Wstęp do matematyki

Ćwiczenia VI

1. Podaj elementy i podzbiory następujących zbiorów:
   (a) $\{1\}$, $\{\{1\}\}$, $\{1, \{1\}\}$
   (b) $\emptyset$, $\{\emptyset\}$,
   (c) $\{a, \{a, b\}\}$, $\{\{\{1, 4\}, a, b, \{\{3, 4\}\}, \{\emptyset\}\}\}$.

2. Czy $\emptyset = \{\emptyset\}$?

3. Zapisz poniższe zbiory wypisując ich elementy i, ewentualnie, używając wielokropka.
   (a) Zbiór kolejnych liczb naturalnych od 100 do 110.
   (b) Zbiór reszt z dzielenia przez 5.
   (c) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 25\}$
   (d) Zbiór reszt z dzielenia przez 100.
   (e) Zbiór całkowitych wielokrotności liczby 7.
   (f) $\{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$
   (g) $\{5a + 2b \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$

4. Zbiór parzystych liczb całkowitych można zapisać jako zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez 2
$$\{n \in \mathbb{Z} : 2|n\}.$$
   W podobny sposób, tzn. jako zbiór wszystkich elementów danego zbioru spełniających pewien warunek, zapisz następujące zbiory.
   (a) Przedział $(-\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.
   (b) Zbiór liczb wymiernych leżących między 0 i 1.
   (c) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   (d) Zbiór całkowitych wielokrotności liczby 10.

5. Zbiór nieparzystych liczb całkowitych można zapisać jako zbiór wszystkich liczb postaci $2k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą:
$$\{2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}.$$
   W podobny sposób, tzn. jako zbiór liczb pewnej postaci, zapisz następujące zbiory.
   (a) Zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 11.
   (b) Zbiór liczb naturalnych, których cyfrą jedności (w zapisie dziesiętnym) jest 7.
   (c) Zbiór rozwiązań rzeczywistych równania $\sin x = 0$.

6. Zapisz zbiory bez użycia wielokropka
   (a) $\{0, 4, 16, 36, 64, 100, \ldots\}$
   (b) $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$
   (c) $\{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$
   (d) $\{3, 6, 11, 18, 27, 38\}$
   (e) $\left\{\ldots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \ldots\right\}$
   (f) $\left\{\ldots, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 3, \frac{15}{4}, \frac{9}{2}, \ldots\right\}$

7. Zbadaj, czy pomiędzy zbiorami A i B zachodzą relacje inkluzji, a następnie wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ dla
   (a) $A = [0, 2]$, $B = [-1, 1) \cup [10, +\infty)$,
   (b) $A = \{x \in \mathbb{N}\,;\, x < 1000\}$,
   $B = \{x \in \mathbb{N}\,;\, x \geqslant 1000\}$,
   (c) $A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > 1000\}$,
   $B = \{x \in \mathbb{N}\,;\, x > 1000\}$,
   (d) $A = \{\{a, \{b\}\}, c, \{b\}, \{a, b\}\}$,
   $B = \{\{a, b\}, c, \{b\}\}$,
   (e) $A = \{a, \{b\}\}$, $B = \{\{a\}, \{b\}\}$.
   (f) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 5\}$,
   $B = \{n \in \mathbb{N} : n$ jest liczbą parzystą.$\}$

8. Dany jest zbiór wszystkich wielokątów na płaszczyźnie i jego trzy podzbiory:
   A – zbiór wielokątów foremnych,
   B – zbiór trójkątów,
   C – zbiór wielokątów posiadających co najmniej jeden kąt prosty.
   Jakie figury należą do zbiorów: $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $B \cap C$, $A \cap C$, $B \setminus (A \cap C)$?

9. Zilustruj graficznie zbiory
   (a) $\{(x, y) \ : \ x \in [-1, 1], \ y \in \mathbb{Z}\}$
   (b) $\{(x, y) \ : \ y^2 \leqslant 1 - x^2\}$
   (c) $\{(x, x + y) \ : \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}\}$
   (d) $\{(x, x^2) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x, \frac{x^2}{y}) \ : \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}\}$

10. Zilustruj graficznie zbiory A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A', B' dla:
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y > 0\}$,
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \leqslant 0\}$,
   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y < 1 - x^2\}$,
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y > x^2 - 1\}$.
   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + 2y \geqslant -2\}$,
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + 4y \leqslant 4\}$.

