

Algebra liniowa

Domowe IV

1. Które z ciągów $(-1, 1, 1, -1)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(4, 0, -3, \frac{1}{2})$ są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 1 \\7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 &= 3 \\5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 1\end{aligned}$$

2. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ ciąg $(1, t, 3, 2t)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 5 \\x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 16\end{aligned}$$

3. Znaleźć rozwiązanie ogólne i jedno rozwiązanie szczególne układu. Podać interpretację geometryczną otrzymanego zbioru rozwiązań.

(a)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\2x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 4 \\4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 11\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1 \\x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 4\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\4x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 15 \\4x_1 - 3x_2 - 7x_3 &= 14\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}-9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 3 \\-6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\-3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13 \\4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7\end{aligned}$$

W każdym z podpunktów wyznacz wzór odwzorowania f tak, aby dany układ opisywał zbiór $f^{-1}(a)$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}^3$ lub $a \in \mathbb{R}^4$.

4. Zbadać układ i znaleźć w zależności od parametru λ , jego rozwiązanie ogólne:

(a)

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 &= 9\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1\end{aligned}$$

5. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne i układ podstawowy (bazę) rozwiązań dla podanych jednorodnych układów równań liniowych:

(a)

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 &= 0 \\x_2 - x_4 &= 0 \\-x_1 + x_3 - x_5 &= 0 \\-x_2 + x_4 - x_6 &= 0 \\-x_3 + x_5 &= 0 \\-x_4 + x_6 &= 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 + x_5 &= 0 \\x_2 - x_4 + x_6 &= 0 \\x_1 - x_2 + x_5 - x_6 &= 0 \\x_2 - x_3 + x_6 &= 0 \\x_1 - x_4 + x_5 &= 0\end{aligned}$$

6. Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 7 \\x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= s\end{aligned}$$

jest niesprzeczny?

7. Dlaczego układ równań

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= a \\2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= b \\cx_1 + dx_2 + ex_3 &= f\end{aligned}$$

niezależnie od wyboru parametrów a, b, c, d, e, f nie może mieć dokładnie jednego rozwiązania?

8. Jakim zbiorem jest część wspólna trzech losowo wybranych płaszczyzn w \mathbb{R}^3 ?
9. Napisz układ trzech równań z trzema niewiadomymi tak, aby układ ten

- (a) miał dwuwymiarowy zbiór rozwiązań
(b) miał jednowymiarowy zbiór rozwiązań
(c) miał dokładnie jedno rozwiązanie
(d) był sprzeczny.