilkumiesięczne poszukiwania zakończyły się sukcesem.

Inwolucje jako generatory hipereliptycznych grup klas odwzorowań

Jak pokażemy w Stwierdzeniu 4.1 poniżej, grupa \mathcal{M}_g^h nie jest generowana przez inwolucje. Głównym celem tego rozdziału jest wyliczenie indeksu podgrupy I_g grupy \mathcal{M}_g^h generowanej przez inwolucje (Twierdzenie 4.7). Pokażemy także, że grupa $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ jest generowana przez trzy symetrie (Twierdzenie 4.8). Podobnie jak w poprzednim rozdziale, przyjmijmy założenie, że $g \geq 2$.

4.1. Inwolucje w hipereliptycznej grupie klas odwzorowań

Na mocy Twierdzenia 1.13, mamy

$$H_1(\mathcal{M}_g^h, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{4g+2} & \text{jeżeli } g \text{ parzyste,} \\ \mathbb{Z}_{8g+4} & \text{jeżeli } g \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$

Ponieważ żadna z grup \mathbb{Z}_{4g+2} ani \mathbb{Z}_{8g+4} nie jest generowana przez inwolucje oraz $H_1(\mathcal{M}_g^h, \mathbb{Z})$ jest obrazem homomorficznym grupy \mathcal{M}_g^h więc otrzymujemy następujące

STWIERDZENIE 4.1. *Grupa \mathcal{M}_g^h nie jest generowana przez inwolucje.* \square

LEMAT 4.2.

$$(A_1 A_{2g+2}^{-1} B)^{2g} = \varrho.$$

DOWÓD. Pokażemy indukcyjnie, że dla każdego $1 \leq k \leq 2g$

$$(4.2.1) \quad (A_1 A_{2g+2}^{-1} B)^k = (A_1 A_2 \dots A_k) (A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \dots A_{k-1}^{-1}) B^k.$$

Dla $k = 1$ powyższa równość jest oczywiście spełniona. Załóżmy zatem, że

$$(A_1 A_{2g+2}^{-1} B)^{k-1} = (A_1 A_2 \dots A_{k-1}) (A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \dots A_{k-2}^{-1}) B^{k-1}.$$

Korzystając z relacji (1.14.4) i (1.14.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (A_1 A_{2g+2}^{-1} B)^k &= (A_1 A_2 \dots A_{k-1}) (A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \dots A_{k-2}^{-1}) B^{k-1} (A_1 A_{2g+2}^{-1} B) \\ &= (A_1 A_2 \dots A_{k-1}) (A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \dots A_{k-2}^{-1}) \{B^{k-1} A_1 A_{2g+2}^{-1}\} B \\ &= (A_1 A_2 \dots A_{k-1}) [A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \dots A_{k-2}^{-1}] [A_k] A_{k-1}^{-1} B^k \\ &= (A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k) (A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \dots A_{k-2}^{-1} A_{k-1}^{-1}) B^k, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Podstawiając w równości (4.2.1) $k = 2g$ oraz korzystając z relacji (1.14.1)–(1.14.3), (1.14.7), (1.16.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (A_1 A_{2g+2}^{-1} B)^{2g} &= (A_1 A_2 \dots A_{2g}) (A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \dots A_{2g-1}^{-1}) B^{2g} \\ &= (A_1 A_2 \dots A_{2g} A_{2g+1}) (A_{2g+1}^{-1} A_{2g+2}^{-1} A_1^{-1} \dots A_{2g-1}^{-1}) B^{2g} \\ &= B \bar{B}^{-1} B^{2g} = \varrho B^2 B^{2g} = \varrho. \end{aligned}$$

□

LEMAT 4.3. *Niech*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą wymiaru $g \times g$, gdzie $g = 2n + 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} \chi(Q) &= (1 - \lambda^2)^n (1 - \lambda), \\ \chi(-Q) &= (\lambda^2 - 1)^n (-1 - \lambda), \end{aligned}$$

gdzie $\chi(\cdot)$ oznacza wielomian charakterystyczny.

