Wstęp do matematyki

Ćwiczenia VII

1. Czy podany podzbiór iloczynu kartezjańskiego jest funkcją?

   (a) $\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x+3y=4\}$

   (b) $\{(x^2,x) : x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

   (c) $\{(x^3,x) : x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

2. Która z poniższych funkcji jest różnowartościowa, „na”, a która jest bijekcją? W przypadku funkcji odwracalnych, znajdź, o ile to możliwe, wzór funkcji odwrotnej.

   (a) $f\colon [10,20]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-7$.

   (b) $f\colon \{1,2,3,4,5,6\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$,

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	6	4	2	5	3	1

   (c) $f\colon (-\infty,0]\to[0,+\infty)$, $f(x)=x^2$.

   (d) $f\colon \mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=2^x$.

   (e) $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log x$.

   (f) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$.

   (g) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4$.

   (h) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+x$.

   (i) $f\colon \mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$.

   (j) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=n^3+10$.

   (k) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+3}{4x+5} & x\neq-\frac{5}{4}\\ \frac{1}{2} & x=-\frac{5}{4}.\end{cases}$

   (l) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$,
$$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{gdy } n \text{ liczba parzysta}\\ -\frac{n+1}{2} & \text{gdy } n \text{ liczba nieparzysta}\end{cases}$$

   (m) $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+y,x-3y)$

   (n) $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x,x+y,x-y)$

3. Dla jakich $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ($c\neq0$) funkcja $f\colon \mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ jest różnowartościowa?

4. Czy funkcja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ($c\neq0$), może być „na”?

5. Dla jakich $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ($c\neq0$) funkcja $f\colon \mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\}\to\mathbb{R}\setminus\{\frac{a}{c}\}$ określona wzorem $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ jest bijekcją? Znajdź w tym przypadku funkcję odwrotną do f.

6. Znajdź funkcję odwrotną do danej.

   (a) $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(2x+3y,4x+5y)$.

   (b) $f\colon \mathbb{R}\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}\times[0,\infty)$, $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$.

7. Wyznacz złożenia $f\circ g$ oraz $g\circ f$ (o ile istnieją).

   (a) $f(x)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$; $g(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

   (b)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	4	3	2	1

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	1	3	5	2	4

8. W jakiej kolejności można złożyć poniższe funkcje? Dla każdej z tych funkcji określ jej przeciwdziedzinę.

   (a) $f\colon [0,+\infty)\to\ldots$, $f(x)=\sqrt{x}$,
   $g\colon \mathbb{R}\to\ldots$, $g(x)=x^2-x+\frac{1}{4}$,

   (b) $f\colon [1,+\infty)\to\ldots$, $f(x)=\sqrt{x-1}$,
   $g\colon \mathbb{R}\to\ldots$, $g(x)=x^2+x+1$,

   (c) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\ldots$, $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$,
   $g\colon (-\infty,1]\to\ldots$, $g(x)=\sqrt{1-x}$

9. Przedstaw poniższe funkcje jako złożenia dwóch oraz trzech funkcji:

   (a) $f(x)=\sqrt{x^6+10}$, $x\in\mathbb{R}$,

   (b) $f(x)=2^{x-20}+30$, $x\in\mathbb{R}$.

10. Niech X będzie dowolnym alfabetem, X^* – zbiór słów X, ε – słowo puste. Rozważmy funkcje:
    $\mathrm{rev}\colon X^*\to X^*$, $\mathrm{rev}(a_1a_2\ldots a_n)=a_n\ldots a_2a_1$,
    $\mathrm{head}\colon X^*\setminus\{\varepsilon\}\to X$, $\mathrm{head}(a_1a_2\ldots a_n)=a_1$,
    $\mathrm{tail}\colon X^*\setminus\{\varepsilon\}\to X$, $\mathrm{tail}(a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n)=a_n$.
    Znajdź złożenia funkcji:

    (a) $\mathrm{rev}\circ\mathrm{rev}$,

    (b) $\mathrm{head}\circ\mathrm{rev}$,

    (c) $\mathrm{tail}\circ\mathrm{rev}$.

11. Niech $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dana wzorem $f(x,y)=(xy,x^3)$. wyznacz $f\circ f$.

12. Niech $f,g\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dane wzorami
$$f(a,b)=(mn,m^2),$$
$$g(a,b)=(m+1,m+n).$$
    Wyznacz $f\circ g$ i $g\circ f$.

13. Dla danej funkcji $f\colon X\to Y$ i zbiorów $A_i\subseteq X$, $B_j\subseteq Y$ wyznacz $f(A_i)$ oraz $f^{-1}(B_j)$.

    (a) $X=Y=\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-8$,
    $A_1=(0,1]$, $A_2=[-2,2)$,
    $B_1=(-\infty,-3]$, $B_2=\{-7,-6\}$.

    (b) $X=Y=\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn}x$,
    $A_1=[-10,20)$, $A_2=\{1000\}$, $A_3=[-111,0)$, $A_4=(-\frac{1}{2},0]$,
    $B_1=[0,1)$, $B_2=[-1,1]$, $B_3=\{-1\}$, $B_4=(\frac{1}{2},10)$.

(c) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sin x$,
$A_1 = \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$, $A_2 = \{0, \pi\}$, $A_3 = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right\}$
$B_1 = (\frac{1}{2}, +\infty)$, $B_2 = (-\infty, 0]$, $B_3 = \{2\}$.

14. Rozważmy dowolne funkcje $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Wykaż, że jeżeli funkcja $g \circ f$ jest różnowartościowa, to funkcja f jest różnowartościowa.

15. Rozważmy dowolne funkcje $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Wykaż, że jeżeli funkcja $g \circ f$ jest „na", to funkcja g jest „na".

16. (a) Podaj przykład funkcji $f\colon X \to Y$ i takich zbiorów $A, B \subseteq X$, że $A \subsetneqq B$ i $f(A) = f(B)$.
    (b) Podaj przykład funkcji $f\colon X \to Y$ i takich zbiorów $C, D \subseteq Y$, że $C \subsetneqq D$ i $f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$.

17. Niech $f\colon X \to Y$ będzie dowolną funkcją. Udowodnij, że:
    (a) dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq X$ zachodzi inkluzja
    $$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B),$$
    (b) dla dowolnych zbiorów $C, D \subseteq Y$ zachodzi równość
    $$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D).$$

18. Podaj przykład funkcji $f\colon X \to Y$ i takich zbiorów $A, B \subseteq X$, że:
    (a) $f(A \cap B) \subsetneqq f(A) \cap f(B)$,
    (b) $f(A) \setminus f(B) \subsetneqq f(A \setminus B)$.