

UNIwersytet Gdański

**Rozszerzona grupa homeotopii  
powierzchni orientowalnej**

Michał Stukow

PRACA MAGISTERSKA NAPISANA  
W ZAKŁADZIE TOPOLOGII INSTYTUTU MATEMATYKI  
POD KIERUNKIEM  
PROF. DR. HAB. GRZEGORZA GROMADZKIEGO

Gdańsk 2002

*O ile mogę sądzić, źródłem wszystkich  
apriorycznych stwierdzeń fizyki jest symetria.*  
H. Weyl

## Spis treści

Wstęp	1
Rozdział 1. Podgrupy grupy izometrii płaszczyzny hiperbolicznej	2
1. Grupy NEC	2
2. Grupy Fuchsa	4
3. Powierzchnie Riemanna i ich automorfizmy	5
Rozdział 2. Symetrie powierzchni Riemanna	8
1. Typ topologiczny symetrii	8
2. Wyznaczanie ilości owali	10
3. Doskonałe pary symetrii	12
Rozdział 3. Grupa homeotopii	14
1. Skręcenia Dehna	14
2. Generatory grupy $\mathcal{M}_g$	17
3. Hipereliptyczna grupa homeotopii	18
Rozdział 4. Symetrie w rozszerzonej grupie homeotopii	22
1. Rozszerzona grupa homeotopii	22
2. Symetrie w grupie homeomorfizmów powierzchni	22
3. Symetrie w grupie homeotopii	27
4. Doskonałość grupy $\mathcal{M}_g$	28
Bibliografia	30

## Wstęp

Jeżeli  $T_g$  jest zamkniętą powierzchnią orientowalną, to grupą homeotopii  $\mathcal{M}_g$  tej powierzchni nazywamy grupę klas izotopii jej homeomorfizmów zachowujących orientację. Celem poniższej pracy jest zbadanie podstawowych własności rozszerzonej grupy homeotopii  $\mathcal{M}_g^\pm$ , tzn. grupy klas izotopii wszystkich homeomorfizmów powierzchni  $T_g$ , również tych zmieniających orientację. Posługując się skończonym zbiorem generatorów grupy  $\mathcal{M}_g$  podanym przez Lickorisha [13] dowodzimy, że grupa  $\mathcal{M}_g^\pm$  jest generowana przez symetrie. Następnie rozkładając podane przez Wajnryba [17] dwa generatory grupy  $\mathcal{M}_g$  na iloczyny dwóch symetrii, pokazujemy, że grupa  $\mathcal{M}_g^\pm$  jest generowana przez cztery symetrie. Wspomniane wyniki są nowe i jak dotąd niepublikowane. Jako przykład zastosowania symetrii jako generatorów grupy  $\mathcal{M}_g^\pm$  podajemy nowy dowód doskonałości grupy homeotopii.

Jednym z powodów dużego znaczenia grupy homeotopii, jest jej rola w konstrukcji przestrzeni moduli powierzchni Riemanna. Mówiąc dokładniej grupa  $\mathcal{M}_g$  działa jako grupa izometrii na przestrzeni Teichmüllera  $\mathbf{T}_g$  oraz przestrzeń orbit tego działania jest przestrzenią moduli zwartych powierzchni Riemanna rodzaju  $g$ . Okazuje się, że działanie grupy  $\mathcal{M}_g$  na przestrzeni Teichmüllera  $\mathbf{T}_g$  można przedłużyć do działania grupy  $\mathcal{M}_g^\pm$  i jako przestrzeń orbit tego działania otrzymujemy przestrzeń moduli struktur powierzchni Kleina na powierzchni  $T_g$ .

Struktura pracy odzwierciedla dualność stosowanych w niej metod. Z jednej strony są to metody topologiczne, z drugiej natomiast używamy kombinatorycznych metod teorii grup automorfizmów powierzchni Riemanna. Pierwszy rozdział zawiera podstawowe wiadomości z teorii grup NEC i Fuchsa, oraz wyjaśnia ich związek z grupami automorfizmów powierzchni Riemanna. Rozdział drugi jest poświęcony symetriom powierzchni Riemanna. Posługując się dziewiętnastowiecznym twierdzeniem Harnacka definiujemy typ topologiczny symetrii i pokazujemy jak w pewnych sytuacjach można go efektywnie wyznaczyć. Na koniec dowodzimy dwóch technicznych lematów, które zostaną wykorzystane w rozdziale czwartym do dowodu doskonałości grupy homeotopii. W trzecim rozdziale wprowadzamy pojęcie grupy homeotopii oraz podajemy kilka twierdzeń opisujących jej generatory. Jako produkt uboczny naszych rozważań otrzymujemy dowód tego, że jest ona generowana przez trzy elementy. W rozdziale czwartym, badamy podstawowe własności rozszerzonej grupy homeotopii. Dowodzimy, że grupa ta jest generowana przez cztery symetrie, oraz podajemy nowy dowód jej doskonałości.

Pragnę bardzo serdecznie podziękować panu profesorowi Grzegorzowi Gromadzkiemu za zainteresowanie mnie tak ciekawą tematyką jak i za pomoc w przygotowaniu i redakcji pracy. Dziękuję również pani Aleksandrze Grabowskiej za pomoc w wykonaniu ilustracji.

## Podgrupy grupy izometrii płaszczyzny hiperbolicznej

Poniżej przedstawiamy podstawowe własności grup NEC i Fuchsa, z których będziemy korzystać w dalszej części pracy. Odsyłacze do oryginalnych prac jak i dowody większości z przedstawionych twierdzeń można znaleźć w [6].

### 1. Grupy NEC

DEFINICJA. Podgrupę  $\Lambda$  grupy izometrii płaszczyzny hiperbolicznej  $\mathcal{H}$  nazywamy *nieeuklidesową grupą krystalograficzną*, z ang. *NEC (non-euclidean crystallographic group)* o ile:

- (1)  $\Lambda$  działa w sposób nieciągły, tzn. dowolny punkt  $z \in \mathcal{H}$  posiada otoczenie otwarte  $U$  takie, że zbiór  $\{\lambda \in \Lambda \mid U \cap \lambda U \neq \emptyset\}$  jest skończony;
- (2) przestrzeń orbit  $\mathcal{H}/\Lambda$  jest przestrzenią zwartą.

#### 1.1. Przedstawienie grupy NEC.

DEFINICJA. *Obszarem fundamentalnym* działania NEC grupy  $\Lambda$  nazywamy dowolny domknięty podzbiór  $F$  płaszczyzny hiperbolicznej  $\mathcal{H}$  spełniający warunki

- (1) dla dowolnego punktu  $z \in \mathcal{H}$  istnieje  $\lambda \in \Lambda$  taki, że  $\lambda z \in F$ ;
- (2) jeżeli  $\lambda z \in \text{Int } F$  to element  $\lambda$  jest wyznaczony jednoznacznie;
- (3) pole zbioru  $F \setminus \text{Int } F$  jest równe zero.

STWIERDZENIE 1.1. *Dowolna NEC grupa  $\Lambda$  posiada obszar fundamentalny  $F$ , będący wielokątem wypukłym, oraz dla każdego z boków  $c$  takiego wielokąta istnieje jedyny element  $\lambda_c \in \Lambda$  taki, że  $F \cap \lambda_c F = c$ . Wielokąt  $F$  może być ponadto wybrany w taki sposób, że*

- jeżeli przestrzeń orbit  $\mathcal{H}/\Lambda$  jest orientowalna to bokom wielokąta  $F$  przyporządkowane są kolejno elementy

$$x_1, x_1^{-1}, \dots, x_r, x_r^{-1}, e_1, c_{10}, \dots, c_{1s_1}, e_1^{-1}, \dots, e_k, c_{k0}, \dots, c_{ks_k}, e_k^{-1}, \\ a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$$

- jeżeli przestrzeń orbit  $\mathcal{H}/\Lambda$  jest nieorientowalna to bokom wielokąta  $F$  przyporządkowane są kolejno elementy

$$x_1, x_1^{-1}, \dots, x_r, x_r^{-1}, e_1, c_{10}, \dots, c_{1s_1}, e_1^{-1}, \dots, e_k, c_{k0}, \dots, c_{ks_k}, e_k^{-1}, \\ d_1, d_1^{-1}, \dots, d_g, d_g^{-1}$$

gdzie  $x_1, \dots, x_r$  są obrotami hiperbolicznymi,  $c_{ij}$  są symetriami,  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  są translacjami hiperbolicznymi oraz każdy z elementów  $d_1, \dots, d_g$  jest symetrią z poślizgiem.

Przy oznaczeniach z tezy poprzedniego stwierdzenia, jeżeli przez  $m_i$  oznaczymy rząd elementu  $x_i$  a przez  $n_{ij}$  rząd elementu  $c_{ij-1}c_{ij}$  dla  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, s_i$ , to ciąg symboli

$$(1) \quad (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

gdzie na drugim miejscu mamy znak  $+$  lub  $-$  w zależności od tego czy przestrzeń  $\mathcal{H}/\Lambda$  jest orientowalna czy nie, nazywamy *sygnaturą* grupy  $\Lambda$  i oznaczamy  $\sigma(\Lambda)$ .

**TWIERDZENIE 1.2.** *Przy powyższych oznaczeniach, grupa  $\Lambda$  ma przedstawienie*

- *generatory*

$$\begin{cases} x_i & i = 1, \dots, r \\ c_{ij} & i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, s_i \\ e_i & i = 1, \dots, k \\ a_i, b_i & i = 1, \dots, g \text{ jeżeli sygnatura ma znak } + \\ d_i & i = 1, \dots, g \text{ jeżeli sygnatura ma znak } - \end{cases}$$

- *relacje*

$$\begin{cases} x_i^{m_i} = 1 & i = 1, \dots, r \\ c_{is_i} = e_i^{-1} c_{i0} e_i & i = 1, \dots, k \\ c_{ij}^2 = 1 & i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, s_i \\ (c_{ij-1} c_{ij})^{n_{ij}} = 1 & i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, s_i \\ x_1 \cdots x_r e_1 \cdots e_k [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 & \text{jeżeli sygnatura ma znak } + \\ x_1 \cdots x_r e_1 \cdots e_k d_1^2 \cdots d_g^2 = 1 & \text{jeżeli sygnatura ma znak } - \end{cases}$$

Generatory NEC grupy  $\Lambda$  opisane w powyższym twierdzeniu będziemy nazywać *generatorami kanonicznymi* (ze względu na obszar fundamentalny  $F$ ).

**STWIERDZENIE 1.3.** *Każda symetria NEC grupy  $\Lambda$  jest sprzężona z symetrią kanoniczną. Każdy element eliptyczny jest natomiast sprzężony bądź z potęgą kanonicznego generatora eliptycznego, bądź z potęgą iloczynu  $c_{ij-1}c_{ij}$  sąsiednich symetrii kanonicznych.*

Przez grupę o sygnaturze (1) będziemy rozumieć abstrakcyjną grupę o przedstawieniu jak w twierdzeniu 1.2, tzn. nie zakładamy, że pochodzi ona od pewnej grupy NEC.

## 1.2. Pole grupy NEC.

**DEFINICJA.** Jeżeli  $\Lambda$  jest grupą o sygnaturze (1), to *polem* grupy  $\Lambda$  nazywamy liczbę

$$\mu(\Lambda) = 2\pi \left( \varepsilon g' - 2 + k + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right) \right).$$

**TWIERDZENIE 1.4.** *Jeżeli  $\Lambda$  jest grupą NEC, to jej pole jest równe hiperbolicznemu polu dowolnego obszaru fundamentalnego  $F$ .*

**TWIERDZENIE 1.5.** *Abstrakcyjna grupa  $\Lambda$  o sygnaturze (1) może być zrealizowana jako grupa NEC wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu(\Lambda) > 0$ .*

### 1.3. Podgrupy grupy NEC.

**TWIERDZENIE 1.6** (wzór Hurwitza–Riemanna). *Jeżeli  $\Lambda' \leq \Lambda$  jest podgrupą skończonego indeksu NEC grupy  $\Lambda$ , to  $\Lambda'$  też jest grupą NEC i zachodzi związek*

$$\mu(\Lambda') / \mu(\Lambda) = [\Lambda : \Lambda'].$$

Założmy, że  $\Lambda'$  jest podgrupą normalną NEC grupy  $\Lambda$  sygnaturze (1). Generator kanoniczny grupy  $\Lambda$ , który nie należy do  $\Lambda'$  nazywamy *właściwym* (ze względu na podgrupę  $\Lambda'$ ). Element grupy  $\Lambda$  nazywamy *właściwym* (ze względu na podgrupę  $\Lambda'$ ) jeżeli można go przedstawić jako produkt generatorów właściwych. Przy wprowadzonych oznaczeniach i terminologii mamy następujące

**TWIERDZENIE 1.7.** *Jeżeli  $[\Lambda : \Lambda']$  jest liczbą parzystą, to sygnatura grupy  $\Lambda'$  ma znak  $-$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Lambda'$  zawiera kanoniczną symetrię z poślizgiem lub nieorientowalny element właściwy grupy  $\Lambda$ .*

Niech  $C(G, g)$  oznacza centralizator elementu  $g$ , w grupie  $G$ .

