Wstęp do matematyki

Ćwiczenia IX

1. Podaj przykład ustawienia w ciąg wszystkich elementów zbioru A. Podaj wzór funkcji $f\colon \mathbb{N}_1 \to A$ określającej ten ciąg.

   (a) $A = \{n \in \mathbb{N} : n > 1000\}$

   (b) $A = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$

   (c) $A = \mathbb{N} \setminus \{10, 20, 30\}$

   (d) $A = \mathbb{N} \cup \{-10, -20\}$

   (e) $A = \mathbb{Z}$

2. Podaj trzy przykłady ustawienia w ciąg wszystkich elementów zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3. Podaj nieskończenie wiele przykładów ustawienia w ciąg wszystkich elementów zbioru $\mathbb{N}$.

4. Udowodnij z definicji, że zbiory A i B są równoliczne:

   (a) $A = (a, +\infty)$, $B = (b, +\infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$,

   (b) $A = (0, 1)$, $B = (0, 1000)$,

   (c) $A = (0, 1]$, $B = [0, 1)$,

   (d) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$,

   (e) $A = \left\{\frac{1}{n},\ n = 10, 11, 12, 13, \ldots\right\}$,
   $B = \left\{\frac{1}{n},\ n = 100, 101, 102, 103, \ldots\right\}$

   (f) $A = \mathbb{R}$, $B = (1000, +\infty)$,

   (g) $A = (0, 1)$, $B = (0, 1]$,

   (h) $A = (0, 1)$, $B = [0, 1]$,

   (i) $A = \mathbb{R}$, $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = ax + b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$,

   (j) $A = \mathbb{R}$, $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = x^2\}$,

   (k) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 10\}$.

   (l) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$, $a, b, r \in \mathbb{R}, r > 0$.

5. Wykaż, że następujące zbiory są przeliczalne:

   (a) zbiór wszystkich przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$ o końcach całkowitych,

   (b) zbiór wszystkich przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$ o końcach wymiernych.

6. Uzasadnij, że następujące zbiory figur na płaszczyźnie z kartezjańskim układem współrzędnych, są przeliczalne:

   (a) zbiór wszystkich odcinków, których oba końce mają obie współrzędne wymierne,

   (b) zbiór wszystkich kół o promieniach wymiernych, których środki mają obie współrzędne wymierne,

   (c) dowolny zbiór rozłącznych kół.

7. Udowodnij, że następujące zbiory są mocy $\mathfrak{c}$:

   (a) dowolny zbiór A, taki że $(0, 1) \subseteq A \subseteq (0, 2)$,

   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,

   (c) zbiór wszystkich punktów w $\mathbb{R}^2$ o dokładnie jednej współrzędnej wymiernej.