Wstęp do matematyki

Ćwiczenia VIII

1. Rozważmy dowolny niepusty podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$. Określ, które z własności: zwrotność, przeciwzwrotność, symetryczność, antysymetryczność, słaba antysymetryczność, spójność, przechodniość mają następujące relacje binarne w zbiorze A:
   (a) $x \varrho y \iff x < y$,
   (b) $x \varrho y \iff x \leqslant y$,
   (c) $x \varrho y \iff x = y$,
   (d) $x \varrho y \iff x \neq y$.
2. Określ, jakie własności mają następujące relacje binarne w zbiorze $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$:
   (a) $x \varrho y \iff x$ i y są względnie pierwsze,
   (b) $x \varrho y \iff x|y$,
   (c) $x \varrho y \iff x|y \wedge y|x$.
   (d) $x \varrho y \iff xy = 2010$,
   (e) $x \varrho y \iff 2010|(x+y)$,
3. Określ, jakie własności mają następujące relacje binarne w zbiorze $\mathbb{R}$:
   (a) $x \varrho y \iff |x| < |y|$,
   (b) $x \varrho y \iff |x| \leqslant |y|$,
   (c) $x \varrho y \iff xy > 0$,
   (d) $x \varrho y \iff xy \geqslant 0$,
   (e) $x \varrho y \iff |x-y| > 0$.
   (f) $x \varrho y \iff |x-y| > 2010$.
4. Jakie własności mają następujące relacje binarne określone w zbiorze A:
   (a) relacja pusta $\varrho = \emptyset \subseteq A \times A$,
   (b) relacja pełna $\Delta_A = A \times A$?
5. Opisz wszystkie relacje $\varrho \subseteq A \times A$, które są:
   (a) jednocześnie symetryczne i słabo antysymetryczne,
   (b) jednocześnie symetryczne i antysymetryczne,
   (c) jednocześnie zwrotne i antysymetryczne.
6. Podaj przykład relacji, która:
   (a) jest słabo antysymetryczna i nie jest antysymetryczna,
   (b) jest przechodnia i symetryczna, ale nie jest zwrotna.
7. Wykaż, że suma relacji zwrotnych jest zwrotna.
8. Sprawdź, czy następujące relacja „|" jest w danym zbiorze relacją częściowego porządku. Czy jest to relacja liniowego porządku?
   (a) $| \subseteq \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$, $a|b \iff \exists_{c \in \mathbb{N}_1}\ b = ac$;
   (b) $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a|b \iff \exists_{c \in \mathbb{N}}\ b = ac$;
   (c) $| \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $a|b \iff \exists_{c \in \mathbb{Z}}\ b = ac$;
   (d) $| \subseteq \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$, $a|b \iff \exists_{c \in \mathbb{Q}^+}\ b = ac$;
9. Określmy relację binarną „$\preccurlyeq$" w zbiorze $\mathbb{R}^2$ (czyli $\preccurlyeq \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) w ten sposób, że
   $$(x,y) \preccurlyeq (z,t) \iff x \leqslant z \wedge y \leqslant t,$$
   dla dowolnych $x,y,z,t \in \mathbb{R}$. Sprawdź, że relacja „$\preccurlyeq$" jest częściowym porządkiem. Zbadaj analogiczną relację w $\mathbb{R}^n$.
10. Wykaż, że jeżeli (A, ϱ) jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to dla dowolnego podzbioru $B \subseteq A$, zbiór $(B, \varrho \cap (B \times B))$ też jest częściowo uporządkowany.
11. Znajdź (jeśli istnieją) elementy maksymalne, minimalne, największe i najmniejsze w zbiorach częściowo uporządkowanych z zadań 8 i 9.
12. W danym zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}^2$ określmy relację binarną „$\preccurlyeq$" jak w zadaniu 9. Znajdź, jeśli istnieją, elementy maksymalne, minimalne, największe i najmniejsze.
    (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,
    (b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,
    (c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}$,
    (d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^@ : |x+y| + |x-y| \leqslant 1\}$,
    (e) $A = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$,
    (f) $A = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\}$,
    (g) $A = \{(0,0), (-1,0), (1,0), (-\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, 1), (0,2)\}$,
    (h) $A = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$.
13. Uzasadnij, że jeżeli w zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje element największy (najmniejszy), to jest on jedynym elementem maksymalnym (minimalnym).
14. Podać przykład zbioru X i relacji R porządkującej X, która
    (a) ma element najmniejszy i dwa elementy maksymalne;
    (b) ma dwa elementy minimalne i trzy elementy maksymalne;
    (c) ma dokładnie jeden element maksymalny, ale nie ma elementu największego.

15. Niech $X = \{1, 2, 3\}$, $R \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ dana jest wzorem $xRy \iff x \subseteq y$. Znaleźć wszystkie elementy wyróżnione R (maksymalne i minimalne). Czy relacja R jest relacją liniowego porządku?

16. Sprawdź, że następujące relacje są relacjami typu równoważności:

    (a) $\varrho_1 \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$, $(k, l)\varrho_1(m, n) \iff k+n = l+m$, gdzie $(k, l), (m, n) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$,

    (b) $\varrho_2 \subseteq (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) \times (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$, $(a, b)\varrho_2(c, d) \iff ad = bc$, gdzie $(a, b), (c, d) \in (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$.

17. Dla dowolnej funkcji $f\colon X \to Y$, w zbiorze X określamy relację binarną (ker f) w ten sposób, że $x_1(\ker f)x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$.

    (a) Sprawdź, że relacja (ker f) jest relacją typu równoważności.

    (b) Przeanalizuj przykłady relacji postaci (ker f) dla funkcji head, tail, rev.

18. Jaką zależność między punktami na płaszczyźnie z układem współrzędnych ($\mathbb{R}^2$) określają relacje (ker f) dla następujących funkcji:

    (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$,

    (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x| + |y|$.

19. Sprawdź, czy dane relacje na zbiorze X (czyli podzbiory $X \times X$) są relacjami równoważności

    (a) $X = \mathbb{N}$, $xRy \iff 2|(x + y)$

    (b) $X = \{0, 1, 2\}$, $xRy \iff x + y \neq 3$

    (c) $X = \mathbb{Z}$, $xRy \iff 2|(3x - 5y)$

    (d) $X = \mathbb{N}$, $xRy \iff x$ i y mają tyle samo cyfr.

    (e) $X = \mathbb{N}$, $xRy \iff x$ i y mają taką samą ostatnią cyfrę.

    (f) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff x - y \in \mathbb{Z}$

20. Opisz zbiór klas abstrakcji dla relacji typu równoważności z poprzednich zadań.

21. Wskazać relację równoważności, której klasy abstrakcji dają podział

    (a) prostej $\mathbb{R}$ na odcinki $A_m = [m, m + 1)$;

    (b) prostej $\mathbb{R}$ na zbiory $(-\infty, 0)$, $\{0\}$, $(0, +\infty)$.

    (c) $\mathbb{N}$ na zbiór liczb parzystych i zbiór liczb nieparzystych;

    (d) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na okręgi O_r (o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu r);

    (e) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na proste L_t (proste przecinające oś OX pod kątem $\frac{\pi}{4}$ w punkcie $(t, 0)$).