Kolejne twierdzenie jest rozwinięciem wyniku otrzymanego przez Singermana [15]. Jego dowód można znaleźć w [7].

**TWIERDZENIE 1.8.** *Jeżeli NEC grupa  $\Lambda$  ma sygnaturę (1) i dla ustalonego  $1 \leq i \leq k$  oznaczymy  $c_j = c_{ij}$ ,  $n_j = n_{ij}$ ,  $e = e_i$ ,  $s = s_i$  to mamy*

- jeżeli  $s > 0$  to

$$C(\Lambda, c_0) = \langle c_0, (ec_s e^{-1} c_0)^{n_s/2}, (c_0 c_1)^{n_1/2} \rangle$$

$$C(\Lambda, c_j) = \langle c_j, (c_{j-1} c_j)^{n_j/2}, (c_j c_{j+1})^{n_{j+1}/2} \rangle \quad \text{dla } s > j > 0$$

- jeżeli  $s = 0$  to

$$C(\Lambda, c_0) = \langle c_0, e \rangle$$

## 2. Grupy Fuchsa

**DEFINICJA.** NEC grupę  $\Gamma$  nazywamy grupą *Fuchsa* o ile nie zawiera elementów zmieniających orientację.

**PRZYKŁAD 1.9.** Jeżeli  $\Lambda$  jest grupą NEC, to zbiór  $\Lambda^+$  jej elementów zachowujących orientację jest grupą Fuchsa oraz  $[\Lambda : \Lambda^+] = 2$  lub  $1$ . Podgrupę  $\Lambda^+$  nazywamy *kanoniczną podgrupą Fuchsa* grupy  $\Lambda$ .

Ponieważ grupa Fuchsa nie zawiera elementów zmieniających orientację, więc jej sygnatura jest postaci:

$$(g; +; [m_1, \dots, m_r]; \{-\})$$

co będziemy krótko zapisywać jako

$$(g; m_1, \dots, m_r).$$

**DEFINICJA.** Grupę Fuchsa nazywamy *powierzchniową* grupą Fuchsa o ile nie zawiera obrotów hiperbolicznych, co na mocy stwierdzenia 1.3 jest równoważne temu, że ma ona sygnaturę postaci:

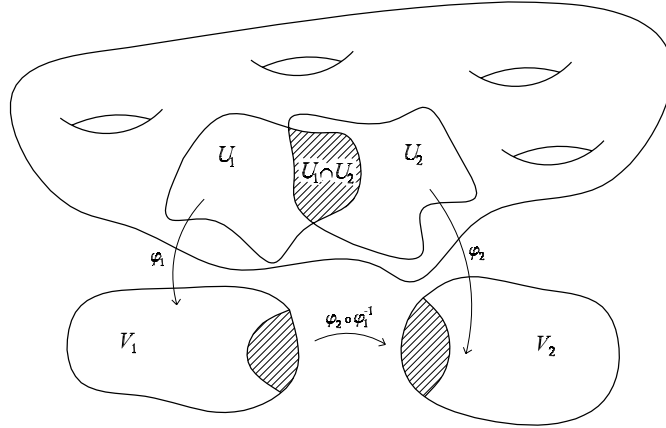
$$(2) \quad (g; -)$$

### 3. Powierzchnie Riemanna i ich automorfizmy

DEFINICJA. Niech  $U$  będzie otwartym podzbiorem powierzchni  $X$ . Homeomorfizm  $\varphi: U \rightarrow V$ , gdzie  $V \subseteq \mathbb{C}$  nazywamy *mapą zespoloną* na  $X$ . Dwie mapy  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ ,  $i = 1, 2$  nazywamy *analitycznie zgodnymi*, o ile odwzorowanie

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

jest analitycznym homeomorfizmem (rysunek 1).



RYSUNEK 1. Zgodność map  $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$  i  $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$ .

DEFINICJA. *Atlasem analitycznym* na powierzchni  $X$  nazywamy zbiór

$$\mathfrak{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i, i \in I\}$$

analitycznie zgodnych map taki, że  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ . Dwa atlasy  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{A}'$  nazywamy *analitycznie zgodnymi*, o ile każda mapa atlasu  $\mathfrak{A}$  jest analitycznie zgodna z każdą mapą atlasu  $\mathfrak{A}'$ .

STWIERDZENIE 1.10. *Relacja analitycznej zgodności atlasów jest relacją równoważności.*

DEFINICJA. *Strukturą zespoloną* na powierzchni  $X$  nazywamy klasę abstrakcji analitycznie zgodnych atlasów na  $X$ .

STWIERDZENIE 1.11. *Każda struktura zespolona na  $X$  zawiera atlas maksymalny.*

DEFINICJA. *Powierzchnią Riemanna* nazywamy parę  $(X, \Sigma)$ , gdzie  $\Sigma$  jest strukturą zespoloną na  $X$ .

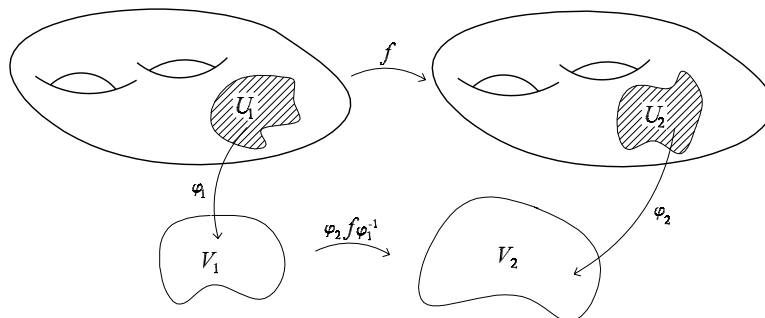
DEFINICJA. Jeżeli  $\mathfrak{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i, i \in I\}$  jest atlasem maksymalnym na powierzchni Riemanna  $X$  to ciągle odwzorowanie  $f: X \rightarrow X$  nazywamy

- *analitycznym*, o ile dla każdej pary map  $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$  i  $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$  takich, że  $f(U_1) \subseteq U_2$  odwzorowanie

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}: V_1 \rightarrow V_2$$

jest analityczne (rysunek 2).

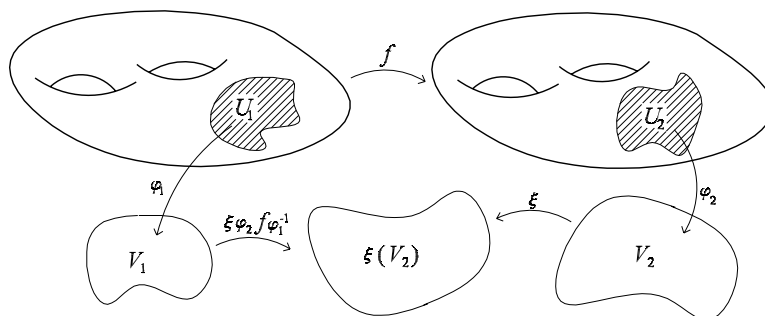


RYSUNEK 2. Lokalna postać odwzorowania analitycznego  $f: X \rightarrow X$ .

- *antyanalitycznym*, o ile dla każdej pary map  $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$  i  $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$  takich, że  $f(U_1) \subseteq U_2$  odwzorowanie

$$\xi \circ (\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}): V_1 \rightarrow \xi(V_2)$$

jest analityczne, gdzie  $\xi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  jest sprzężeniem, tzn.  $\xi(z) = \bar{z}$  (rysunek 3).

RYSUNEK 3. Lokalna postać odwzorowania antyanalitycznego  $f: X \rightarrow X$ .

- *dianalitycznym*, o ile jest analityczne bądź antyanalityczne.

DEFINICJA.

- (1) *Automorfizmem* powierzchni Riemanna  $X$ , nazywamy dianalityczny homeomorfizm tej powierzchni. Grupę wszystkich automorfizmów powierzchni  $X$  będziemy oznaczać przez  $\text{Aut}(X)$ .
- (2) Automorfizm powierzchni Riemanna  $X$  nazywamy analitycznym o ile jest on odwzorowaniem analitycznym. Grupę automorfizmów analitycznych oznaczamy przez  $\text{Aut}^+(X)$ .

STWIERDZENIE 1.12. Jeżeli  $X$  jest powierzchnią Riemanna, to

$$\text{Aut}^+(X) = \{f \in \text{Aut}(X) \mid f \text{ zachowuje orientację } X\}.$$

W szczególności  $[\text{Aut}(X) : \text{Aut}^+(X)] = 2$  lub  $1$ .

STWIERDZENIE 1.13. *Jeżeli  $\Gamma$  jest powierzchniową grupą Fuchsa o sygnaturze (2) to  $X = \mathcal{H}/\Gamma$  jest orientowalną powierzchnią rodzaju  $g$  i rzutowanie  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow X$  jest topologicznym nakryciem.*

STWIERDZENIE 1.14. *Jeżeli  $\Gamma$  jest powierzchniową grupą Fuchsa, to na  $X = \mathcal{H}/\Gamma$  można wprowadzić jedyną strukturę powierzchni Riemanna, przy której rzutowanie  $\pi: \mathcal{H} \rightarrow X$  jest analityczne. Jeżeli  $\Lambda \supseteq \Gamma$  jest grupą NEC, to grupa  $\Lambda/\Gamma$  działa na  $X$  jako grupa automorfizmów, przy czym jeżeli  $\Lambda$  jest grupą Fuchsa, to  $\Lambda/\Gamma$  działa na  $X$  jako grupa automorfizmów analitycznych.*

STWIERDZENIE 1.15. *Jeżeli  $X$  jest powierzchnią Riemanna rodzaju  $g \geq 2$  i  $\tilde{X} \rightarrow X$  jest nakryciem uniwersalnym, to podnosząc na  $\tilde{X}$  strukturę zespoloną z  $X$ , mamy  $\tilde{X} \cong \mathcal{H}$ . Ponadto grupa przekształceń nakrywających  $\Gamma$  jest powierzchniową grupą Fuchsa, taką że  $X \cong \mathcal{H}/\Gamma$ . Jeżeli  $\Lambda$  jest podniesieniem na nakrycie grupy  $\text{Aut}(X)$  to  $\Lambda \supseteq \Gamma$  jest grupą NEC oraz*

$$\Lambda/\Gamma \cong \text{Aut}(X).$$

*Ponadto jeżeli  $\Lambda^+$  jest kanoniczną podgrupą Fuchsa grupy  $\Lambda$  to*

$$\Lambda^+/\Gamma \cong \text{Aut}^+(X).$$

*O grupie  $\Gamma$  mówimy, że uniformizuje ona powierzchnię Riemanna  $X$ .*

## Symetrie powierzchni Riemanna

Przez *okrąg* na powierzchni topologicznej, będziemy rozumieć domkniętą podrozmaitość homeomorficzną z okręgiem.

### 1. Typ topologiczny symetrii

DEFINICJA. Antyanalityczną involucję powierzchni Riemanna nazywamy *symetrią* tej powierzchni.

TWIERDZENIE 2.1 (Harnack [9]). *Niech  $\sigma$  będzie symetrią powierzchni Riemanna  $X$  rodzaju  $g \geq 2$ . Wtedy zbiór punktów stałych  $\text{Fix}(\sigma)$  symetrii  $\sigma$  składa się z  $k$  rozłącznych okręgów zwanych owalami w terminologii Hilberta. Ponadto*

- jeżeli zbiór  $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$  jest spójny, to  $0 \leq k \leq g$
- w przeciwnym wypadku zbiór  $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$  ma dwie składowe spójności oraz

$$0 < k \leq g + 1, \quad k \equiv g + 1 \pmod{2}.$$

W pierwszym przypadku, symetrię  $\sigma$  nazywamy *symetrią nierozdzielającą*, w drugim – *symetrią rozdzielającą*.