8. Wykaż, że dla podzbiorów A i B zbioru X zachodzą równości:
   (a) $(A \cap B) \cup B = B$
   (b) $A \cap B' = A \setminus B$,
   (c) $A \cup B' = (B \setminus A)'$,
   (d) $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$

(e) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(f) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(g) $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$

11. Sprawdź, czy poniższe równości są prawdziwe dla dowolnych zbiorów. Jeśli tak, zilustruj je korzystając z diagramów Venna. Jeśli nie, podaj kontrprzykłady.

    (a) $A \cap (A \cup B) = B$,

    (b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$,

    (c) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

    (d) $(A \setminus B) \cup A = B$

    (e) $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$

    (f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

12. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:

    (a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

    (b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

    (c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,

    (d) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$,

    (e) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$,

    (f) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

13. Niech A, B, C, D będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij, że jeśli $A \subseteq C$ i $B \subseteq D$, to:

    (a) $A \cap B \subseteq C \cap D$,

    (b) $A \cup B \subseteq C \cup D$.

14. Sformułować i uzasadnić wzór algebry zbiorów odpowiadający tautologii rachunku zdań:

    (a) $((p \wedge q) \vee r) \iff ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$

    (b) $(\neg(\neg p)) \iff p$

    (c) $\neg(p \wedge \neg q) \iff ((\neg p) \vee q)$

    (d) $p \vee (\neg p)$.

15. Wyznacz zbiory $A \times B$, $A \times A$, $B \times B$ oraz $B \times A$ dla:

    (a) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0\}$,

    (b) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

16. Zilustruj graficznie zbiory $A \times B$ oraz $B \times A$ dla:

    (a) $A = (-1, 1)$, $B = [0, 2]$,

    (b) $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{Z}$,

    (c) $A = (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geqslant 5\}$.

17. Zilustruj graficznie podzbiory $\mathbb{R}^3$:

    (a) $[0, 1]^3$, $\{0, 1\}^3$

    (b) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \times [0, 1]$

18. Obliczyć $A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$, $A \times B \times C$ dla $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$.

19. Czy para $(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ i należy do zbioru $A \times B$, $B \times A$, jeżeli
    $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

20. Uzasadnij równości

    (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

    (b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

21. Znajdź zbiór potęgowy $2^X = \mathcal{P}(X)$ dla następujących zbiorów:

    (a) $X = \{1, 2\}$, $X = \{1, \{1, 2\}\}$, $X = \{10\}$,

    (b) $X = \{-1, 0, 1\}$, $X = \{0, 1, 2, 3\}$,

    (c) $X = \emptyset$, $X = \{\emptyset\}$,

    (d) $X = \{0, 1\}^2$.

22. Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, jeżeli X jest zbiorem n-elementowym?

23. (a) Znajdź wszystkie elementy indeksowanej rodziny zbiorów $(A_n)_{n \in I}$, gdzie $I = \{1, 2, 3\}$,
    $A_n = \{k \in \mathbb{Z} : k^2 \leqslant n\}$.

    (b) Znajdź pięć pierwszych elementów indeksowanej rodziny zbiorów $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$, gdzie
    $A_n = (n - 5, n + 5)$.

24. Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ dla następujących zbiorów A_n:

    (a) $A_n = \big[0, \frac{1}{n}\big]$,

    (b) $A_n = \big(0, \frac{1}{n}\big)$,

    (c) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n \leqslant x\}$

    (d) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n \leqslant x \leqslant n + 1\}$

    (e) $A_n = \Big\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n+1}\Big\}$

    (f) $A_n = [(-1)^n, 3 + (-1)^n]$,

    (g) $A_n = \big(-\frac{1}{n}, n^2\big)$.

25. Znajdź $\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} A_t$ oraz $\bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} A_t$, gdy

    (a) $A_t = (0, t)$,

    (b) $A_t = \{x \in \mathbb{R} : -t \leqslant x \leqslant t\}$

    (c) $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > t^2\}$.

    (d) $A_t = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = t\}$

26. Niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} : n \leqslant x \leqslant m\}$. Wyznacz

    (a) $\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$, $\quad \bigcap_{n,m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$

    (b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$, $\quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$

27. Wykaż, że

    (a) $\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$

    (b) $\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$

    (c) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$