DOWÓD. Dodając do i -tej kolumny macierzy $Q - \lambda I$ kolumnę o numerze $(g - i + 1)$ pomnożoną przez λ , dla $i = 1, \dots, n$, otrzymujemy

$$\det(Q - \lambda I) = (1 - \lambda^2)^n (1 - \lambda).$$

Drugą równość dowodzi się analogicznie. □

Oznaczmy przez S półobrót powierzchni T_g względem osi y jak na Rysunku 1.5.

STWIERDZENIE 4.4. *Liczba klas sprzężoności inwolucji w grupie \mathcal{M}_g^h wynosi 2 dla g parzystego, oraz 3 dla g nieparzystego. Przykładami reprezentantów tych klas są ϱ, S oraz $\varrho, S, \varrho S$ odpowiednio.*

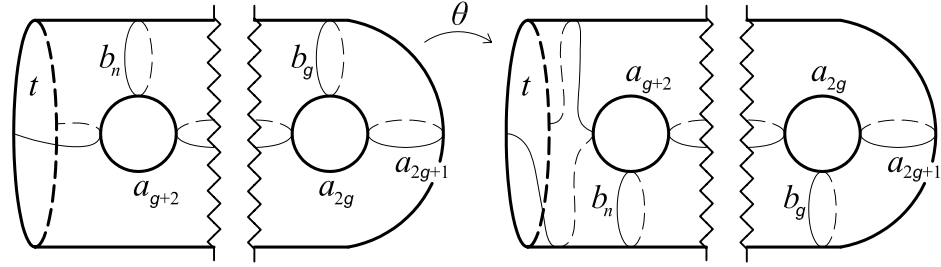
DOWÓD. Ponieważ inwolucja ϱ jest centralna, więc jej klasa sprzężoności jest jednoelementowa. Wystarczy zatem zbadać ilość klas sprzężoności inwolucji różnych od ϱ .

Niech $R \in \mathcal{M}_g^h$ będzie inwolucją i niech $H = \langle R, \varrho \rangle$. Oczywiście H ma rząd 4 i zawiera ϱ . Na mocy Twierdzenia 4 z pracy [43], istnieją dokładnie dwie klasy sprzężoności podgrup \mathcal{M}_g^h o tych własnościach. Aby zidentyfikować te klasy, wystarczy znaleźć dwa niesprężone przykłady takich podgrup. Pierwszym przykładem jest grupa $\langle S, \varrho \rangle$. Drugim przykładem, na mocy Lematu 4.2, jest grupa cykliczna $\langle (A_1 A_{2g+2}^{-1} B)^g \rangle$.

Grupa H , będąc grupą dihedralną, jest zatem sprzężona z $\langle S, \varrho \rangle$. Otrzymujemy więc, że R jest sprzężone z S lub z ϱS . Aby zakończyć dowód Stwierdzenia, wystarczy pokazać, że S i ϱS są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy g jest parzyste.

Przypuśćmy najpierw, że g jest parzyste i niech t będzie okręgiem stałym inwolucji S (w języku Rysunku 1.5, t jest częścią wspólną T_g oraz płaszczyzny

yz). Niech T_g^+ oraz T_g^- będą domknięciami składowych spójności zbioru $T_g \setminus t$, przy czym T_g^+ zawiera a_{2g+1} a T_g^- zawiera a_1 (innymi słowy T_g^+ jest prawą połówką a T_g^- lewą – patrz Rysunek 1.5). Jeżeli teraz wykonamy półobrót T_g^+ wokół osi x w ten sposób aby na t mieć identyczność, to otrzymamy pewien homeomorfizm θ , który po przedłużeniu identycznością na T_g^- możemy traktować jako homeomorfizm T_g (Rysunek 4.1). Wprowadzicie dla naszych potrzeb wystarczy