DOWÓD. Jeżeli  $X = \mathcal{H}/\Gamma$  dla powierzchniowej grupy Fuchsa  $\Gamma$ , to  $\langle \sigma \rangle = \Lambda/\Gamma$  dla pewnej NEC grupy  $\Lambda$ . Ponieważ  $[\Lambda : \Gamma] = 2$ , więc grupa  $\Gamma$  jest kanoniczną podgrupą Fuchsa grupy  $\Lambda$ , tzn. składa się z tych elementów grupy  $\Lambda$ , które zachowują orientację  $\mathcal{H}$ . W szczególności, ponieważ  $\Gamma$  nie zawiera elementów eliptycznych, więc również  $\Lambda$  ich nie zawiera, co oznacza, że  $\Lambda$  ma sygnaturę postaci:

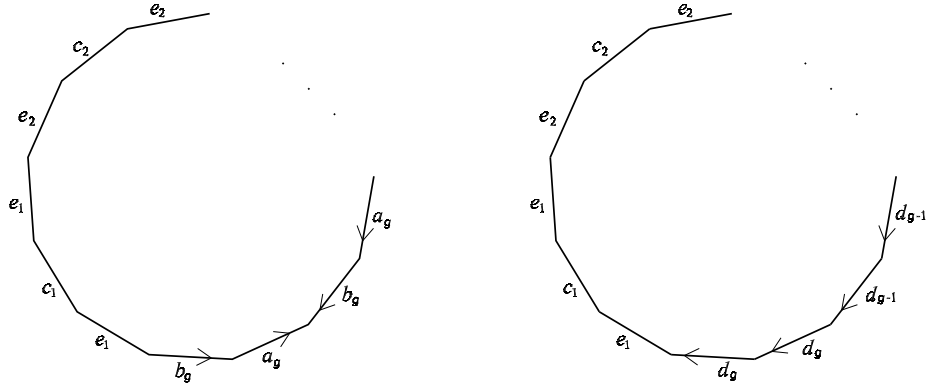
$$\sigma(\Lambda) = (g'; \pm; [-]; \{(-), \dots, (-)\}).$$

Przyjmując oznaczenia kanonicznych rzutowań na przestrzenie orbit jak w poniższym diagramie,

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H} & \\ & \downarrow \pi_\Gamma & \\ \pi_\Lambda \swarrow & \mathcal{H}/\Gamma & \xrightarrow{\cong} X \\ & \downarrow \tilde{\pi} & \downarrow \pi \\ & \mathcal{H}/\Lambda & \xrightarrow{\cong} X/\langle \sigma \rangle \end{array}$$

widzimy, że zbiór  $\pi(\text{Fix}(\sigma))$  można scharakteryzować jako zbiór tych punktów przestrzeni  $X/\langle \sigma \rangle$ , które nie posiadają otwartego otoczenia prawidłowo nakrytego przez  $\pi$ . Ponieważ rzutowanie  $\pi_\Gamma$  jest nakryciem, więc ten sam zbiór traktowany jako podzbiór przestrzeni  $\mathcal{H}/\Lambda$ , możemy scharakteryzować jako zbiór tych punktów, które nie mają otoczenia prawidłowo nakrytego przez  $\pi_\Lambda$ . Ten ostatni zbiór

pokrywa się natomiast z brzegiem przestrzeni  $\mathcal{H}/\Lambda$ , czyli składa się z  $k$  rozłącznych okręgów (rysunek 1). Ponieważ  $\pi|_{\text{Fix}(\sigma)}$  jest ciągłą i otwartą bijekcją, więc zbiory  $\text{Fix}(\sigma)$  i  $\pi(\text{Fix}(\sigma))$  są homeomorficzne, co dowodzi pierwszej części twierdzenia.



RYSUNEK 1. Obszar fundamentalny grupy  $\Lambda$  w przypadku gdy sygnatura ma znak  $+$  i  $-$ . W pierwszym przypadku iloraz jest powierzchnią orientowalną z brzegiem, w drugim natomiast jest powierzchnią nieorientowalną z brzegiem. W obu przypadkach brzeg składa się z  $k$  rozłącznych okręgów  $c_1, \dots, c_k$ .

Jeżeli zbiór  $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$  jest spójny, to obraz  $\pi(\tau)$  drogi  $\tau$ , łączącej dowolny punkt  $x \in X \setminus \text{Fix}(\sigma)$  z punktem  $\sigma(x)$  jest zmieniającą orientację pętlą w  $X/\langle\sigma\rangle \cong \mathcal{H}/\Lambda$ , co oznacza, że sygnatura grupy  $\Lambda$  jest postaci:

$$\sigma(\Lambda) = (g'; -; [-]; \{(-), \cdot^k, (-)\})$$

gdzie  $g' \geq 1$ . Korzystając teraz z tw. Hurwitza-Riemanna 1.6 otrzymujemy

$$\mu(\Gamma) = [\Lambda : \Gamma]\mu(\Lambda) = 2\mu(\Lambda)$$

co daje  $2\pi(2g - 2) = 2 \cdot 2\pi(g' - 2 + k)$ , zaś po uproszczeniach  $k = g + 1 - g'$ , skąd otrzymujemy żadaną nierówność  $0 \leq k \leq g$ .

Jeżeli natomiast zbiór  $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$  nie jest spójny, to  $k > 0$  oraz obcięcie  $\pi$  do każdej ze składowych jego spójności jest również nakryciem. Ponieważ jednak  $\pi|_{X \setminus \text{Fix}(\sigma)}$  jest nakryciem dwukrotnym, więc zbiór ten ma dokładnie dwie składowe spójności i obcięcie  $\pi$  do każdej z tych składowych jest homeomorfizmem. W tym przypadku grupa  $\Lambda$  ma sygnaturę:

$$\sigma(\Lambda) = (g'; +; [-]; \{(-), \cdot^k, (-)\}).$$

Tym razem  $\mu(\Lambda) = 2 \cdot 2\pi(2g' - 2 + k)$ , podobnie jak poprzednio, otrzymujemy  $k = g + 1 - 2g'$  co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

DEFINICJA. Zachowując oznaczenia wprowadzone w treści poprzedniego twierdzenia, oraz przyjmując  $\varepsilon = 1$  lub  $\varepsilon = 0$  w zależności od tego, czy zbiór  $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$  jest spójny czy nie, trójkę  $(g, k, \varepsilon)$  nazywamy *typem topologicznym* symetrii  $\sigma$ .

UWAGA. Jeżeli z kontekstu będzie wynikać jaki jest rodzaj powierzchni, na której działa symetria  $\sigma$ , to typ topologiczny  $(g, k, 0)$  będziemy zapisywać jako  $k$ , natomiast typ  $(g, k, 1)$  jako  $-k$ .

UWAGA 2.2. Z udowodnionego twierdzenia wynika, że jeżeli  $g \geq 2$  i trójka  $(g, k, \varepsilon)$  jest typem topologicznym symetrii, to

$$1 \leq k + \varepsilon \leq g + 1 \quad \text{oraz} \quad g + 1 \equiv 2 \pmod{2 - \varepsilon}$$

W dalszej części pracy udowodnimy (patrz uwaga 4.6), że prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne, tzn. jeżeli trójka  $(g, k, \varepsilon)$  spełnia powyższe warunki, to istnieje symetria powierzchni Riemanna typu  $(g, k, \varepsilon)$ .

## 2. Wyznaczanie ilości owali

Poniższe twierdzenie pozwala wyznaczyć ilość owali symetrii  $\sigma$  powierzchni Riemanna  $X$  w sytuacji gdy znamy jej grupę automorfizmów  $G$  oraz charakterystykę topologiczną jej działania, za którą odpowiada homomorfizm  $\theta: \Lambda \rightarrow G$ , którego jądro  $\Gamma$  uniformizuje  $X$ .

TWIERDZENIE 2.3 (Gromadzki [7]). *Przy oznaczeniach jak powyżej, jeżeli symetria  $\sigma$  ma punkt stały, to jest sprzężona z  $\theta(c_i)$  dla pewnej symetrii kanonicznej  $c_i$  grupy  $\Lambda$ , oraz ma*

$$(3) \quad \sum [C(G, \theta(c_j)) : \theta(C(\Lambda, c_j))]$$

*owali, gdzie  $c_j$  przebiega zbiór reprezentantów klas sprzężoności kanonicznych symetrii grupy  $\Lambda$ , których obraz  $\theta(c_j)$  jest sprzężony w  $G$  z  $\sigma$ .*

DOWÓD. Pierwsza część twierdzenia wynika ze stwierdzenia 1.3. Ponieważ sprzężenie nie zmienia ani ilości owali symetrii ani też wartości sumy (3), więc możemy założyć, że  $\sigma = \theta(c_i)$ . Z dowodu twierdzenia 2.1, wynika, że  $\langle \sigma \rangle = \Gamma_\sigma / \Gamma$  dla NEC grupy  $\Gamma_\sigma = \theta^{-1}(\sigma)$ , o sygnaturze  $\sigma(\Gamma_\sigma) = (g'; \pm; [-]; \{(-), .^k., (-)\})$ . Aby znaleźć ilość owali symetrii  $\sigma$ , wystarczy obliczyć  $k$ , a więc liczbę klas sprzężoności symetrii w  $\Gamma_\sigma$ .

Ponieważ każda symetria w  $\Gamma_\sigma$ , jest sprzężona z symetrią kanoniczną  $c_j$  grupy  $\Lambda$ , więc wystarczy obliczyć ile klas sprzężoności symetrii w  $\Gamma_\sigma$  jest indukowanych przez każdą z klas sprzężoności kanonicznych symetrii  $c_j$  grupy  $\Lambda$ .

Niech  $w \in \Lambda$ . Wtedy

$$c_j^w \in \Gamma_\sigma \iff \theta(c_j^w) \in \langle \sigma \rangle \iff \theta(c_j^w) = \sigma \iff \theta(c_j^w) = \theta(c_i).$$

Jeżeli przyjmiemy oznaczenie  $C_k = \theta^{-1}(C(G, \theta(c_k)))$ , to mamy

$$\begin{aligned} x \in C_i &\iff \theta(x)\theta(c_i)\theta(x^{-1}) = \theta(c_i) \\ &\iff \theta(x)\theta(c_j^w)\theta(x^{-1}) = \theta(c_j^w) \\ &\iff \theta(xw)\theta(c_j)\theta((xw)^{-1}) = \theta(w)\theta(c_j)\theta(w^{-1}) \\ &\iff \theta(w^{-1}xw)\theta(c_j)\theta((w^{-1}xw)^{-1}) = \theta(c_j) \\ &\iff w^{-1}xw \in C_j \\ &\iff x \in wC_jw^{-1} \end{aligned}$$

co oznacza, że  $C_i = wC_jw^{-1}$ . Ponadto

$$c_j^v \in \Gamma_\sigma \iff \theta(c_j^v) = \theta(c_i) \iff \theta(c_i^{v^{-1}}) = \theta(c_j) = \theta(c_i^{w^{-1}}) \iff vw^{-1} \in C_i.$$

Pozostaje teraz sprawdzić, kiedy dwie symetrie  $c_j^v$  i  $c_j^{v'}$  dla  $v = uw$ ,  $v' = u'w$ ,  $u, u' \in C_i$  są sprzężone w  $\Gamma_\sigma$ . Jeżeli  $\gamma \in \Gamma_\sigma$  to

$$\begin{aligned} \gamma c_j^{v'} \gamma^{-1} = c_j^v &\iff c_j^{\gamma v'} = c_j^v \iff c_j^{v^{-1} \gamma v'} = c_j \\ &\iff v^{-1} \gamma v' \in C(\Lambda, c_j) \iff v^{-1} v' (v'^{-1} \gamma v') \in C(\Lambda, c_j) \\ &\iff v^{-1} v' \in C(\Lambda, c_j) v'^{-1} \Gamma_\sigma v' \iff v^{-1} v' \in C(\Lambda, c_j) v'^{-1} \Gamma v' \\ &\iff v^{-1} v' \in C(\Lambda, c_j) \Gamma \iff w^{-1} u^{-1} u' w \in C(\Lambda, c_j) \Gamma \\ &\iff u^{-1} u' \in w C(\Lambda, c_j) \Gamma w^{-1} \end{aligned}$$

co oznacza, że klasa sprzężoności w  $\Lambda$  symetrii  $c_j$  indukuje

$$\begin{aligned} [C_i : w C(\Lambda, c_j) \Gamma w^{-1}] &= [w C_j w^{-1} : w C(\Lambda, c_j) \Gamma w^{-1}] \\ &= [C_j : C(\Lambda, c_j) \Gamma] \\ &= [C(\theta(\Lambda), \theta(c_j)) : \theta(C(\Lambda, c_j))] \end{aligned}$$

klas sprzężoności symetrii w  $\Gamma_\sigma$ , co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

Konfiguracje symetrii uzyskane w poniższych przykładach zostaną wykorzystane w rozdziale czwartym do dowodu doskonałości grupy homeotopii.

