Wstęp do matematyki

Ćwiczenia IV

1. Dla danych liczb całkowitych m, n przez $p = p(m, n)$ oznaczmy zdanie:
   m i n są liczbami nieparzystymi, a przez $q = q(m, n)$ zdanie:
   $m + n$ jest liczbą parzystą.
   (a) Czy p jest warunkiem wystarczającym dla q?
   (b) Czy p jest warunkiem koniecznym dla q?
   (c) Czy q jest warunkiem wystarczającym dla p?
   (d) Czy q jest warunkiem koniecznym dla p?

2. Czy $3|n$ jest warunkiem koniecznym, czy wystarczającym, dla
   (a) $6|n$,
   (b) n jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych,
   (c) suma cyfr liczby n dzieli się przez 3,
   (d) $n > 2$?

3. Które warunki są konieczne, a które wystarczające, na przystawanie trójkątów ABC i $A'B'C'$:
   (a) trójkąty mają odpowiednio równe kąty,
   (b) trójkąty mają odpowiednio równe dwa boki i kąt między nimi,
   (c) trójkąty się pokrywają,
   (d) dwa wierzchołki trójkątów się pokrywają?

4. Używając sformułowania *warunek wystarczający* i *warunek konieczny* wypowiedzieć twierdzenie.
   (a) Czworokąt ma środek symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoległobokiem.
   (b) Jeżeli trójkąt jest równoboczny, to ma oś symetrii.
   (c) Liczba całkowita jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 3.
   (d) Jeżeli liczba całkowita jest podzielna przez 9, to jest podzielna przez 3.

5. Sformułuj twierdzenia odwrotne do następujących twierdzeń i zbadaj ich prawdziwość.
   (a) Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, jeśli $xy = 0$, to $x = 0$ lub $y = 0$.
   (b) Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $x+1 = 2$, to $(x+1)^2 = 4$.
   (c) Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$, jeśli $2|a$ lub $2|b$, to $2|ab$.
   (d) Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$, jeśli $2|a$ i $2|b$, to $2|a + b$.
   (e) Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $x^2 + x = 0$, to $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$.
   (f) Dla dowolnego $x \geqslant 0$, jeśli $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} = 3$, to $x = 0$.

6. Utworzyć twierdzenia: odwrotne, przeciwstawne (kontrapozycja) i przeciwne do twierdzenia
   $$(4|n \wedge 3|n) \Rightarrow 6|n.$$
   Które z tych twierdzeń są prawdziwe?

7. Sformułuj kontrapozycję twierdzenia
   (a) Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma pochodną w punkcie x_0, to jest ciągła w punkcie x_0.
   (b) Jeżeli $f'(x) < 0$ na przedziale (a, b), to funkcja $y = f(x)$ jest malejąca na tym przedziale.
   (c) Jeżeli dwie izometrie są zgodne w trzech niewspółliniowych punktach, to są identyczne.

8. Przeprowadź dowody dedukcyjne następujących twierdzeń. Zapisz symbolicznie ciągi implikacji składające się na te dowody.
   (a) Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Jeżeli $a|b$ i $c|d$, to $ac|bd$.
   (b) Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi różnymi od zera. Jeśli $a^2|b$ i $b^3|c$, to $a^6|c$.
   (c) Jeżeli $x \in (0, 4)$, to $\frac{4}{x(4-x)} \geqslant 1$
   (d) Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$ i $x^2 + 5y = y^2 + 5x$, to $x = y$ lub $x + y = 5$.
   (e) Jeżeli $x, y > 0$ i $x < y$, to $x^2 < y^2$.
   (f) Jeżeli $a \in \mathbb{N}$ i $a^2|a$, to $a = 1$.
   (g) Jeżeli $n \in \mathbb{N}$, to $2|\binom{2n}{n}$.
   (h) Jeżeli $a, b, c \in \mathbb{N}$ i $c \leqslant b \leqslant a$, to $\binom{a}{b} \cdot \binom{b}{c} = \binom{a}{b-c} \cdot \binom{a-b+c}{c}$.
   (i) Każda nieparzysta liczba całkowita jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

9. Przeprowadź dowody redukcyjne następujących twierdzeń. Zapisz symbolicznie ciągi implikacji składające się na te dowody.
   (a) Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność
   $$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4.$$
   (b) Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność
   $$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$$

10. Przeprowadź dowody dedukcyjne następujących twierdzeń metodą *przez przypadki*, tzn. przez rozważenie możliwych reszt z dzielenia.

    (a) Dla dowolnej liczby całkowitej n liczba n^2+3n+5 jest nieparzysta.

