Wstęp do matematyki

Ćwiczenia III

1. Odczytaj zdania. Oceń ich prawdziwość.

   (a) $\forall_{x<0}\ \frac{1}{x} < 0$,

   (b) $\exists_{x>0}\ x^2 = 1000$,

   (c) $\forall_x\ (x \neq 0 \Rightarrow \exists_y\ xy = 1)$,

   (d) $\exists_y \forall_x\ x + y = x$,

   (e) $\forall_{x,y}\ [x < y \Rightarrow \exists_z\ (x < z \wedge z < y)]$.

2. Zapisz symbolicznie poniższe zdania.

   (a) Równanie $x^2 - x - 2 = 0$ ma dodatni pierwiastek.

   (b) Dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje liczba naturalna n, taka że suma $x + n$ jest większa od 1000.

   (c) Istnieje liczba m, od której nie jest mniejszy kwadrat dowolnej liczby x.

   (d) Dla dowolnej liczby naturalnej istnieje liczba naturalna większa od niej o 1000.

   (e) Nie istnieje największa liczba naturalna.

   (f) Nie istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat byłby mniejszy od zera.

   (g) Między dwiema dowolnymi liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia liczba rzeczywista.

   (h) Liczba x jest sumą kwadratów pewnych dwóch liczb naturalnych.

   (i) Dla dowolnego m równanie $x^2 + mx - 2m^2 = 0$ ma rozwiązanie.

   (j) Nie dla każdej liczby x jej kwadrat jest większy od tej liczby.

   (k) Dla dowolnej liczby x jej wartość bezwzględna jest nieujemna.

   (l) Każda liczba jest równa sobie samej.

   (m) Żadna liczba nie jest mniejsza od siebie samej.

   (n) Dla każdej liczby x istnieje liczba od niej większa i jednocześnie mniejsza od $x + 1$.

   (o) Dla każdych dwóch liczb istnieje ich średnia arytmetyczna.

   (p) Istnieje liczba będąca wspólnym pierwiastkiem równań $x^2 - 5x + 6 = 0$ i $x^2 - 6x + 9 = 0$.

3. Sformułuj poniższe zdania z ukrytymi kwantyfikatorami w podanej postaci symbolicznej i określ ich prawdziwość.

   (a) Sześcian liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą.

   $$\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ (\ldots) \Rightarrow (\ldots)$$

   (b) Iloczyn liczby parzystej i dowolnej liczby całkowitej jest zawsze parzysty.

   $$\forall_{a,b\in\mathbb{Z}}\ (\ldots) \Rightarrow (\ldots)$$

   (c) Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych jest nieparzysta.

   $$\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ (\ldots)$$

   (d) Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych jest parzysta.

   $$\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ (\ldots)$$

   (e) Suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

   $$\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ (\ldots) \Rightarrow (\ldots)$$

   (f) Suma dwóch liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.

   $$\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ (\ldots) \Rightarrow (\ldots)$$

4. Wskaż zmienne wolne i związane w poniższych wyrażeniach:

   (a) $\exists_x\ (x > 0 \Rightarrow x > 1000)$,

   (b) $\forall_x\ (x - 5 = 5 \Rightarrow \exists_y\ 2y = x)$,

   (c) $\forall_x \forall_y\ \varphi(x, y, z)$,

   (d) $\exists_z \varphi(x, y, z)$,

   (e) $(\forall_x \exists_y\ x < y) \vee (x < z)$,

   (f) $\exists_x \forall_y\ [x < y \Rightarrow (x < z \vee z < y)]$.

   (g) $\exists_x\ (2x + 1 = 0) \wedge \exists_x\ (x + 2 = 5)$

   (h) $\exists_x\ ((2x + 1 = 0) \wedge (x + 2 = 5))$

   (i) $\exists_x\ (2x + 1 = 0) \wedge (x + 2 = 5)$

   (j) $\forall_x\ (x > 0) \vee \forall_x (x \leqslant 0)$

   (k) $\forall_x ((x > 0) \vee (x \leqslant 0))$

   (l) $(x \leqslant 0) \vee \forall_x\ (x > 0)$

   (m) $\forall_x\ ((x > 0) \Rightarrow \exists_x\ (x > 0))$

   (n) $\exists_x\ ((x > 0) \wedge \forall_x\ (x \neq 0))$

5. Podać po jednym przykładzie elementu spełniającego i nie spełniającego funkcję zdaniową.

   (a) $x^2 \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $x^2 - x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $x > 1$, $x \in \mathbb{N}$.