RYСУNEK 4.1. Działanie homeomorfizmu θ dla $g = 2n - 2$.

powyższa geometryczna definicja θ , warto jednak odnotować, że nietrudno jest znaleźć przedstawienie θ w generatorach z Twierdzenia 1.13 i jest ono następujące

$$\theta = (A_{g+2}A_{g+3} \cdots A_{2g}A_{2g+1})^{g+1}.$$

Homeomorfizm θ jest zwykle nazywany *pół-skręceniem*, ze względu na oczywistą własność $\theta^2 = T$, gdzie T skręcenie względem t . Zauważmy, że z geometrycznej definicji θ i S wynika, że $S\theta^{-1}S^{-1}$ jest też pół-skręceniem, ale działającym na T_g^- . Mamy zatem

$$\theta(S\theta^{-1}S^{-1}) = \rho,$$

czyli $\theta S\theta^{-1} = \rho S$.

Założmy teraz, że g jest nieparzyste. Jeżeli za bazę $H_1(T_g, \mathbb{R})$ przyjmiemy klasy homologii okręgów $a_2, a_4, \dots, a_{2g}, b_1, b_2, \dots, b_g$, to odwzorowania ρ i S indukują na $H_1(T_g, \mathbb{R})$ odpowiednio

$$\rho_* : (a_2, a_4, \dots, a_{2g}, b_1, b_2, \dots, b_g) \mapsto (-a_2, -a_4, \dots, -a_{2g}, -b_1, -b_2, \dots, -b_g),$$

$$S_* : (a_2, a_4, \dots, a_{2g}, b_1, b_2, \dots, b_g) \mapsto (-a_{2g}, -a_{2g-2}, \dots, -a_2, -b_g, -b_{g-1}, \dots, -b_1),$$

co oznacza, że

$$S_* = \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & -Q \end{bmatrix}, \quad (\rho S)_* = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

gdzie Q jest macierzą rozmiaru $g \times g$ jak w Lemacie 4.3. Na mocy tego właśnie lematu

$$\begin{aligned} \chi(S_*) &= (\chi(Q))^2 = (1 - \lambda^2)^{g-1}(-1 - \lambda)^2, \\ \chi((\rho S)_*) &= (\chi(-Q))^2 = (1 - \lambda^2)^{g-1}(1 - \lambda)^2, \end{aligned}$$

co dowodzi, że S i ρS nie mogą być sprzężone w grupie \mathcal{M}_g^h (ani nawet w \mathcal{M}_g^{\pm}). \square

LEMAT 4.5. Dla każdego $3 \leq i \leq 2g$, istnieje $F_i \in \mathcal{M}_g^h$ taki, że $F(a_1) = a_1$ oraz $F(a_i) = a_{2g+1}$.

DOWÓD. Niech $D_j = A_j A_{j+1}$ dla $3 \leq j \leq 2g$. Łatwo sprawdzić, że mamy wtedy $D_j(a_1) = a_1$ oraz $D_j(a_j) = a_{j+1}$. Możemy zatem zdefiniować F_i wzorem

$$F_i = D_{2g} D_{2g-1} \cdots D_i.$$

□

Oznaczmy przez I_g podgrupę grupy \mathcal{M}_g^h generowaną przez inwolucje. Oczywiście I_g jest podgrupą normalną.

LEMAT 4.6. *Iloraz \mathcal{M}_g^h/I_g jest grupą cykliczną.*

DOWÓD. Ponieważ $S(a_1) = a_{2g+1}^{-1}$, więc na mocy Stwierdzenia 1.4,

$$(4.6.1) \quad A_1 A_{2g+1}^{-1} = A_1 (S A_1^{-1} S^{-1}) = (A_1 S A_1^{-1}) S^{-1} \in I_g.$$

Korzystając z Lematu 4.5, otrzymujemy

$$(4.6.2) \quad A_1 A_i^{-1} = F_i^{-1} (A_1 A_{2g+1}^{-1}) F_i \in I_g \quad \text{dla } 3 \leq i \leq 2g.$$