PRZYKŁAD 2.4. Niech  $\Lambda$  będzie grupą NEC o sygnaturze

$$\sigma(\Lambda) = (0; +; [-]; \{(2, \overset{s}{\cdot}, \cdot, 2, 4)\}),$$

gdzie  $s = \frac{(g+4)}{2}$  dla liczby parzystej  $g \geq 4$ . Ponadto niech

$$G = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^4 \rangle \oplus \langle x \mid x^2 \rangle \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ponieważ przyporządkowanie  $\theta(e) = 1$ ,  $\theta(c_0) = \theta(c_{s+1}) = a$ ,  $\theta(c_1) = x$ ,  $\theta(c_2) = b(ab)^{2(s+1)}$ ,  $\theta(c_3) = x(ab)^2$ ,  $\theta(c_i) = b(ab)^{2(i+s)}$  dla  $4 \leq i \leq s$ , spełnia warunki:

$$\theta(c_0)^2 = \theta(c_1)^2 = \dots = \theta(c_s)^2 = \theta(c_{s+1})^2 = \theta(e) = 1$$

więc indukuje homomorfizm  $\theta: \Lambda \rightarrow G$ . Gdyby jądro  $\Gamma$  tego homomorfizmu zawierało symetrię, to na mocy stwierdzenia 1.3 zawierałoby również symetrię kanoniczną, co jednak nie zachodzi. Z tych samych powodów  $\Gamma$  nie zawiera elementów eliptycznych, co w połączeniu z twierdzeniem 1.7 oznacza, że  $\Gamma$  jest powierzchnią grupą Fuchsa, tzn.  $\sigma(\Gamma) = (g'; -)$ . Na mocy twierdzenia Hurwitza-Riemanna mamy

$$2\pi(2g' - 2) = \mu(\Gamma) = 16 \cdot \mu(\Lambda) = 16 \cdot \left( -2 + 1 + \frac{g+4}{8} + \frac{3}{8} \right)$$

skąd  $g' = g$ , czyli  $\mathcal{H}/\Gamma$  jest powierzchnią Riemanna rodzaju  $g$ .

Korzystając z udowodnionego twierdzenia 2.3 obliczymy ilość owali symetrii  $\sigma = x = \theta(c_1)$  oraz  $\tau = x(ab)^2 = \theta(c_3)$ .

Ponieważ  $x \in G$  jest elementem centralnym, więc jego klasa sprzężoności w  $G$  jest jednoelementowa. Ponadto  $\theta(c_1) = x$  oraz  $\theta(c_i) \neq x$  dla  $i \neq 1$ , co na mocy twierdzenia 2.3 oznacza, że symetria  $\sigma$  ma

$$(4) \quad [G : \theta(C(\Lambda, c_1))]$$

owali.

Korzystając z twierdzenia 1.8 mamy

$$C(\Lambda, c_1) = \langle c_1, c_0c_1, c_1c_2 \rangle$$

skąd

$$\theta(C(\Lambda, c_1)) = \theta(\langle c_1, c_0c_1, c_1c_2 \rangle) = \langle x, ax, xb(ab)^{2(s+1)} \rangle = G$$

co w połączeniu z (4) oznacza, że  $\sigma$  jest symetrią o jednym owalu. Ponieważ  $\theta(c_2c_3c_4) = x$ , oraz  $c_2, c_3, c_4 \notin \theta^{-1}(\langle x \rangle)$ , więc na mocy twierdzenia 1.7 symetria  $\sigma$  ma typ topologiczny  $-1$ .

Również  $x(ab)^2 \in G$  jest elementem centralnym, więc podobnie jak w przypadku symetrii  $\sigma$ , symetria  $\tau$  ma

$$(5) \quad [C(G, x(ab)^2) : \theta(C(\Lambda, c_3))] = [G : \theta(C(\Lambda, c_3))]$$

owali. Mamy dalej

$$C(\Lambda, c_3) = \langle c_3, c_2c_3, c_3c_4 \rangle$$

$$\theta(C(\Lambda, c_3)) = \theta(\langle c_3, c_2c_3, c_3c_4 \rangle) = \langle x(ab)^2, xb(ab)^{2s}, xb(ab)^{2(s+1)} \rangle = \langle x, b, (ab)^2 \rangle$$

co oznacza, że  $\tau$  ma 2 owale. Ponieważ  $\theta(c_1c_2c_4) = x(ab)^2$ , więc  $\tau$  ma typ topologiczny  $-2$ .

UWAGA. Wyznaczenie ilości owali pozostałych symetrii jest równie proste. Znacznie trudniejsze byłoby jednak ustalenie ich rozdzielnosci, gdyż twierdzenie 1.7 funkcjonuje tylko dla podgrup normalnych.

PRZYKŁAD 2.5. Niech  $\Lambda$  będzie grupą NEC o sygnaturze

$$\sigma(\Lambda) = (0; +; [-]; \{(2, \dots, 2, 4, 4)\})$$

gdzie  $s = \frac{(g+1)}{2}$  dla liczby nieparzystej  $g \geq 9$ . Ponadto niech

$$G = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^4 \rangle \oplus \langle x \mid x^2 \rangle \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2.$$

Analogicznie jak poprzednio pokazujemy, że jądro  $\Gamma$  homomorfizmu  $\theta: \Lambda \rightarrow G$  indukowanego przez przyporządkowanie  $\theta(e) = 1$ ,  $\theta(c_0) = \theta(c_{s+2}) = a$ ,  $\theta(c_1) = \theta(c_4) = x$ ,  $\theta(c_2) = \theta(c_{s+1}) = b$ ,  $\theta(c_3) = x(ab)^2$ ,  $\theta(c_i) = a(ab)^{2(i+s)}$  dla  $5 \leq i \leq s$  jest powierzchniową grupą Fuchsa rodzaju  $g$ . Podobnie jak poprzednio dowodzimy, że symetrie  $\sigma = x(ab)^2$  i  $\tau = x$  mają typ topologiczny odpowiednio  $-2$  i  $-3$ .

### 3. Doskonałe pary symetrii

DEFINICJA. Parę  $(\sigma, \tau)$  symetrii powierzchni Riemanna  $X$ , nazywamy *doskonałą*, jeżeli ich produkt należy do podgrupy pochodnej grupy  $\text{Aut}(X)$ , tzn.

$$\sigma\tau \in [\text{Aut}(X), \text{Aut}(X)].$$

STWIERDZENIE 2.6. Dla każdej liczby parzystej  $g \geq 4$  istnieje doskonała para symetrii  $(\sigma, \tau)$ , powierzchni Riemanna  $X$  rodzaju  $g$ , taka, że  $\sigma$  i  $\tau$  mają typ topologiczny odpowiednio  $-1$  i  $-2$ .

DOWÓD. Przyjmując oznaczenia jak w przykładzie 2.4, mamy

$$\sigma\tau = [ab, a] \in [\text{Aut}(X), \text{Aut}(X)].$$

□

---

STWIERDZENIE 2.7. *Dla każdej liczby nieparzystej  $g \geq 9$  istnieje doskonała para symetrii  $(\sigma, \tau)$ , powierzchni Riemanna  $X$  rodzaju  $g$ , taka, że  $\sigma$  i  $\tau$  mają typ topologiczny odpowiednio  $-2$  i  $-3$ .*

DOWÓD. Przyjmując oznaczenia jak w przykładzie 2.5, mamy

$$\sigma\tau = [ab, a] \in [\text{Aut}(X), \text{Aut}(X)].$$

□



## ROZDZIAŁ 3

### Grupa homeotopii

DEFINICJA. Mówimy, że homeomorfizmy  $f, g: X \rightarrow Y$  są *izotopijne* o ile istnieje ciągle odwzorowanie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  takie, że

$$H(x, 0) = f(x) \text{ dla } x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x) \text{ dla } x \in X$$

$$f(\cdot, t): X \rightarrow Y \text{ jest homeomorfizmem, dla } t \in [0, 1]$$

Przez  $T_g$  będziemy oznaczać orientowalną, zamkniętą powierzchnię topologiczną rodzaju  $g$ .

DEFINICJA. *Grupą homeotopii* powierzchni  $T_g$  nazywamy iloraz grupy homeomorfizmów tej powierzchni zachowujących orientację przez podgrupę homeomorfizmów izotopijnych z identycznością.

Grupę homeotopii powierzchni  $T_g$  będziemy oznaczać przez  $\mathcal{M}_g$ .

UWAGA. W literaturze anglojęzycznej częściej spotykaną nazwą grupy  $\mathcal{M}_g$  jest *mapping class group*, jednak ze względu na wątpliwości co do polskiego odpowiednika tego terminu, zdecydowaliśmy się używać pojęcia grupa homeotopii, wzorując się na pracach [4, 19].

UWAGA. Jeżeli nie będzie wyraźnie zaznaczone, że jest inaczej, to będziemy używać tych samych symboli dla klas izotopii jak i dla reprezentantów tych klas.

#### 1. Skręcenia Dehna

Niech  $S$  będzie powierzchnią walca w  $\mathbb{R}^3$  o równaniu:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}.$$

We współrzędnych walcowych:

$$S = \{(r, \theta, z) \mid r = 1, z \in [0, 1]\}.$$

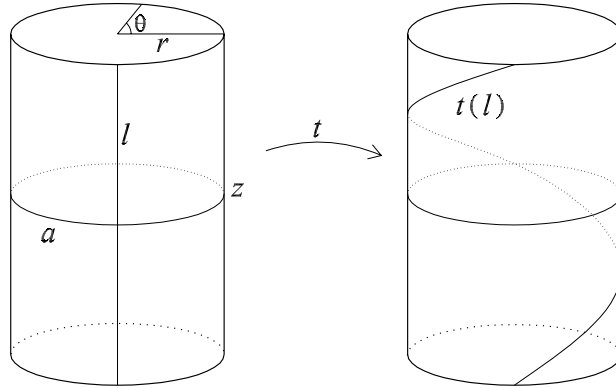
Homeomorfizm  $t: S \rightarrow S$  zdefiniowany wzorem:

$$t(r, \theta, z) = (r, \theta + 2\pi z, z)$$

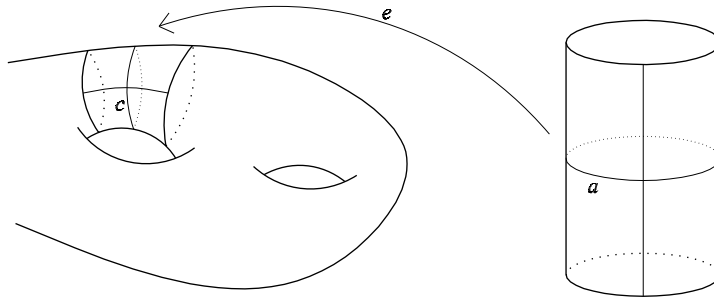
nazywamy standardowym *skręceniem Dehna* walca  $S$  (rysunek 1).

Jeżeli mamy teraz zachowujące orientację zanurzenie  $e: S \rightarrow T_g$ , to możemy określić homeomorfizm  $t_e: T_g \rightarrow T_g$  wzorem:

$$t_e(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \notin e(S) \\ ete^{-1}(x) & \text{dla } x \in e(S) \end{cases}$$

RYSUNEK 1. Walec  $S$  oraz jego obraz przy skręceniu  $t$ .

Jeżeli przez  $a$  oznaczymy krzywą na  $S$  o równaniu  $\{(r, \theta, z) \mid r = 1, z = \frac{1}{2}\}$ , to klasa izotopii homeomorfizmu  $t_e$  zależy tylko od klasy izotopii krzywej  $c = e(a)$  (rysunek 2).

RYSUNEK 2. Zanurzenie walca  $S$  w powierzchnię  $T_g$ .

DEFINICJA. Przy oznaczeniach jak powyżej, klasę izotopii homeomorfizmu  $t_e$  nazywamy *skręceniem Dehna* względem krzywej  $c$  i oznaczamy  $t_c$ .

UWAGA. Ponieważ każda krzywa zamknięta  $c$  na powierzchni  $T_g$  jest izotopijna z krzywą posiadającą otoczenie walcowe, więc wyznacza ona jednoznacznie skręcenie  $t_c$  (rysunek 3).