   (d) $x^2 = 2$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Znajdź zbiory spełniania poniższych form zdaniowych:

(a) $(x-1)(x-2)(x-3)=0,\ x\in\mathbb{N}$,

(b) $(x+1)(x+2)(x+3)=0,\ x\in\mathbb{N}$,

(c) $x=x,\ x\in\mathbb{R}$,

(d) $\exists_x\ xy=1, x,y\in\mathbb{Q}$,

(e) $\forall_x\ xy=1, x,y\in\mathbb{Q}$.

7. Jakimi kwantyfikatorami należy poprzedzić formy zdaniowe określone w zbiorze $\mathbb{R}$, aby otrzymać zdania prawdziwe?

(a) $x+1=1000$

(b) $x^6+50>0$

(c) $x+17=17+x$

(d) $x-17=17-x$

(e) $x^2+2x+1=0$

8. Podaną formę zdaniową poprzedź kwantyfikatorami tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe (odpowiednio, zdanie fałszywe).

(a) $x^2+y^2\geqslant 1$

(b) $x^2+2x+6=9$

(c) x jest liczbą pierwszą

(d) $x^2+y^2>0$

9. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

(a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ x+y=0$

(b) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x+y=0$

(c) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ x+y=x$

(d) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x+y=x$

(e) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y>x$

(f) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ y>x$

(g) $\forall_{m\in\mathbb{N}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\ m\geqslant n$

(h) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}}\ m\geqslant n$

(i) $\forall_{m\in\mathbb{N}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\ m>n$

(j) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}}\ m>n$

10. Zapisz poniższe zdania nie używając kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie

(a) $\forall_{x\neq 0}\ x^2>0$,

(b) $\exists_{x<0}\ x^2>1000$.

11. Zapisz poniższe zdania używając kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie:

(a) $\forall_x\ [x<0\Rightarrow\forall_y\ (y<0\Rightarrow xy>0)]$,

(b) $\exists_t\ [t>0\wedge\forall_x \cos(x+t)=\cos x]$.

12. Określ prawdziwość poniższych zdań. Dla każdego z nich zapisz negację.

(a) $\exists_{x<0}\ x^2>1000$

(b) $\forall_{x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\exists_{y\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\ xy=1$

(c) $\exists_{b\in\mathbb{N}}\forall_{a\in\mathbb{N}}\ a+b=a$

(d) $\forall_{x\in\mathbb{Q}}(x\neq 0\Rightarrow\exists_{y\in\mathbb{Q}}\ xy=1)$

(e) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{z\in\mathbb{R}}\ (z=y^2\wedge xyz=1)$

(f) $\forall_x\ (x<0\vee x=0\vee x>0)$

(g) $\forall_x\ (x^2+1<0\Rightarrow x=2009)$

(h) $\forall_x\exists_y\ (y^2=x)$

(i) $\forall_x\exists_y\ (x^2+y^2\geqslant 1)$

13. Niech $n\in\mathbb{N}$. Zdanie $\neg(\forall_{k\in\mathbb{N}}\ k^2=n)$ jest równoważne zdaniu

(a) $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ k^2=n$,

(b) $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ k^2\neq n$,

(c) $\exists_{k\in\mathbb{N}}\ \neg(k^2=n)$,

(d) $\exists_{k\in\mathbb{N}}\ k^2\neq n$.

14. Zdanie $\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\exists_{y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ xy=1$ jest równoważne zdaniu

(a) $\exists_{y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ xy=1$,

(b) $\neg(\exists_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\forall_{y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ xy\neq 1)$,

(c) $\neg(\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\exists_{y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ xy\neq 1)$.

15. Poniższe wyrażenia są prawami rachunku kwantyfikatorów. Podaj przykłady na to, że implikacji nie można zastąpić równoważnościami.

(a)

$$[(\forall_{x\in X}\ \varphi(x))\vee(\forall_{x\in X}\ \psi(x))]\Rightarrow[\forall_{x\in X}\ (\varphi(x)\vee\psi(x))]$$

(b)

$$[\exists_{x\in X}\ (\varphi(x)\wedge\psi(x))]\Rightarrow[(\exists_{x\in X}\ \varphi(x))\wedge(\exists_{x\in X}\ \psi(x))]$$

(c) prawo przestawiania kwantyfikatorów:

$$(\exists_{x\in X}\forall_{y\in Y}\ \varphi(x,y))\Rightarrow(\forall_{y\in Y}\exists_{x\in X}\ \varphi(x,y))$$