Wstęp do matematyki

Ćwiczenia I

1. Czy poniższe zdania są zdaniami logicznymi? Jeśli tak, czy są prawdziwe, czy fałszywe?
   (a) Liczba 111 dzieli się przez 3 i przez 11.
   (b) Czy $2 \cdot 2 = 4$?
   (c) $2 \cdot 2 = 4$
   (d) Zbiór liczb naturalnych jest podzbiorem zbioru liczb całkowitych.
   (e) Zbiór liczb całkowitych jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych.
   (f) Oblicz 1111^2.
   (g) Zbiór liczb wymiernych.
   (h) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.
   (i) Liczba całkowita n dzieli się przez 10.
   (j) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Sformułuj negacje następujących zdań. W podpunktach (c)–(e) litery a, b oznaczają pewne dane liczby rzeczywiste.
   (a) Liczba 111 jest nieparzysta i jest liczbą pierwszą.
   (b) Kwadrat jest prostokątem lub rombem.
   (c) Liczba a jest dodatnia, a liczba b nie jest dodatnia.
   (d) $a = 0$ i $b = 0$
   (e) $a = 0$ lub $b = 0$

3. Określ prawdziwość poniższych zdań. Dla każdego z nich sformułuj negację, w miarę możliwości, na różne sposoby.
   (a) Niektóre liczby rzeczywiste są niewymierne.
   (b) Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny.
   (c) Trójkąt prostokątny nie może być trójkątem równoramiennym.
   (d) Suma dwóch liczb nieparzystych jest zawsze nieparzysta.
   (e) Każda liczba rzeczywista jest mniejsza od 10^{10}.
   (f) Równość $x^7 + 123x^2 - 1 = 0$ zachodzi dla pewnej liczby rzeczywistej x.

4. Dane są liczby rzeczywiste a, b. Zapisz symbolicznie poniższe zdania.
   (a) Jeśli $ab = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$.
   (b) Równość $10a = 10b$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $a = b$.
   (c) Liczba a jest dodatnia, a liczba b – nie.
   (d) Liczba a jest mniejsza od b lub liczba b jest mniejsza od a, lub te liczby są równe.

5. Dane są liczby całkowite m, n. Zapisz symbolicznie poniższe zdania.
   (a) Jeśli m jest większe od n, to n nie jest większe od m.
   (b) Jeśli iloczyn $m \cdot n$ jest parzysty, to co najmniej jedna z liczb m, n jest parzysta.
   (c) Jeśli suma kwadratów liczb m i n jest podzielna przez 3, to liczby m i n też dzielą się przez 3.

6. Odczytaj zdania i określ ich wartość logiczną.
   (a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 \neq -1$.
   (b) $\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ a \cdot b = b \cdot a$.
   (c) $\exists_{x\in\mathbb{Z}}\ x^2 \leqslant 0$.
   (d) $\neg\exists_{x\in\mathbb{Z}}\ 2x = 1$.

7. Zapisz symbolicznie następujące zdania:
   (a) Dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi nierówność $a^{10} > -10$.
   (b) Dla dowolnych liczb wymiernych x, y suma $x+y$ jest liczbą wymierną.
   (c) Nie istnieje liczba wymierna w, której kwadrat jest równy 2.
   (d) Istnieją liczby całkowite a, b, takie że $a \cdot b = -1$.

8. Zapisz symbolicznie zdania z zadania 3 (oprócz zdania z 3c) oraz ich negacje.

9. Na płaszczyźnie dany jest czworokąt X. Rozważmy zdania:

$$\begin{cases} p = \textit{wszystkie boki czworokąta } X \textit{ są równe} \\ q = \textit{wszystkie kąty czworokąta } X \textit{ są proste} \\ r = \textit{czworokąt } X \textit{ jest kwadratem} \end{cases}$$

   Zapisz przy użyciu powyższych oznaczeń i symboli logicznych zdania:
   (a) Wszystkie boki czworokąta X są równe i wszystkie jego kąty są proste.
   (b) Czworokąt X jest kwadratem i nie wszystkie jego kąty są proste.
   (c) Jeśli czworokąt X jest kwadratem, to ma równe boki.
   (d) Jeśli nie wszystkie boki czworokąta X są równe lub nie wszystkie jego kąty są proste, to czworokąt X nie jest kwadratem.
   (e) Czworokąt X jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego boki są równe i wszystkie jego kąty są proste.

10. Określ wartość logiczną zdań

   (a) $\left(\log_2 3 = \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left(\sin\frac{\pi}{3} < 0\right)$
   (b) $\left(\cos\frac{\pi}{3} = 1\right) \Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right)$
   (c) $\left(\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
   (d) $\left(\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
   (e) $(2 \leqslant 3) \vee \left(\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\right)$
   (f) $(\frac{4}{11} > \frac{7}{18}) \vee (\cos\pi > 0)$
   (g) $(\frac{4}{11} > \frac{7}{18}) \vee (\cos 0 < \pi)$
   (h) $\neg\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\right)$
   (i) $\neg(2 = 3)$
   (j) $\neg(\sin(2) < 3)$
   (k) ($x_0 = 3$ jest pierwiastkiem równania $x^2-5x+6 = 0$) $\wedge$ (3 jest liczbą pierwszą)
   (l) ($x_0 = 3$ jest pierwiastkiem równania $x^2-5x+6 = 0$) $\iff$ (3 jest liczbą pierwszą)
   (m) (2 jest dzielnikiem liczby 15) $\wedge$ (15 jest liczbą pierwszą)
   (n) (2 jest dzielnikiem liczby 15) $\iff$ (15 jest liczbą pierwszą)
   (o) (równanie $x^2 - 5x + 6 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek) $\wedge$ (równanie $x^2 - 5x + 6 = 0$ nie ma pierwiastka)
   (p) (równanie $x^2 - 5x + 6 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek) $\iff$ (równanie $x^2 - 5x + 6 = 0$ nie ma pierwiastka)
   (q) $\left[\left(\sqrt{4^2+3^2} = 7\right) \wedge (\pi = 2)\right] \Rightarrow \left(2^7 > 10^3\right)$
   (r) $(\sin(\cos(124^\circ)) < \sqrt{2}) \vee (2^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną)
   (s) $\neg\left(\neg\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}\right)\right)$
   (t) ($(2n-1)^2$ jest liczbą nieparzystą dla każdej liczby naturalnej n) $\wedge$ (istnieje liczba naturalna n, dla której $(2n-1)^2$ jest liczbą pierwszą).
   (u) ($(2n-1)^2$ jest liczbą nieparzystą dla każdej liczby naturalnej n) $\iff$ (istnieje liczba naturalna n, dla której $(2n-1)^2$ jest liczbą pierwszą).
   (v) $((\log 2 < 0) \vee (\sin\pi = 0)) \Rightarrow (\cos\pi = 0)$
   (w) $((2|3) \wedge (2$ jest liczbą pierwszą$)) \iff \neg(2|3)$
   (x) (trójkąt o bokach długości 3, 4, 5 jest prostokątny) $\wedge$ $((2+1>0) \Rightarrow \sin\cos 2009^\circ < 1)$

11. Za pomocą symboli arytmetycznych i symboli rachunku zdań zapisać następujące twierdzenia arytmetyki liczb rzeczywistych.

   (a) Jeśli liczba jest różna od zera, to (jest ujemna lub jest dodatnia).
   (b) Jeśli iloczyn dwóch liczb jest różny od zera, to obie te liczby są różne od zera.