Wstęp do matematyki

Ćwiczenia V

1. (a) Przypuśćmy, że sprawdziliśmy pewien wzór dla $n = 2$ i udowodniliśmy, że dla dowolnego naturalnego n, z prawdziwości tego wzoru dla liczby n wynika jego prawdziwość dla liczby $2n$. Dla jakich n możemy ten wzór uważać za udowodniony?
   (b) Wiadomo, że do pewnego zbioru A należy liczba 3. Wiadomo również, że (dla dowolnej liczby naturalnej n) jeśli n należy do zbioru A, to $2n$ należy do zbioru A. Jakie liczby *muszą* należeć do zbioru A?
   (c) Wiadomo, że twierdzenie $T(n)$ jest prawdziwe dla $n = 3$ i $n = 5$. Ponadto, dla dowolnego naturalnego n, z prawdziwości twierdzeń $T(n)$ i $T(n+2)$ wynika prawdziwość twierdzenia $T(n+4)$. Dla jakich n twierdzenie $T(n)$ jest prawdziwe?

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzą równości:
   (a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
   (b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
   (c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
   (d) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
   (e) $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$, gdzie $q \neq 1$,
   (f) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$,
   (g) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

3. Zapisać równości z poprzedniego zadania przy użyciu symbolu sumowania $\sum$.

4. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

5. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 4$
$$n! > 2^n.$$

6. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dla dowolnego rzeczywistego $x > -1$ zachodzi nierówność
$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

7. Dowieść, że dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

8. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że:
   (a) liczba $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ jest podzielna przez 57,
   (b) liczba $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11,
   (c) liczba $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ jest podzielna przez 25,
   (d) liczba $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ jest podzielna przez 19,
   (e) liczba $3^{2n+2} - 8n - 9$ jest podzielna przez 64,
   (f) liczba $3^{3n} - 26n - 1$ jest podzielna przez 169.
   (g) liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 3.

9. (a) Ciąg (x_n) spełnia warunki: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykaż, że
$$x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$$
   dla $n = 1, 2, 3, \ldots$
   (b) Funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest określona następująco:
$$\begin{cases} f(0) = 2, \\ f(1) = 5, \\ f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n) \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
   Udowodnij, że $f(n) = 2^n + 3^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

10. Udowodnij, że jeżeli graf jest drzewem o n wierzchołkach, to ma $n-1$ krawędzi.

11. Niech F_n będzie n–tą liczbą Fibonacciego. Wykaż, że
    (a) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
    (b) $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$
    (c) $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
    (d) Liczba n–cyfrowych liczb binarnych, w których nie ma dwóch sąsiednich jedynek jest równa F_{n+2}.

12. Na płaszczyźnie danych jest n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Wykaż, że proste te dzielą płaszczyznę na $\frac{n^2+n+2}{2}$ obszarów.