Mamy ponadto

$$(4.6.3) \quad A_{2g+1} A_2^{-1} = S (A_1 A_{2g}^{-1}) S^{-1} \in I_g.$$

Relacje (4.6.1)–(4.6.3) oznaczają, że wszystkie skręcenia A_1, \dots, A_{2g+1} są równe modulo I_g . Ponieważ na mocy Twierdzenia 1.13, generują one \mathcal{M}_g^h , oznacza to, że grupa \mathcal{M}_g^h/I_g jest cykliczna. □

TWIERDZENIE 4.7 (Stukow [45], Twierdzenie 8). *Iloraz \mathcal{M}_g^h/I_g jest grupą cykliczną rzędu $2g+1$ dla g parzystego, oraz $4g+2$ dla g nieparzystego.*

DOWÓD. Niech $\pi: \mathcal{M}_g^h \rightarrow H_1(\mathcal{M}_g^h, \mathbb{Z})$ będzie rzutowaniem kanonicznym. Na mocy Lematu 4.6, $[\mathcal{M}_g^h, \mathcal{M}_g^h] \leq I_g$, a zatem

$$(4.7.1) \quad [\mathcal{M}_g^h : I_g] = [\mathcal{M}_g^h / [\mathcal{M}_g^h, \mathcal{M}_g^h] : I_g / [\mathcal{M}_g^h, \mathcal{M}_g^h]] = [H_1(\mathcal{M}_g^h, \mathbb{Z}) : \pi(I_g)].$$

Na mocy przedstawienia grupy \mathcal{M}_g^h zawartego w Twierdzeniu 1.13, wiemy, że grupa $H_1(\mathcal{M}_g^h, \mathbb{Z})$ jest generowana przez $\pi(A_i)$ oraz

$$H_1(\mathcal{M}_g^h, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{4g+2} & \text{jeżeli } g \text{ parzyste,} \\ \mathbb{Z}_{8g+4} & \text{jeżeli } g \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$

Zauważmy, że ponieważ $B = A_1 \cdots A_{2g+1}$ jest elementem rzędu $2g+2$ (Twierdzenie 1.14), to B^{g+1} jest inwolucją. Inwolucja ta nie jest centralna, jest zatem, na mocy Stwierdzenia 4.4, sprzężona z S lub z ϱS . Korzystając raz jeszcze ze Stwierdzenia 4.4 oraz z relacji (1.14.1)–(1.14.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \pi(I_g) &= \langle \pi(\varrho), \pi(S), \pi(\varrho S) \rangle = \langle \pi(\varrho), \pi(B^{g+1}) \rangle = \langle 2(2g+1), (g+1)(2g+1) \rangle \\ &= \begin{cases} \langle 2g+1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 & \text{jeżeli } g \text{ parzyste,} \\ \langle 2(2g+1) \rangle \cong \mathbb{Z}_2 & \text{jeżeli } g \text{ nieparzyste.} \end{cases} \end{aligned}$$

W połączeniu z relacją (4.7.1) kończy to dowód Twierdzenia. □

4.2. Generowanie rozszerzonej hiperliptycznej grupy klas odwzorowań przez trzy symetrie

Twierdzenie 4.8 (Stukow [45], Twierdzenie 9). *Grupa $\mathcal{M}_g^{h\pm}$ jest generowana przez trzy symetrie.*

Dowód. Niech $\tau \in \mathcal{M}_g^{h\pm}$ będzie symetrią względem płaszczyzny xy jak na Rysunku 1.5. Na mocy Stwierdzenia 1.4, mamy

$$\tau B \tau = \tau(A_1 A_2 \cdots A_{2g+1}) \tau = A_{2g+1}^{-1} A_{2g}^{-1} \cdots A_1^{-1} = B^{-1}$$

oraz $\tau A_{g+1} \tau = A_{g+1}^{-1}$. Zatem $\varepsilon_1 = \tau B$ oraz $\varepsilon_2 = \tau A_{g+1}$ są symetriami. Ponadto $A_{g+1}, B \in \langle \tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$, co na mocy Uwagi 1.15 oznacza, że $\langle \tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \mathcal{M}_g^{h\pm}$. \square

