Wstęp do matematyki

Ćwiczenia II

1. Zapisz za pomocą spójników logicznych:
   (a) alternatywę negacji zdania p i negacji zdania q,
   (b) negację koniunkcji zdań p i q,
   (c) implikację, której poprzednikiem jest zdanie p, a następnikiem jest alternatywa zdań p i q,
   (d) równoważność zbudowaną ze zdania p oraz implikacji o poprzedniku p i następniku będącym negacją zdania p.

2. Wyznacz wartość logiczną zdań złożonych, jeśli $v(p) = 0$ i $v(q) = 1$:
   (a) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge (p \vee q))$,
   (b) $((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
   (c) $(p \wedge (q \Rightarrow p)) \vee (p \vee \neg(p \Rightarrow q))$.

3. Wyznacz wartość logiczną zdań złożonych mając dane wartości logiczne zdań prostych:
   (a) $(p \wedge q) \vee (q \wedge (p \vee q))$, $v(p) = 0, v(q) = 1$,
   (b) $p \Rightarrow (p \Rightarrow (p \Rightarrow q)))$, $v(p) = 1, v(q) = 0$,
   (c) $((p \vee (\neg p)) \wedge (q \vee (\neg q))) \Rightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$, $v(p) = 1, v(q) = 1$,
   (d) $((\neg(\neg p)) \wedge (\neg(\neg(\neg q)))) \vee (\neg(\neg(\neg(\neg r))))$, $v(p) = 1, v(q) = 0, v(r) = 1$.

4. Załóżmy, że zdanie $((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow (r \vee s)$ jest fałszywe. Znajdź wartości logiczne zdań p, q, r, s.

5. Załóżmy, że zdanie p jest fałszywe, a zdanie $(r \Rightarrow s) \iff (p \wedge q)$ jest prawdziwe. Wyznacz wartości logiczne zdań r i s.

6. (a) Jaka jest wartość logiczna zdania p, jeśli wartość logiczna zdania $p \Rightarrow q$ wynosi 1 dla dowolnego zdania q?
   (b) Jaka jest wartość logiczna zdania q, jeśli wartość logiczna zdania $p \Rightarrow q$ wynosi 1 dla dowolnego zdania p?

7. Sporządź tabele wartości logicznych następujących zdań:
   (a) $p \vee (\neg p)$,
   (b) $(p \wedge q) \vee q$,
   (c) $(\neg p) \wedge (\neg q)$,
   (d) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$,
   (e) $(p \wedge q) \Rightarrow r$,
   (f) $p \vee \neg(q \Rightarrow r)$.

8. Sporządź tabele wartości logicznych następujących zdań:
   (a) $(p \iff q) \iff r$,
   (b) $p \iff (q \iff r)$,
   (c) $(p \iff q) \wedge (q \iff r)$,
   (d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$,
   (e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$,
   (f) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$,
   (g) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow s)$.

9. Korzystając z logicznej równoważności wyrażeń $\neg(p \Rightarrow q)$ i $p \wedge (\neg q)$ sformułuj negacje następujących zdań.
   (a) Jeśli trójkąt o bokach a, b, c jest prostokątny, to $a^2 + b^2 = c^2$.
   (b) Jeśli $a > 0$, to funkcja $f(x) = ax+b$ jest malejąca lub stała.
   (c) Jeśli n jest liczbą pierwszą, to $\sqrt{n}$ jest liczbą niewymierną.
   (d) Jeśli $x \in (0, \pi)$, to $\sin x < 0$.

10. Wyraź:
    (a) koniunkcję za pomocą alternatywy i negacji,
    (b) alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji,
    (c) implikację za pomocą alternatywy i negacji,
    (d) implikację za pomocą koniunkcji i negacji,
    (e) koniunkcję za pomocą implikacji i negacji,
    (f) alternatywę za pomocą implikacji i negacji.

11. Czy można wyrazić:
    (a) implikację za pomocą alternatywy i koniunkcji?
    (b) alternatywę za pomocą koniunkcji i implikacji?
    (c) koniunkcję za pomocą implikacji i alternatywy?

12. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są logicznie równoważne:
    (a) $\neg((\neg p) \vee q)$ i $p \vee \neg q$,
    (b) $(\neg p) \wedge (p \Rightarrow q)$ i $\neg(q \Rightarrow p)$,
    (c) p i $(\neg p) \Rightarrow (q \wedge \neg q)$,
    (d) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ i $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

13. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami:
    (a) $\neg\neg p \Rightarrow p$
    (b) $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$
    (c) $p \vee q \vee (p \wedge q)$,
    (d) $p \vee ((\neg p) \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$,

(e) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$,

(f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

(g) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(h) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(i) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

14. Wyrażenie rachunku zdań nazywamy *spełnialnym*, jeśli przyjmuje wartość „prawda" dla pewnego układu wartości logicznych zmiennych zdaniowych. Sprawdź, które z poniższych zdań są spełnialne:

(a) $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$,

(b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)$,

(c) $((p \wedge q) \vee (q \wedge r)) \Rightarrow \neg(p \wedge r)$.

15. Dla jakich wartości logicznych zdań p i q prawdziwe jest zdanie

(a) $(p \iff q) \iff ((p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q)))$.

(b) $(p \wedge q) \iff (p \vee q)$.

(c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

(d) $(p \Rightarrow (\neg q)) \Rightarrow ((\neg q) \Rightarrow p)$.

16. Sformułuj zaprzeczenie zdań:

(a) Proste l_1 i l_2 są równolegle lub skośne.

(b) Prosta l ma jeden punkt wspólny z danym okręgiem, lub prosta l nie ma żadnego punktu wspólnego z danym okręgiem.

(c) Liczba a jest podzielna przez liczby b i c.

(d) Para liczb a, b spełnia układ równań

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

(e) Jeśli liczba a jest podzielna przez 2, to jest podzielna przez 4.

17. Prześledź następujące rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} x &= -1 \quad /()^2 \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \quad \vee \quad x = -1. \end{aligned}$$

Dlaczego liczba $x = 1$ nie jest poprawnym rozwiązaniem tego równania?