Bezpośrednio z definicji skręcenia wynika następujące

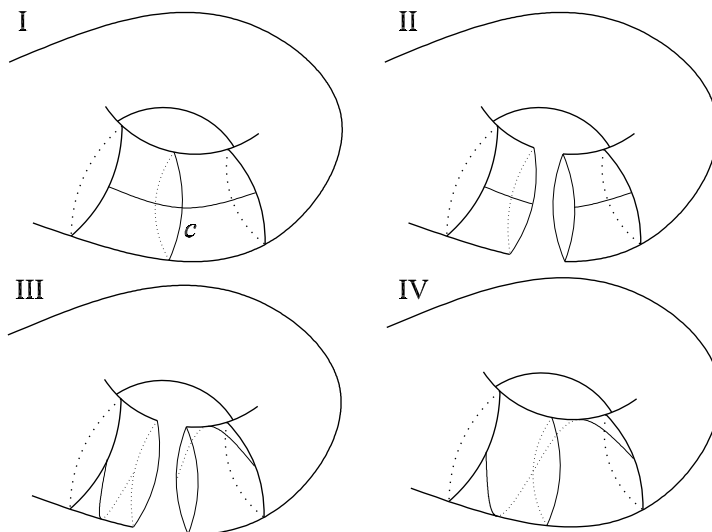
STWIERDZENIE 3.1. *Jeżeli  $c$  jest okręgiem na  $T_g$  a  $f: T_g \rightarrow T_g$  jest homeomorfizmem to*

- jeżeli  $f$  zachowuje orientację, to

$$ft_c f^{-1} = t_{f(c)}$$

- jeżeli  $f$  zmienia orientację, to

$$ft_c f^{-1} = t_{f(c)}^{-1}$$

RYSUNEK 3. Schemat działania skręcenia  $t_c$  względem krzywej  $c$ .

LEMAT 3.2. Jeżeli  $c$  i  $c'$  są dwoma nierozdzielającymi okręgami na  $T_g$ , to istnieje zachowujący orientację homeomorfizm  $f: T_g \rightarrow T_g$  taki, że  $f(c) = c'$ .

DOWÓD. Niech  $S_c$  i  $S_{c'}$  oznaczają powierzchnie z brzegiem otrzymane z  $T_g$  przez rozcięcie wzdłuż odpowiednio krzywych  $c$  i  $c'$ . Wtedy każda z powierzchni  $S_c$  i  $S_{c'}$  różni się od  $T_g$  tym, że posiada dwie dziury i ma rodzaj o jeden mniejszy. Na mocy klasyfikacji powierzchni są więc one homeomorficzne. Co więcej, homeomorfizm  $F: S_c \rightarrow S_{c'}$  może być wybrany w ten sposób, aby zachowywał orientację indukowaną z  $T_g$ .

Oznaczmy przez  $c_-$  i  $c_+$  składowe brzegu powierzchni  $S_c$ . Ponadto niech  $c'_- = F(c_-)$  i  $c'_+ = F(c_+)$ . Jeżeli każdy z okręgów  $c_-, c_+, c'_-, c'_+$  zorientujemy zgodnie z orientacją  $T_g$ , i  $I: c_- \rightarrow c_+$ ,  $I': c'_- \rightarrow c'_+$  są homeomorfizmami sklejającymi  $S_c$  i  $S_{c'}$  z powrotem do  $T_g$ , to każdy z tych homeomorfizmów zmienia orientację. Ponieważ  $F$  zachowuje orientację, więc homeomorfizmy

$$F \circ I, I' \circ F: c_- \rightarrow c'_+$$

zmieniają orientację. Ponieważ każde dwa zmieniające orientację homeomorfizmy okręgu są izotopijne, więc istnieje homeomorfizm  $F': c_+ \rightarrow c'_+$  izotopijny z  $F|_{c_+}$  taki, że

$$F' \circ I = I' \circ F \quad \text{na zbiorze } c_-.$$

Przedłużając tę izotopię do izotopii odwzorowania  $F$ , tak aby nie zmienić  $F|_{c_-}$  otrzymujemy homeomorfizm  $F': S_c \rightarrow S_{c'}$  taki, że przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} c_- & \xrightarrow{I} & c_+ \\ F' \downarrow & & \downarrow F' \\ c'_- & \xrightarrow{I'} & c'_+ \end{array}$$

Zgodność powyższego diagramu oznacza, że homeomorfizm  $F'$  możemy przedłużyć do szukanego homeomorfizmu  $f: T_g \rightarrow T_g$ .  $\square$

**STWIERDZENIE 3.3.** *Jeżeli  $c$  i  $c'$  są dwoma nierozdzielającymi okręgami na  $T_g$ , to skręcenia  $t_c$  i  $t_{c'}$  są sprzężone.*

**DOWÓD.** Na mocy lematu 3.2 istnieje zachowujący orientację homeomorfizm  $f: T_g \rightarrow T_g$ , taki, że  $f(c) = c'$ . Korzystając teraz ze stwierdzenia 3.1 otrzymujemy

$$ft_c f^{-1} = t_{f(c)} = t_{c'}.$$

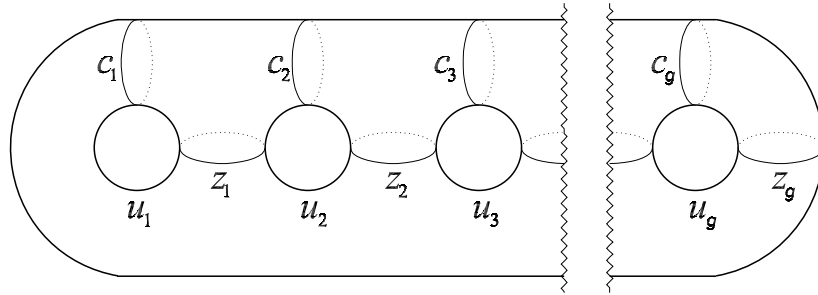
$\square$

## 2. Generatory grupy $\mathcal{M}_g$

**TWIERDZENIE 3.4** (Lickorish [12, 13]). *Grupa  $\mathcal{M}_g$  jest generowana przez  $3g - 1$  skręceń*

$$\begin{aligned} & t_{u_1}, \dots, t_{u_{g-1}}, t_{u_g} \\ & t_{z_1}, \dots, t_{z_{g-1}}, t_{z_g} \\ & t_{c_1}, \dots, t_{c_{g-1}} \end{aligned}$$

względem krzywych  $u_i, z_i, c_j$  dla  $1 \leq i \leq g$ ,  $1 \leq j \leq g - 1$ , przedstawionych na rysunku 4



RYSUNEK 4. Generatory Lickorisha grupy  $\mathcal{M}_g$ .

Prawdziwe jest również następujące, nietrudne do udowodnienia, wzmocnienie powyższego twierdzenia.

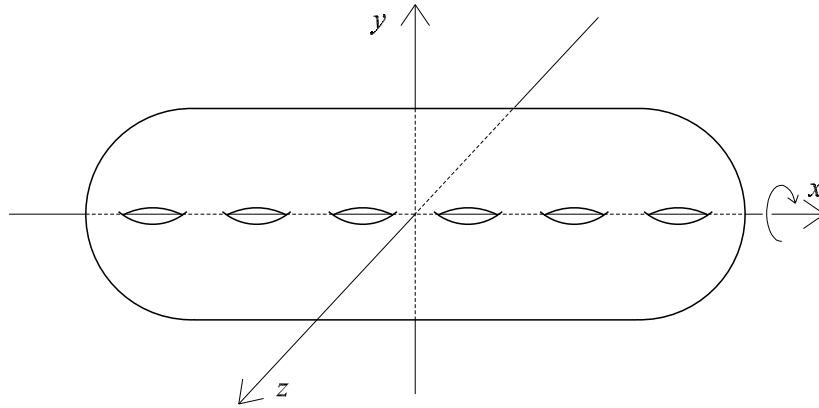
**TWIERDZENIE 3.5** (Humphries [10]). *Grupa  $\mathcal{M}_g$  jest generowana przez  $2g + 1$  skręceń*

$$\begin{aligned} & t_{u_1}, \dots, t_{u_g} \\ & t_{z_1}, \dots, t_{z_g} \\ & t_{c_2} \end{aligned}$$

względem krzywych  $u_i, z_i, c_2$  dla  $1 \leq i \leq g$ .

### 3. Hipereliptyczna grupa homeotopii

DEFINICJA. Jeżeli zrealizujemy powierzchnię  $T_g$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  w sposób pokazany na rysunku 5, tzn. tak aby płaszczyzny układu były jej płaszczyznami symetrii, to klasę izotopii homeomorfizmu  $\rho: T_g \rightarrow T_g$  indukowanego przez półobrót względem osi  $x$  nazywamy *inwolucją hipereliptyczną*.

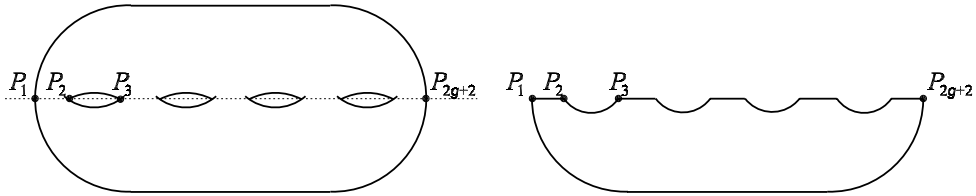


RYSUNEK 5. Inwolucja hipereliptyczna  $\rho: T_g \rightarrow T_g$ .

DEFINICJA. *Hipereliptyczną grupą homeotopii* nazywamy stabilizator w  $\mathcal{M}_g$  elementu  $\rho$  i oznaczamy  $\mathcal{M}_g^h$ .

PRZYKŁAD 3.6. Przyjmując oznaczenia jak w twierdzeniu 3.4 każde ze skręceń  $t_{u_i}$  i  $t_{z_i}$  jest elementem grupy  $\mathcal{M}_g^h$ . Rzeczywiście, ponieważ  $\rho(u_i) = u_i$  i  $\rho(z_i) = z_i$ , więc na mocy stwierdzenia 3.1  $\rho t_{u_i} \rho = t_{u_i}$  i  $\rho t_{z_i} \rho = t_{z_i}$ .

Przestrzeń orbit  $T_g/\langle \rho \rangle$  jest homeomorficzna ze sferą, ponadto każdy homeomorfizm  $f: T_g \rightarrow T_g$  przemienny z  $\rho$ , zachowuje zbiór  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{2g+2}\}$  punktów stałych inwolucji  $\rho$  – rysunek 6. Widzimy więc, że odwzorowanie  $f$  indukuje odwzorowanie sfery zachowujące zbiór wyróżnionych  $2g + 2$  punktów. Mniej trywialnym jest fakt, że opisane przyporządkowanie jest surjekcją oraz, że „faktoryzuje” się ono do klas izotopii.



RYSUNEK 6. Sfera z wyróżnionymi punktami jako przestrzeń orbit  $T_g/\langle \rho \rangle$ .

Niech  $T_{0,2g+2}$  będzie sferą z wyróżnionym zbiorem

$$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{2g+2}\}$$

$2g + 2$  punktów. Przez homeomorfizmy przestrzeni  $T_{0,2g+2}$ , będziemy rozumieć takie homeomorfizmy  $f: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$  które zachowują zbiór  $\mathcal{P}$ , tzn.  $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ . Podobnie dwa takie homeomorfizmy będziemy nazywać izotopijnymi jeżeli istnieje izotopia  $H: T_{0,2g+2} \times [0, 1] \rightarrow T_{0,2g+2}$  taka, że

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \text{ dla } x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) \text{ dla } x \in X \\ f(\mathcal{P}, t) &= \mathcal{P} \text{ dla każdego } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Przez  $\mathcal{M}_{0,2g+2}$  będziemy oznaczać grupę klas izotopii zachowujących orientację homeomorfizmów przestrzeni  $T_{0,2g+2}$ .

**TWIERDZENIE 3.7** (Birman, Hilden [5]). *Grupa  $\mathcal{M}_g^h / \langle \rho \rangle$  jest kanonicznie izomorficzna z grupą  $\mathcal{M}_{0,2g+2}$ .*

Dowód tego twierdzenia przebiega w dwóch krokach. Najpierw udowadnia się, że zarówno homeomorfizmy przestrzeni  $T_{0,2g+2}$  jak i ich izotopie podnoszą się do homeomorfizmów (izotopii) przestrzeni  $T_g$ . Druga, trudniejsza część dowodu polega na wykazaniu, że jeżeli dwa homeomorfizmy  $f, f': T_g \rightarrow T_g$  reprezentują ten sam element grupy  $\mathcal{M}_g^h$ , to łącząca je izotopia może być tak wybrana, aby była przemienna z  $\rho$ .