Bibliografia

- [1] E. Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 4:47–72, 1926.
- [2] E. Artin. Theory of braids. *Ann. of Math.*, 48:101–126, 1947.
- [3] S. J. Bigelow and R. D. Budney. The mapping class group of a genus two surface is linear. *Algebr. Geom. Topol.*, 1:699–708, 2001.
- [4] J. S. Birman. *Braids, Links, and Mapping Class Groups*. Number 82 in Ann. of Math. Studies. Princeton Univ. Press, 1974.
- [5] J. S. Birman and T. E. Brendle. Braids: a survey. arXiv:math.GT/0409205 v2, 2004.
- [6] J. S. Birman. and D. R. J. Chillingworth. On the homeotopy group of a non-orientable surface. *Math. Proc. Cambridge. Philos. Soc.*, 71:437–448, 1972.
- [7] J. S. Birman and H. M. Hilden. On mapping class groups of closed surfaces as covering spaces. In *Advances in the theory of Riemann surfaces*, number 66 in Ann. of Math. Studies, pages 81–115. Princeton Univ. Press, 1971. Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969.
- [8] T. E. Brendle and B. Farb. Every mapping class group is generated by 6 involutions. *J. Algebra*, 278(1):187–198, 2004.
- [9] A. J. Casson and S. A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*. Number 9 in London Math. Soc. Stud. Texts. Cambridge Univ. Press, 1989.
- [10] D. R. J. Chillingworth. A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface. *Math. Proc. Cambridge. Philos. Soc.*, 65:409–430, 1969.
- [11] M. Dehn. *Papers in group theory and topology*. Springer-Verlag, 1987. Translated and introduced by John Stillwell.
- [12] M. Dehn. On curve systems on two-sided surfaces, with application to the mapping problem. In [11], pages 234–252, Breslau 11-2-1922. Lecture (supplemented) to the math. colloquium.
- [13] H. Endo, M. Korkmaz, D. Kotschick, B. Ozbagci, and A. I. Stipsicz. Commutators, Lefschetz fibrations and the signatures of surface bundles. *Topology*, 41:961–977, 2002.
- [14] D. B. A. Epstein. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math.*, 115:83–107, 1966.
- [15] B. Farb and N. V. Ivanov. The Torelli geometry and its applications. *Math. Res. Lett.*, 12(2–3):293–301, 2005.
- [16] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poénaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces, Séminaire Orsay*, volume 66–67 of *Astérisque*. Soc. Math. de France, 1979.
- [17] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.2, Aachen, St Andrews, 1999. <http://www.gap-system.org>.
- [18] G. Gromadzki and M. Stukow. Involving symmetries of Riemann surfaces to a study of the mapping class group. *Publ. Mat.*, 48(1):103–106, 2004.
- [19] Y. Z. Gurtas. Positive dehn twist expressions for some new involutions in mapping class group. arXiv:math.GT/0404310 v1, 2004.
- [20] W. J. Harvey and M. Korkmaz. Homomorphisms from mapping class groups. *Bull. London Math. Soc.*, 37(2):275–284, 2005.
- [21] A. Hatcher and W. P. Thurston. A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface. *Topology*, 30(1):63–88, 1998.
- [22] S. P. Humphries. Generators for the mapping class group. In *Topology of low-dimensional manifolds*, volume 722 of *Lecture Notes in Math.*, pages 44–47. Springer-Verlag, 1979. Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977.
- [23] M. Kassabov. Generating mapping class groups by involutions. arXiv:math.GT/0311455 v1, 2003.