    (b) Jeśli liczby całkowite m i n nie są podzielne przez 3, to mn też nie dzieli się przez 3.

    (c) Jeśli liczby całkowite m i n nie są podzielne przez 3, to $m^2 + n^2$ też nie dzieli się przez 3.

11. Udowodnij następujące twierdzenia metodą *nie wprost*.

    (a) Jeżeli $n \in \mathbb{Z}$ i $3 \nmid n^3$, to $3 \nmid n$.

    (b) Jeżeli $n \in \mathbb{Z}$ i $4 \nmid n^2$, to $2 \nmid n$.

    (c) Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $x^2+3x < 0$, to $x < 0$.

    (d) Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $2x^3-3x^2+3x-2 \geqslant 0$, to $x \geqslant 0$.

    (e) Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c jeśli $a \cdot b > c^2$, to $a > c$ lub $b > c$.

    (f) Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, jeśli $a + b + c > d$, to $a > \frac{d}{3}$ lub $b > \frac{d}{3}$, lub $c > \frac{d}{3}$.

    (g) Jeśli x jest dodatnią liczbą niewymierną, to $\sqrt{2x+3}$ też jest liczbą niewymierną.

    (h) Jeżeli $a, b \in \mathbb{Z}$ i obie liczby: ab i $a+b$ są parzyste, to a i b też są parzyste.

    (i) Dane są liczby całkowite m i n. Jeśli mn dzieli się przez 3, to m lub n dzieli się przez 3.

    (j) Jeśli suma kwadratów liczb całkowitych m i n jest podzielna przez 3, to liczby m i n też dzielą się przez 3.

    (k) Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ i $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n też jest liczbą pierwszą.

12. Udowodnij następujące twierdzenia metodą *przez sprzeczność*.

    (a) Liczba $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

    (b) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, liczba $\sqrt[n]{3}$ jest niewymierna.

    (c) Liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

    (d) Równanie $\frac{x+1}{x-1} = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.

    (e) Równanie $18a + 51b = 19$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

    (f) Równanie $x^2 = 4y + 3$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

    (g) W każdym trójkącie są co najmniej dwa kąty ostre.

    (h) W każdym trójkącie co najmniej jeden z kątów ma miarę $\geqslant 60^\circ$.

    (i) Dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c, jeśli $a^2 + b^2 = c^2$, to a lub b jest parzyste.

    (j) Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1. Jeśli d jest najmniejszym dzielnikiem liczby n większym od 1, to d jest liczbą pierwszą.

13. Udowodnij twierdzenia

    (a) Liczba całkowita x jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $3x + 5$ jest nieparzysta.

    (b) Liczba całkowita a jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a^3 + a^2 + a$ jest parzysta.

    (c) Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $x^3+x^2y = y^2+xy$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = x^2$ lub $y = -x$.

    (d) Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Wtedy $a \equiv b \pmod{10}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \equiv b \pmod 2$ i $a \equiv b \pmod 5$.

    (e) Jeżeli $a \in \mathbb{Z}$, to $a^3 \equiv a \pmod 3$.

    (f) Nierówność $x^2 \leqslant \sqrt{x}$ posiada rozwiązanie dodatnie.

    (g) Jeżeli $a, b \in \mathbb{Z}$ i $2 \nmid ab$, to $2|a^2 + b^2$.

    (h) Jeżeli $a, b \in \mathbb{Z}$, to $2 \nmid a + b \iff 2 \nmid a^2 + b^2$.

    (i) Istnieje zbiór X taki, że $\mathbb{N} \in X$ i $\mathbb{N} \subseteq X$.

    (j) Istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $11|(2^n - 1)$.

    (k) Każda liczba rzeczywista spełniająca równanie $x^3 + x + 3 = 0$ jest niewymierna.

    (l) Jeżeli $n \in \mathbb{Z}$, to $4|n^2$ lub $4|(n^2 - 1)$.

14. Oceń prawdziwość podanych stwierdzeń. Udowodnij, że są one prawdziwe/nieprawdziwe.

    (a) Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$, to $|x + y| = |x| + |y|$.

    (b) Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$ i $|x + y| = |x - y|$, to $y = 0$.

    (c) Jeżeli $a, b, c \in \mathbb{N}$, to przynajmniej jedna z liczb $a - b$, $b - c$ i $a + c$ jest parzysta.

    (d) Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Jeżeli $a|b$ i $b|a$, to $a = b$.

    (e) Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeżeli $a|b$ i $b|a$, to $a = b$.

    (f) Jeżeli $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $a|bc$, to $a|b$ lub $a|c$.

    (g) Jeżeli $X \subseteq A \cup B$, to $X \subseteq A$ lub $X \subseteq B$.