

Algebra liniowa

Domowe VIII

1. Obliczyć wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, gdzie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ($\varepsilon^3 = 1$)

2. Obliczyć podany wyznacznik, rozwijając go względem drugiej kolumny

$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ Odp. $2a - 8b + c + 5d$

3. Obliczyć podane wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ Odp: 22

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Odp: 16

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 7 & -3 & 6 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ Odp: -63

(d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{1} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ Odp: $\frac{28}{81}$

(e) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ nad ciałem \mathbb{Z}_7 . Odp. 1

4. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Oblicz

(a) $\det(A^4)$

(b) $\det(A \cdot B^{-7})$.

5. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & r & 1 & 0 \\ 0 & 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dla jakich wartości $r \in \mathbb{R}$ zachodzi $\det A = 1$?

6. Obliczyć bez rozwijania wyznacznik

$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{1}{2}(x+z) & \frac{1}{2}(x+y) & \frac{1}{2}(y+z) & 1 \end{vmatrix}$

7. Liczby 20604, 53227, 25755, 20927, 289 są podzielne przez 17. Wykazać, że wyznacznik

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

jest także podzielny przez 17.