-
- [24] S. P. Kerckhoff. The Nielsen realization problem. *Ann. of Math.*, 117(2):235–265, 1983.
- [25] M. Korkmaz. On the linearity of certain mapping class groups. *Turkish J. Math.*, 24(4):367–371, 2000.
- [26] M. Korkmaz. Generating the surface mapping class group by two elements. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(8):3299–3310, 2005.
- [27] M. Korkmaz and B. Ozbagci. Minimal numbers of singular fibers in a lefschetz fibration. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129:1545–1549, 2001.
- [28] W. B. R. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Ann. of Math.*, 76:531–540, 1962.
- [29] W. B. R. Lickorish. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 60:769–778, 1964.
- [30] N. Lu. On the mapping class groups of the closed orientable surfaces. *Topology Proc.*, 13(2):293–324, 1988.
- [31] F. Luo. Torsion elements in the mapping class group of a surface. arXiv:math.GT/0004048 v1, 2000.
- [32] C. Maclachlan. Modulus space is simply-connected. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29(1):85–86, 1971.
- [33] W. Magnus. Über automorphismen von Fundamentalgruppen beraneter Flächen. *Math. Ann.*, 109:617–646, 1934.
- [34] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial group theory*. Dover Publications, 1976. Second revised edition.
- [35] J. McCarthy and A. Papadopoulos. Involutions in surface mapping class groups. *Enseign. Math.*, 33(3–4):275–290, 1987.
- [36] S. Morita. Mapping class groups of surfaces and three-dimensional manifolds. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol I, II (Kyoto, 1990)*, pages 665–674. Math. Soc. Japan, 1991.
- [37] S. Morita. The structure of the mapping class group and characteristic classes of surface bundles. In C.-F. Bödigheimer and R. Hain, editors, *Mapping class groups and moduli of Riemann surfaces*, number 150 in Contemp. Math., pages 303–315, 1993.
- [38] J. Nielsen. Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I. *Acta Math.*, 50:189–358, 1927.
- [39] J. Nielsen. Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen II. *Acta Math.*, 53:1–76, 1929.
- [40] J. Nielsen. Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen III. *Acta Math.*, 58:87–167, 1932.
- [41] D. B. Patterson. The fundamental group of modulus space. *Michigan Math. J.*, 26(2):213–223, 1979.
- [42] M. Stukow. Grupa homeotopii powierzchni orientowalnej. Praca magisterska UG, 2002.
- [43] M. Stukow. Conjugacy classes of finite subgroups of certain mapping class groups. *Turkish J. Math.*, 28(2):101–110, 2004.
- [44] M. Stukow. The extended mapping class group is generated by 3 symmetries. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(5):403–406, 2004.
- [45] M. Stukow. Small torsion generating sets for hyperelliptic mapping class groups. *Topology Appl.*, 145(1–3):83–90, 2004.
- [46] B. Szepietowski. The mapping class group of a nonorientable surface is generated by three elements and by four involutions. To appear in *Geom. Dedicata*.
- [47] B. Szepietowski. Mapping class group of a non-orientable surface and moduli space of Klein surfaces. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(12):1053–1056, 2002.
- [48] B. Szepietowski. Involutions in mapping class groups of nonorientable surfaces. *Collect. Math.*, 55(3):253–260, 2004.
- [49] W. P. Thurston. The geometry and topology of three-manifolds. Notes form Princeton University, 1976.
- [50] W. P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 19(2):417–431, 1988.

-
- [51] B. Wajnryb. A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface. *Israel J. Math.*, 45(2-3):157-174, 1983.
 - [52] B. Wajnryb. Mapping class group of a surface is generated by two elements. *Topology*, 35(2):377-383, 1996.
 - [53] A. Wiman. Über die hyperelliptischen Kurven und diejenigen vom Geschlecht $p = 3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. *Bihang Till. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handl.*, 21(1):1-23, 1895.
 - [54] H. Zeischang, E. Vogt, and H.-D. Coldewey. *Surfaces and planar discontinuous groups*. Number 835 in Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1980.