**UWAGA 3.8.** Z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że klasę każdego odwzorowania  $f: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$ , można podnieść do klasy izotopii odwzorowania  $\tilde{f}: T_g \rightarrow T_g$  takiego, że przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} T_g & \xrightarrow{\tilde{f}} & T_g \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ T_{0,2g+2} & \xrightarrow{f} & T_{0,2g+2} \end{array}$$

gdzie  $\pi: T_g \rightarrow T_g / \langle \rho \rangle$  jest rzutowaniem na przestrzeń orbit.

**UWAGA 3.9.** Podniesienie  $\tilde{f}: T_g \rightarrow T_g$  o którym mowa w poprzedniej uwadze nie jest wyznaczone jednoznacznie – homeomorfizm  $\tilde{f} \circ \rho$  jest drugim takim podniesieniem. Jeżeli jednak  $m \in \mathcal{M}_g^h$  to  $\tilde{f}m\tilde{f}^{-1}$  zależy tylko od homeomorfizmu  $f: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$ , gdyż

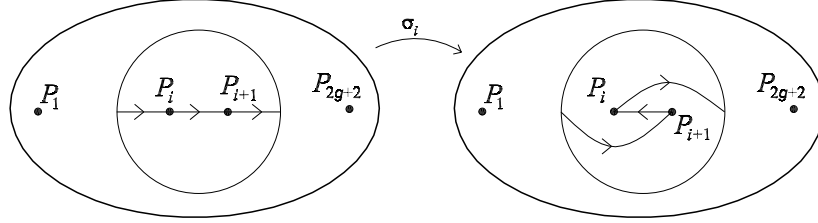
$$(\tilde{f}\rho)m(\tilde{f}\rho)^{-1} = \tilde{f}(\rho m \rho^{-1})\tilde{f}^{-1} = \tilde{f}m\tilde{f}^{-1}.$$

**3.1. Warkocze.** Elementy grupy  $\mathcal{M}_{0,2g+2}$  indukowane przez skręcenia  $t_{c_1}$ ,  $t_{u_i}$  i  $t_{z_i}$  (rysunek 4) będziemy oznaczać odpowiednio przez  $\sigma_1, \sigma_{2i}$  i  $\sigma_{2i+1}$ . Innymi słowy, jeżeli  $\pi: T_g \rightarrow T_g / \langle \rho \rangle$  jest rzutowaniem na przestrzeń orbit to

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \pi t_{c_1} \pi^{-1}(x) \\ \sigma_{2i}(x) &= \pi t_{u_i} \pi^{-1}(x) \text{ dla } i = 1, \dots, g \\ \sigma_{2i+1}(x) &= \pi t_{z_i} \pi^{-1}(x) \text{ dla } i = 1, \dots, g. \end{aligned}$$

Elementy  $\sigma_i: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$  są przykładami tzw. *warkoczy* [1, 2]. Nośnikiem działania warkocza  $\sigma_i$  jest otwarty zbiór  $U_i \subseteq T_{0,2g+2}$  taki, że  $U_i \cap \mathcal{P} = \{P_i, P_{i+1}\}$ .

Ponadto  $\sigma_i(P_i) = P_{i+1}$ ,  $\sigma_i(P_{i+1}) = P_i$ . Schematyczny sposób działania warkocza  $\sigma_i$  jest pokazany na rysunku 7.



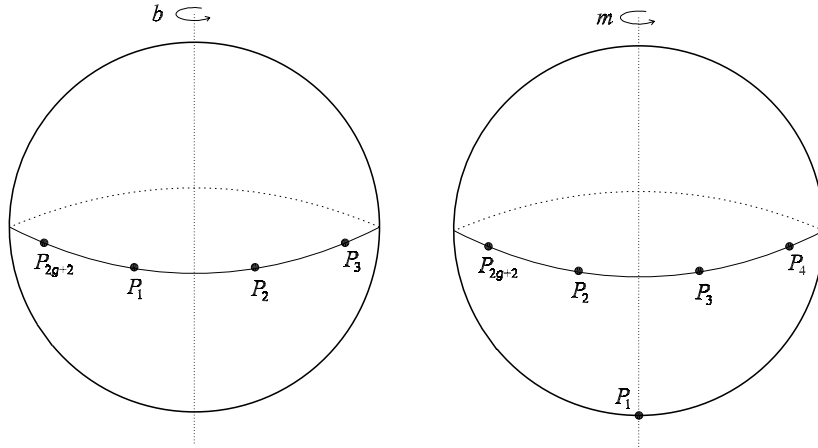
RYSUNEK 7. Schemat działania warkocza  $\sigma_i$ .

Niech teraz  $b: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$  będzie obrotem sfery  $T_{0,2g+2}$  takim, że

$$b(P_i) = P_{i+1} \quad \text{dla } 1 \leq i \leq 2g + 1$$

$$b(P_{2g+2}) = P_1.$$

Jeżeli za model przestrzeni  $T_{0,2g+2}$  przyjmiemy powierzchnię sfery z punktami  $P_1, \dots, P_{2g+2}$  umieszczonymi na równiku w wierzchołkach  $2g + 2$  kąta foremnego, to obrót  $b$  możemy zdefiniować jako obrót rzędu  $2g + 2$  o osi przechodzącej przez bieguny (rysunek 8).



RYSUNEK 8. Obroty  $b: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$  oraz  $m: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$

Jeżeli otoczenia  $U_i$  określimy tak aby

$$b(U_i) = U_{i+1} \quad \text{dla } 1 \leq i \leq 2g + 1$$

$$b(U_{2g+2}) = U_1.$$

to bezpośrednio z określenia warkoczki  $\sigma_i: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$  wynika, że

$$b\sigma_i b^{-1} = \sigma_{i+1} \quad \text{dla } 1 \leq i \leq 2g + 1$$

$$b\sigma_{2g+2} b^{-1} = \sigma_1.$$

Jeżeli teraz  $B: T_g \rightarrow T_g$  jest podniesieniem  $b$ , to otrzymujemy (patrz uwagi 3.8 i 3.9), że

$$\begin{aligned} Bt_{u_i}B^{-1} &= t_{z_i} & \text{dla } 1 \leq i \leq g \\ Bt_{z_i}B^{-1} &= t_{u_{i+1}} & \text{dla } 1 \leq i \leq g \end{aligned}$$

co możemy zapisać w postaci

$$B^i t_{u_1} B^{-i} = \begin{cases} t_{u_{k+1}} & \text{jeżeli } i = 2k \text{ i } 2 \leq i \leq 2g - 2 \\ t_{z_k} & \text{jeżeli } i = 2k - 1 \text{ i } 1 \leq i \leq 2g - 1 \end{cases}$$

W szczególności oznacza to, że

$$t_{u_i}, t_{z_i} \in \langle t_{u_1}, B \rangle \quad \text{dla } 1 \leq i \leq g$$

co w połączeniu z twierdzeniem 3.5 dowodzi następującego twierdzenia wypowiedzianego bez dowodu przez B. Wajnryba [17]

**TWIERDZENIE 3.10.** *Grupa  $\mathcal{M}_g$  jest generowana przez trzy elementy:  $t_{c_2}, t_{u_1}, B$ .*

Znacznie trudniejszy jest dowód faktu, że grupa  $\mathcal{M}_g$  jest generowana przez dwa elementy.

Niech  $M: T_g \rightarrow T_g$  będzie podniesieniem obrotu  $m: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$  rzędu  $2g + 1$  takiego, że

$$\begin{aligned} m(P_1) &= P_1 \\ m(P_i) &= P_{i+1} & \text{dla } 2 \leq i \leq 2g + 1 \\ m(P_{2g+2}) &= P_2 \end{aligned}$$

(rysunek 8). Ponadto niech  $W = t_{c_1}^{-1} t_{c_2}$ .

**TWIERDZENIE 3.11** (Wajnryb [17]). *Grupa  $\mathcal{M}_g$  jest generowana przez dwa elementy:  $M$  i  $W$ .*



## Symetrie w rozszerzonej grupie homeotopii

### 1. Rozszerzona grupa homeotopii

DEFINICJA. *Rozszerzoną grupą homeotopii* powierzchni  $T_g$  nazywamy iloraz grupy homeomorfizmów tej powierzchni przez podgrupę homeomorfizmów izotopijnych z identycznością.

Grupę homeotopii powierzchni  $T_g$  będziemy oznaczać przez  $\mathcal{M}_g^\pm$ .

UWAGA. Jeżeli odwzorowania  $f, f': T_g \rightarrow T_g$  są izotopijne, to oba zachowują lub zmieniają orientację, co pozwala mówić o zachowujących (zmieniających) orientację elementach grupy  $\mathcal{M}_g^\pm$ .

UWAGA. Podobnie jak w przypadku grupy homeotopii, będziemy zwykle utożsamiać klasy izotopii z ich reprezentantami.

UWAGA. Ponieważ  $\mathcal{M}_g$  pokrywa się z podgrupą  $\mathcal{M}_g^\pm$  składającą się z klas homeomorfizmów zachowujących orientację, więc  $[\mathcal{M}_g^\pm : \mathcal{M}_g] = 2$  co w szczególności oznacza, że jeżeli  $\varphi: T_g \rightarrow T_g$  jest jakimkolwiek homeomorfizmem zmieniającym orientację, to

$$\mathcal{M}_g^\pm = \langle \mathcal{M}_g, \varphi \rangle.$$

Podstawowym faktem łączącym teorię grup automorfizmów powierzchni Riemanna z podgrupami skończonymi  $\mathcal{M}_g^\pm$ , jest następujące głębokie

**TWIERDZENIE 4.1** (Kerckhoff [11]). *Każda skończona podgrupa rozszerzonej grupy homeotopii zamkniętej powierzchni orientowalnej  $S$  może być zrealizowana jako grupa homeomorfizmów. Co więcej może być ona zrealizowana jako grupa automorfizmów powierzchni Riemanna ze względu na pewną strukturę analityczną na  $S$ .*

### 2. Symetrie w grupie homeomorfizmów powierzchni

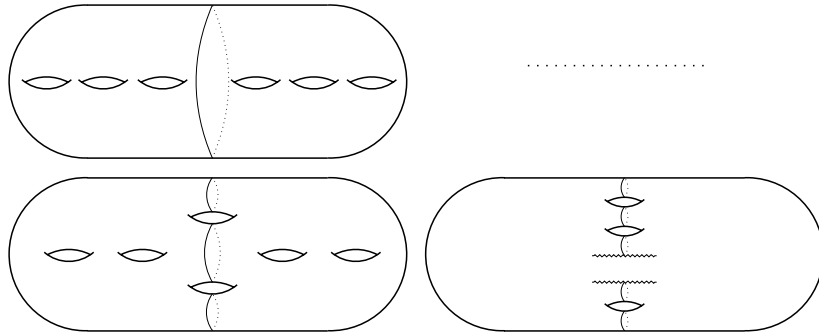
DEFINICJA. Zmieniającą orientację inwolucję powierzchni topologicznej, nazywamy *symetrią* tej powierzchni.

UWAGA 4.2. Na mocy twierdzenia 4.1, każdą topologiczną symetrię  $\sigma$ , możemy traktować jak symetrię pewnej powierzchni Riemanna, co oznacza, że symetria  $\sigma$  spełnia tezę twierdzenia 2.1, czyli podobnie jak w przypadku symetrii powierzchni Riemanna, możemy mówić o typie topologicznym symetrii  $\sigma$ .

**2.1. Przykłady.**

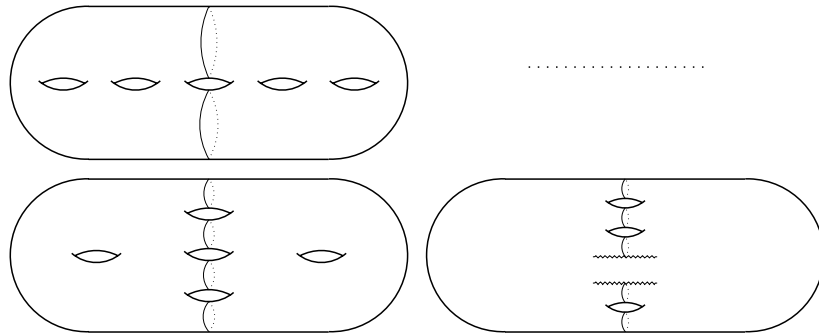
PRZYKŁAD 4.3. Podamy teraz przykład symetrii o typie topologicznym  $+k$  dla dowolnego  $k$  spełniającego tezę twierdzenia 2.1.

- (1) Jeżeli  $g$  jest liczbą parzystą to możliwe wartości  $k$  to  $1, 3, \dots, g-1, g+1$ . Symetrię rozdzielającą o takiej liczbie owali możemy otrzymać zanurzając powierzchnię  $X$  rodzaju  $g$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  w sposób pokazany na rysunku 1. Żądaną symetrię otrzymamy jako obcięcie symetrii względem płaszczyzny zawierającej zaznaczone owale.



RYSUNEK 1. Symetrie rozdzielające w przypadku gdy  $g$  jest liczbą parzystą. Kolejno mamy symetrię o  $1, 3, \dots, g+1$  owalach.

- (2) Jeżeli  $g$  jest liczbą nieparzystą to  $k$  może przyjmować wartości  $2, 4, \dots, g+1$ . Symetrie o takiej liczbie owali przedstawione są na rysunku 2.



RYSUNEK 2. Symetrie rozdzielające w przypadku gdy  $g$  jest liczbą nieparzystą. Kolejno mamy symetrię o  $2, 4, \dots, g+1$  owalach.

Zanim podamy przykład symetrii nierozdzielających, zauważmy najpierw, że przy oznaczeniach jak na str. 14 prawdziwy jest

LEMAT 4.4. Złożenie skręcenia  $t: S \rightarrow S$  z symetrią walca  $s: S \rightarrow S$  określoną wzorem

$$s(r, \theta, z) = (r, \theta, 1 - z)$$

jest symetrią  $\tilde{s}: S \rightarrow S$ , która nie ma punktów stałych oraz

$$\tilde{s}(x) = s(x) \quad \text{dla } x \in \partial S.$$

DOWÓD. Ponieważ

$$\tilde{s}(r, \theta, z) = st(r, \theta, z) = s(r, \theta + 2\pi z, z) = (r, \theta + 2\pi z, 1 - z)$$

więc

$$\begin{aligned} (\tilde{s} \circ \tilde{s})(r, \theta, z) &= \tilde{s}(r, \theta + 2\pi z, 1 - z) = \\ &= (r, (\theta + 2\pi z) + 2\pi(1 - z), 1 - (1 - z)) = (r, \theta, z) \end{aligned}$$

co oznacza, że  $\tilde{s}$  istotnie jest symetrią.

Ponadto jeżeli  $x \in \partial S$ , tzn.  $x = (r, \theta, \varepsilon)$ , gdzie  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  (patrz rysunek 1 na stronie 15) to

$$\tilde{s}(x) = \tilde{s}(r, \theta, \varepsilon) = st(r, \theta, \varepsilon) = s(r, \theta + 2\pi\varepsilon, z) = s(r, \theta, z) = s(x).$$

Pozostaje sprawdzić, że symetria  $\tilde{s}$  istotnie nie ma punktów stałych. Jeżeli  $x = (r, \theta, z)$  i  $z \neq \frac{1}{2}$  to  $z \neq 1 - z$ , więc

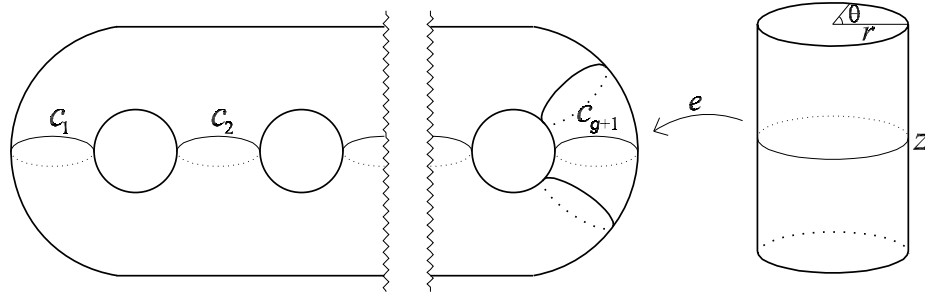
$$\tilde{s}(x) = (r, \theta + 2\pi z, 1 - z) \neq x.$$

Jeśli natomiast  $x = (r, \theta, \frac{1}{2})$  to  $\theta \neq \theta + \pi$ , skąd

$$\tilde{s}(x) = (r, \theta + \pi, \frac{1}{2}) \neq x.$$

□

PRZYKŁAD 4.5. Podamy teraz przykład symetrii o typie topologicznym  $-k$  dla dowolnego  $k$  spełniającego tezę twierdzenia 2.1. Niech  $\sigma$  będzie symetrią rozdzielającą o  $g + 1$  owalach  $c_1, \dots, c_{g+1}$  (patrz rysunek 3 lub przykład 4.3). Bezpośrednio z określenia symetrii  $\sigma$  wynika, że istnieje homeomorfizm  $e: S \rightarrow T_g$



RYSUNEK 3.  $g + 1$  owali symetrii rozdzielającej  $\sigma: T_g \rightarrow T_g$  oraz włożenie  $e: S \rightarrow T_g$

taki, że  $e(S)$  jest otoczeniem walcowym krzywej  $c_{g+1}$  oraz

$$\sigma(x) = ese^{-1}(x) \quad \text{dla } x \in e(S).$$

Udowodniony powyżej lemat pozwala nam teraz zmodyfikować symetrię  $\sigma$  na zbiorze  $e(S)$  tak aby nie miała ona w tym zbiorze punktów stałych. Dokładniej mówiąc odwzorowanie

$$\sigma_g(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{dla } x \notin e(S) \\ e\tilde{s}e^{-1}(x) & \text{dla } x \in e(S) \end{cases}$$

jest symetrią nierozdzielającą o  $g$  owalach  $c_1, \dots, c_g$ . Kontynuując to rozumowanie, otrzymamy dla każdego  $0 \leq k \leq g$  symetrię nierozdzielającą  $\sigma_k: T_g \rightarrow T_g$  o  $k$  owalach.

UWAGA 4.6. Przykłady 4.3 i 4.5 w połączeniu z twierdzeniem 4.1 stanowią dowód, że warunki z tezy twierdzenia 2.1 są warunkami dostatecznymi dla istnienia symetrii powierzchni Riemanna o typie topologicznym  $(g, k, \varepsilon)$  (patrz uwaga 2.2).

## 2.2. Twierdzenie Weicholda.

TWIERDZENIE 4.7 (Weichold [18]). *Dwie symetrie  $\sigma$  i  $\tau$  powierzchni topologicznej  $X$ , są sprzężone w grupie homeomorfizmów tej powierzchni wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam typ topologiczny.*

DOWÓD. Jeżeli  $\tau = f\sigma f^{-1}$ , to  $\text{Fix}(\tau) = f(\text{Fix}(\sigma))$  oraz  $f(X \setminus \text{Fix}(\sigma)) = X \setminus \text{Fix}(\tau)$ , co pokazuje, że równość typów topologicznych jest warunkiem koniecznym dla sprzężoności.

Założmy teraz, że symetrie  $\sigma$  i  $\tau$  mają ten sam typ topologiczny, powiedzmy  $(g, k, \varepsilon)$ . Rozważmy dwa przypadki:

- (1) Jeżeli typ topologiczny symetrii  $\sigma$  i  $\tau$  jest równy  $+k$ , to oznaczmy przez  $A_\sigma$  sumę jednej ze składowych zbioru  $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$  oraz zbioru  $\text{Fix}(\sigma)$ . Zbiór  $B_\sigma$  tworzymy w ten sam sposób, ale używając drugiej składowej. Analogicznie definiujemy zbiory  $A_\tau$  i  $B_\tau$ . Ponieważ  $\sigma$  jest homeomorfizmem, więc przestrzenie  $A_\sigma$  i  $B_\sigma$  są homeomorficzne, w szczególności dla charakterystyk Eulera mamy:

$$2\chi(A_\sigma) = \chi(A_\sigma) + \chi(B_\sigma) = \chi(X) + \chi(\text{Fix}(\sigma)) = 2 - 2g.$$

Przeprowadzając takie same rachunki dla przestrzeni  $A_\tau$  widzimy, że każdy ze zbiorów  $A_\sigma$  i  $A_\tau$  jest zwartą powierzchnią z  $k$  dziurami o charakterystyce Eulera równej  $1 - g$ . Na mocy twierdzenia o klasyfikacji powierzchni istnieje homeomorfizm tych przestrzeni  $\varphi: A_\sigma \rightarrow A_\tau$ . Jeżeli teraz określimy homeomorfizm  $f: X \rightarrow X$  wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{dla } x \in A_\sigma \\ \tau\varphi\sigma(x) & \text{dla } x \in B_\sigma \end{cases}$$

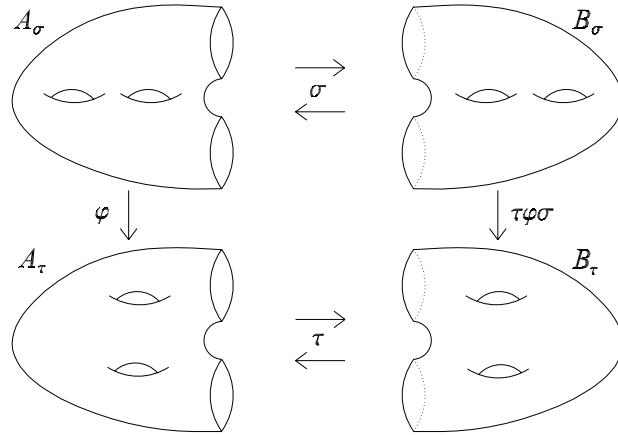
to

$$f\sigma f^{-1}(x) = \begin{cases} (\tau\varphi\sigma)\sigma(\varphi^{-1})(x) = \tau(x) & \text{dla } x \in A_\tau \\ \varphi\sigma(\sigma\varphi^{-1}\tau)(x) = \tau(x) & \text{dla } x \in B_\tau \end{cases}$$

czyli  $\tau = f\sigma f^{-1}$ .

- (2) Założmy teraz, że symetrie  $\sigma$  i  $\tau$  mają typ topologiczny  $-k$ . Przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{array}{ll} \pi_\sigma: X \rightarrow X/\langle\sigma\rangle \text{ rzutowanie} & \pi_\tau: X \rightarrow X/\langle\tau\rangle \text{ rzutowanie} \\ X_\sigma = X/\langle\sigma\rangle & X_\tau = X/\langle\tau\rangle \\ \tilde{A}_\sigma = X \setminus \text{Fix}(\sigma) & \tilde{A}_\tau = X \setminus \text{Fix}(\tau) \\ A_\sigma = \pi_\sigma(\tilde{A}_\sigma) & A_\tau = \pi_\tau(\tilde{A}_\tau) \end{array}$$



RYСУNEK 4. Odwzorowanie  $f$  w przypadku symetrii rozdzielających.

Jeżeli wybierzemy triangulację przestrzeni  $X$  zgodną z rzutowaniem  $\pi_\sigma$  to widzimy, że

$$\chi(X) = 2\chi(X_\sigma) - \chi(\text{Fix}(\sigma))$$

skąd  $\chi(X_\sigma) = 1 - g$ . Podobnie pokazujemy, że  $\chi(X_\tau) = 1 - g$ . Każda z przestrzeni  $X_\sigma$  i  $X_\tau$  jest więc nieorientowaną powierzchnią z  $k$  dziurami o charakterystyce Eulera równej  $1 - g$ . Na mocy twierdzenia o klasyfikacji powierzchni istnieje homeomorfizm tych przestrzeni  $\varphi: X_\sigma \rightarrow X_\tau$ . Pokażemy teraz, że istnieje podniesienie odwzorowania  $\varphi$ , tzn. odwzorowanie  $f: X \rightarrow X$  czyniące poniższy diagram przemiennym:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \pi_\sigma \downarrow & & \downarrow \pi_\tau \\ X_\sigma & \xrightarrow{\varphi} & X_\tau \end{array}$$

Ponieważ przmienność diagramu oznacza, że  $\tau f \sigma = f$  czyli  $\tau = f \sigma f^{-1}$ , więc istnienie odwzorowania  $f$  zakończy dowód twierdzenia.

Ponieważ odwzorowania  $\pi_\sigma: \tilde{A}_\sigma \rightarrow A_\sigma$  i  $\pi_\tau: \tilde{A}_\tau \rightarrow A_\tau$  są nakryciami, więc grupy  $\pi_\sigma(\pi_1(\tilde{A}_\sigma))$  i  $\pi_\tau(\pi_1(\tilde{A}_\tau))$  możemy scharakteryzować jako podgrupy grup odpowiednio  $\pi_1(A_\sigma)$  i  $\pi_1(A_\tau)$ , składające się z wszystkich pętli dwustronnych. Własność ta jest niezmiennikiem homeomorfizmu, więc

$$\varphi(\pi_\sigma(\pi_1(\tilde{A}_\sigma))) \leq \pi_\tau(\pi_1(\tilde{A}_\tau))$$

co jest warunkiem dostatecznym [16] dla istnienia odwzorowania  $f: \tilde{A}_\sigma \rightarrow \tilde{A}_\tau$  takiego, że:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \tilde{A}_\tau \\ & & & & \downarrow \pi_\tau \\ \tilde{A}_\sigma & \xrightarrow{f} & \tilde{A}_\tau & & \\ \downarrow \pi_\sigma & & \downarrow \pi_\tau & & \\ A_\sigma & \xrightarrow{\varphi} & A_\tau & & \end{array}$$

Przedłużając teraz  $f$  wzorem  $f(x) = \pi_\tau^{-1} \varphi \pi_\sigma(x)$  dla  $x \in \text{Fix}(\sigma)$  otrzymujemy żądany homeomorfizm  $f: X \rightarrow X$ . □

### 3. Symetrie w grupie homeotopii

DEFINICJA. Zmieniający orientację element rzędu 2 grupy  $\mathcal{M}_g^\pm$  nazywamy *symetrią* w grupie homeotopii.

UWAGA 4.8. Na mocy twierdzenia 4.1 każda symetria w sensie powyższej definicji zawiera homeomorfizm będący symetrią, co pozwala zamiennie używać terminu symetria w odniesieniu zarówno do klasy izotopii jak i do konkretnego homeomorfizmu.

#### 3.1. Symetrie jako generatory $\mathcal{M}_g^\pm$ .

LEMAT 4.9. *Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 3.4. Wtedy*

- (1) *skręcenie  $t_{z_1}$  jest złożeniem dwóch symetrii  $t_{z_1} = \sigma\tau$*
- (2) *symetrie o których mowa powyżej mogą być tak wybrane, że w ich klasie izotopii są symetrie o rodzaju topologicznym odpowiednio  $-(k+1)$  oraz  $-k$  dla  $0 \leq k \leq g-1$ .*

DOWÓD.

- (1) Jeżeli  $\sigma: T_g \rightarrow T_g$  jest symetrią o owalach jak na rysunku 3, to  $\sigma(z_1) = z_1$ , czyli na mocy stwierdzenia 3.1 mamy  $\sigma t_{z_1} \sigma = t_{z_1}^{-1}$ . Zatem  $(\sigma t_{z_1})^2 = 1$ , co oznacza, że  $\tau = \sigma t_{z_1}$  jest symetrią oraz  $t_{z_1} = \sigma\tau$ .
- (2) Dowód wynika bezpośrednio z punktu pierwszego oraz opisaną w przykładzie 4.5 procedurę redukcji owali. □

STWIERDZENIE 4.10. *Jeżeli  $c$  jest okręgiem nierozdzielającym, to  $t_c: T_g \rightarrow T_g$  jest złożeniem dwóch symetrii.*

DOWÓD. Teza wynika z lematu 4.9 i stwierdzenia 3.3. □

TWIERDZENIE 4.11 ([8]). *Grupa  $\mathcal{M}_g^\pm$  jest skończenie generowana przez symetrie.*

DOWÓD. Dowód wynika z poprzedniego stwierdzenia i twierdzenia 3.4. □

LEMAT 4.12. *Przyjmując oznaczenia z twierdzenia 3.11, każdy z elementów  $M$  i  $W$  jest złożeniem dwóch symetrii.*

DOWÓD. Homeomorfizm  $M: T_g \rightarrow T_g$  jest podniesieniem obrotu  $m: T_{0,2g+2} \rightarrow T_{0,2g+2}$ . Ponieważ obrót ten może być rozłożony na produkt dwóch symetrii, więc  $M$  może być rozłożony na produkt podniesień tych symetrii (patrz uwaga 3.8).

Zauważmy teraz, że występujące w definicji skręcenia  $t_{c_1}, t_{c_2}$  mają rozłączne nośniki (dokładniej mówiąc z ich klas izotopii można wybrać reprezentantów o rozłącznych nośnikach). W połączeniu ze stwierdzeniem 3.1 wynika z tego, że

$$t_{c_1} t_{c_2} t_{c_1}^{-1} = t_{c_2}$$

co oznacza, że skręcenia  $t_{c_1}$  i  $t_{c_2}$  są ze sobą przemienne. Jeżeli  $\sigma: T_g \rightarrow T_g$  jest symetrią taką, że  $\sigma(c_1) = c_1$  i  $\sigma(c_2) = c_2$  to na mocy stwierdzenia 3.1 mamy

$$\begin{aligned}\sigma W \sigma &= \sigma t_{c_1}^{-1} t_{c_2} \sigma = t_{c_1} t_{c_2}^{-1} = t_{c_2}^{-1} t_{c_1} = W^{-1} \\ (\sigma W)^2 &= 1\end{aligned}$$

co oznacza, że  $W = \sigma \tau$  dla symetrii  $\tau = \sigma W$ .  $\square$

**TWIERDZENIE 4.13.** *Grupa  $\mathcal{M}_g^\pm$  jest generowana przez cztery symetrie.*

**DOWÓD.** Dowód wynika z poprzedniego lematu i twierdzenia 3.11.  $\square$

**STWIERDZENIE 4.14.** *Grupa  $\mathcal{M}_1^\pm$  jest generowana przez trzy symetrie.*

**DOWÓD.** Na mocy twierdzenia 3.4 grupa  $\mathcal{M}_1^\pm$  jest generowana przez skręcenia  $t_{c_1}$  i  $t_{u_1}$ . Jeżeli teraz  $\rho$  jest symetrią taką, że  $\sigma(c_1) = c_1$  i  $\sigma(u_1) = u_1$ , to rozumowanie analogiczne jak w dowodzie lematu 4.12 dowodzi, że każdy z elementów  $\sigma t_{c_1}$  i  $\sigma t_{u_1}$  jest symetrią, skąd

$$\mathcal{M}_1^\pm = \langle \sigma t_{c_1}, \sigma t_{u_1}, \sigma \rangle.$$

$\square$

Nierozstrzygnięta jak dotąd pozostaje natomiast

**HIPOTEZA 4.15.** *Grupa  $\mathcal{M}_g^\pm$  dla  $g \geq 2$  jest generowana przez trzy symetrie.*

#### 4. Doskonałość grupy $\mathcal{M}_g$

**DEFINICJA.** Grupę  $G$  nazywamy *doskonałą* o ile jest ona równa swojej grupie pochodnej, tzn. o ile

$$G = [G, G].$$

W pracy [3] J. Birman dowodzi, że  $\mathcal{M}_g/[\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_g] = 2$  dla  $g \geq 3$ . Okazało się jednak, że dowód ten zawiera błąd i w istocie wspomniana praca zawiera jedynie dowód następującego twierdzenia.

**TWIERDZENIE 4.16** (Birman [3]). *Indeks*

$$[\mathcal{M}_g : [\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_g]]$$

*jest równy bądź 1 bądź 2.*

Problem czy grupa  $\mathcal{M}_g$  jest doskonała został ostatecznie rozwiązany osiem lat później przez jej ucznia J. Powella.

**TWIERDZENIE 4.17** (Powell [14]). *Grupa  $\mathcal{M}_g$  jest doskonała dla  $g \geq 3$ .*

Poniżej pokażemy jak posługując się symetrami można udowodnić to twierdzenie w oparciu o wynik Birman 4.16.

**DOWÓD.** ([8]). Ponieważ w dowodzie będziemy korzystać ze stwierdzeń 2.6 i 2.7, więc prawdziwość dowodzonego twierdzenia uzasadnimy tylko w przypadku powierzchni rodzaju spełniającego założenia tych stwierdzeń.

Przypuśćmy najpierw, że  $g \geq 4$  jest liczba parzysta. Na mocy lematu 4.9 skręcenie  $t_{z_1}$  jest produktem dwóch symetrii  $t_{z_1} = \sigma \tau$  typu odpowiednio  $-1$  i  $-2$ .

Z drugiej strony ze stwierdzenia 2.6 wynika istnienie doskonałej pary symetrii  $\sigma_d$  i  $\tau_d$  również typów  $-1$  i  $-2$ . Z twierdzenia Weicholda 4.7 wiemy, że

$$\sigma = f_\sigma \sigma_d f_\sigma^{-1} \quad \tau = f_\tau \tau_d f_\tau^{-1} \quad \text{dla } f_\sigma, f_\tau \in \mathcal{M}_g^\pm$$

skąd otrzymujemy

$$t_{z_1} = \sigma\tau = f_\sigma \sigma_d f_\sigma^{-1} f_\tau \tau_d f_\tau^{-1} = [f_\sigma, \sigma_d] \sigma_d \tau_d [\tau_d, f_\tau] \in [\mathcal{M}_g^\pm, \mathcal{M}_g^\pm].$$

Ponieważ wszystkie skręcenia są sprzężone (stwierdzenie 3.3), więc na mocy twierdzenia 3.4 mamy

$$(6) \quad \mathcal{M}_g \leq [\mathcal{M}_g^\pm, \mathcal{M}_g^\pm].$$

Jeżeli natomiast  $g \geq 9$  jest liczbą nieparzystą, to powyższą inkluzję otrzymujemy w analogiczny sposób, korzystając jednak tym razem ze stwierdzenia 2.7.

Z twierdzenia Birman 4.16 wynika, że

$$[\mathcal{M}_g : [\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_g]] \leq 2.$$

Ponadto  $[\mathcal{M}_g^\pm : \mathcal{M}_g] = 2$  co oznacza, że grupa

$$\mathcal{M}_g^\pm / [\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_g]$$

ma rząd nie większy niż 4, w szczególności jest więc abelowa, czyli

$$[\mathcal{M}_g^\pm, \mathcal{M}_g^\pm] \leq [\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_g]$$

co w połączeniu z (6) dowodzi tezy twierdzenia. □



## Bibliografia

- [1] E. Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 4:47–72, 1926.
- [2] E. Artin. Theory of braids. *Annals of Mathematics*, 48:101–126, 1946.
- [3] J. S. Birman. Abelian quotients of the mapping class group of a 2-manifold. *Bull. AMS*, 76(1):147–150, 1970.
- [4] J. S. Birman. and D. R. J. Chillingworth. On the homeotopy group of a non-orientable surface. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 71:437–448, 1972.
- [5] J. S. Birman and H. M. Hilden. On mapping class groups of closed surfaces as covering spaces. In L. V. Ahlfors, L. Bers, H. M. Farkas, R. C. Gunning, I. Kra, and H. E. Rauch, editors, *Advances in the theory of Riemann surfaces*, number 66 in Annals of Math. Studies, pages 81–115, 1971.
- [6] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, and G. Gromadzki. *Automorphism groups of Compact Bordered Klein Surfaces; A Combinatorial Approach*, volume 1439 of *Lecture Notes in Math.* Springer–Verlag, 1990.
- [7] G. Gromadzki. On a Harnack-Natanzon theorem for the family of real forms of Riemann surfaces. *Journal of Pure Applied Algebra*, 121:253–269, 1997.
- [8] G. Gromadzki and M. Stukow. Involving symmetries of Riemann surfaces to a study of the mapping class group. *Złozone do druku*.
- [9] A. Harnack. Über die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Kurven. *Math. Ann.*, 10:189–199, 1876.
- [10] S. P. Humphries. Generators for the mapping class group. In *Topology of low-dimensional manifolds*, volume 722 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 44–47, 1979. Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977.
- [11] S. P. Kerckhoff. The Nielsen realization problem. *Annals of Mathematics*, 117:235–265, 1983.
- [12] W. B. R. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Annals of Mathematics*, 76(3):531–540, 1962.
- [13] W. B. R. Lickorish. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 60(4):769–778, 1964.
- [14] J. Powell. Two theorems on the mapping class group of a surface. *Proc. AMS*, 68(3):347–350, 1978.
- [15] D. Singerman. On the structure of non-euclidean crystallographic groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 76:233–240, 1974.
- [16] E. H. Spanier. *Topologia Algebraiczna*, page 90. PWN, 1972.
- [17] B. Wajnryb. Mapping class group of a surface is generated by two elements. *Topology*, 35(2):377–383, 1996.
- [18] G. Weichold. Über symmetrische Riemannsche Flächen und die Periodizitätsmodulen der zugehörigen Abelschen Normalintegrale erstes Gattung. *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 28:321–351, 1883.
- [19] H. Zieschang. On the Homeotopy Groups of Surfaces. *Math. Ann.*, 206:1–21, 1973.